

Vorlesung 04: Dispersion, Phasen- & Gruppengeschwindigkeit

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2021/22

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 16. November 2021

Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung
2. Komplexe Wellenzahl
3. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit
4. Was Sie gelernt haben sollten

Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung

2. Komplexe Wellenzahl

3. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

4. Was Sie gelernt haben sollten

Maxwellsche Gleichungen

- Die Maxwellschen Gleichungen für homogene Medien mit $\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon \underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}}$ gelten also, bei harmonischer Anregung mit der Kreisfrequenz ω , entsprechend auch für die komplexen Amplituden:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \kappa \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + j \omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = j \omega \varepsilon \left(1 - j \frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \right) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = j \omega \underline{\varepsilon} \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \quad (\text{I}) \quad \text{Durchflutungsgesetz}$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -j \omega \mu \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \quad (\text{II}) \quad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \underline{\rho}(\mathbf{r}) \quad (\text{III}) \quad \text{Gaußsches Gesetz}$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{IV})$$

- Bei Verwendung der komplexen Amplitude entfällt also die explizite Zeitabhängigkeit.
- Für leitfähige Medien können wir die komplexe Permittivität einführen als:

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon \left(1 - j \frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \right)$$

Zeitharmonische ebene Wellen (I)

- Für zeitharmonische ebene Wellen in homogenen, linearen Medien hängen die komplexen Zeiger $\underline{\mathbf{H}}(z, t) = \underline{\mathbf{H}}(z) \exp(j\omega t)$ und $\underline{\mathbf{E}}(z, t) = \underline{\mathbf{E}}(z) \exp(j\omega t)$ nur von der Ortskoordinate z und der Zeit t ab. Die Helmholtz-Gleichungen werden somit zu

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{\mathbf{H}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial z^2} + \underline{k}^2 \underline{\mathbf{E}} = 0$$

- Diese gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung haben die Lösungen

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}}(z, t) &= \underline{\mathbf{H}}_0^+ \exp(j[\omega t - \underline{k}z]) + \underline{\mathbf{H}}_0^- \exp(j[\omega t + \underline{k}z]) \\ \underline{\mathbf{E}}(z, t) &= \underline{\mathbf{E}}_0^+ \exp(j[\omega t - \underline{k}z]) + \underline{\mathbf{E}}_0^- \exp(j[\omega t + \underline{k}z]) \end{aligned}$$

- Dabei sind $\underline{\mathbf{H}}_0^+$ und $\underline{\mathbf{E}}_0^+$ die Feldvektoren zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $z = 0$ für die sich in $+z$ -Richtung ausbreitende Welle und $\underline{\mathbf{H}}_0^-$ und $\underline{\mathbf{E}}_0^-$ die entsprechenden komplexen Amplituden für die sich in $-z$ -Richtung ausbreitende Welle.

Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung

2. Komplexe Wellenzahl

3. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

4. Was Sie gelernt haben sollten

Komplexe Wellenzahl (I)

- Die komplexe Wellenzahl lässt sich in Real- und Imaginärteil separieren

$$\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - j \frac{\kappa}{\omega \varepsilon}} = \pm (\beta - j \alpha)$$

- Betrachten wir nun eine in $+z$ -Richtung laufende zeitharmonische ebene Welle mit dem H-Feldvektor

$$\underline{\mathbf{H}}(z, t) = \underline{\mathbf{H}}_0^+ \exp(j[\omega t - \underline{k}z]) = \underline{\mathbf{H}}_0^+ \exp(j[\omega t \mp (\beta - j \alpha) z]) = \underline{\mathbf{H}}_0^+ \exp(j[\omega t \mp \beta z]) \exp(\mp \alpha z)$$

- Hier ist β die Phasenkonstante und α die Dämpfungskonstante aufgrund von Ohmschen Verlusten.
- In einem verlustbehafteten Medium wird das Vorzeichen von α ist dabei so gewählt, dass die Amplitude der Feldkomponenten bei zunehmender Entfernung von der Quelle abnimmt.
- *Hinweis:* Im Folgenden nehmen wir vereinfachend an, dass die elektrische Permittivität ε nicht frequenzabhängig ist. In einem realen Medium gilt jedoch stets $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$.

Nebenrechnung

- Betrachten wir dazu zunächst den Fall beliebiger reeller Zahlen a , b , c und d mit

$$a + j b = \pm \sqrt{c + j d}$$

- Sind c und d gegeben, so lassen sich a und b bestimmen aus

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} + 1} \quad \text{und} \quad b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} - 1}$$

Komplexe Wellenzahl (II)

- Angewendet auf die komplexe Wellenzahl $\underline{k} = \pm (\beta - j \alpha)$ erhalten wir demnach zum einen die frequenzabhängige *Phasenkonstante*

$$\beta(\omega) = \pm \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1},$$

- zum anderen erhalten wir die frequenzabhängige *Dämpfungskonstante*

$$\alpha(\omega) = \pm \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1},$$

welche das exponentielle Ab- oder Aufklingen der Wellenamplitude angibt.

- Erwartungsgemäß nimmt damit die Dämpfung der ebenen Welle mit steigender Leitfähigkeit aufgrund der wachsenden ohmschen Verluste zu.

Dispersionsrelation (I)

- Wird der obige Zusammenhang für die Phasenkonstante $\beta(\omega)$ invertiert, so erhalten wir (bei konstantem ε) die *Dispersionsrelation für ebene Wellen in homogenen Medien*

$$\omega(\beta) = \frac{2c^2\beta^2}{\sqrt{4c^2\beta^2 + \frac{\kappa^2}{\varepsilon^2}}} = \frac{c\beta}{\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{4c^2\varepsilon^2\beta^2}}} = \frac{c\beta}{\sqrt{1 + \frac{\beta_r^2}{\beta^2}}}$$

- mit der Materialkonstante

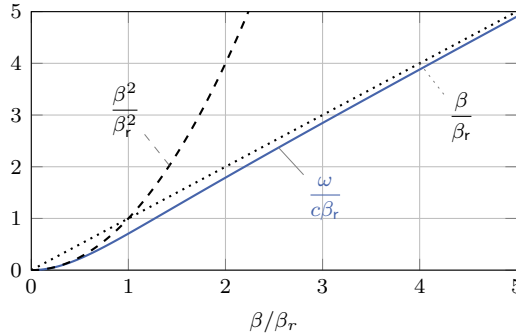
$$\beta_r = \frac{\kappa}{2\varepsilon c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \kappa$$

- Für die Grenzfälle $\beta \ll \beta_r$ bzw. $\beta \gg \beta_r$ vereinfacht sich die Beziehung gemäß

$$\omega(\beta) \approx \begin{cases} c\beta^2/\beta_r & \beta \ll \beta_r \\ c\beta & \beta \gg \beta_r \end{cases}.$$

Dispersionsrelation (II)

- Normierte Darstellung der Dispersionsrelation $\omega(\beta)$ durch $\omega(\beta)/(c\beta_r)$ für ein homogenes Medium mit $\beta_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{\kappa}{2}}$ und $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \leq c_0$
- Gute Leiter: $\frac{\beta}{\beta_r} \ll 1$, nichtleitende Materialien: $\frac{\beta}{\beta_r} \gg 1$



Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung

2. Komplexe Wellenzahl

3. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

4. Was Sie gelernt haben sollten

Phasengeschwindigkeit

- Die Geschwindigkeit, mit der sich bei einer ebenen Welle $\underline{H}_y(z, t) = \underline{H}_y^+ \exp(j(\omega t - \beta z) - \alpha z)$ eine konstante Phase $\omega t - \beta z = \phi_0$ „bewegt“, wird als *Phasengeschwindigkeit* bezeichnet. Sie ergibt sich zu

$$v_{\text{ph}}(\beta) = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega(\beta)}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\beta_r^2}{\beta^2}}}$$

- Wegen $\beta_r \propto \kappa$ gilt in nichtleitenden Medien in der Regel $\beta_r/\beta \ll 1$ und somit $v_{\text{ph}} \approx c$.
- Für gute Leiter hingegen gilt $\beta_r/\beta \gg 1$ und somit $v_{\text{ph}} \approx c\beta/\beta_r$.

Gruppengeschwindigkeit

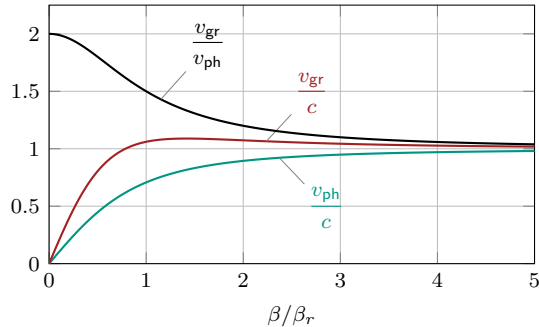
- Für Signale, welche sich aus mehreren Frequenzkomponenten zusammensetzen, breitet sich im Allgemeinen jede Frequenzkomponente mit ihrer eigenen Phasengeschwindigkeit aus. Die Einhüllende (auch Schwebung) dieses Zeitsignals breitet sich mit der *Gruppengeschwindigkeit* aus.
- Diese ergibt sich zu

$$v_{\text{gr}}(\beta) = \frac{d\omega(\beta)}{d\beta} = c \frac{\beta^3 + 2\beta_r^2\beta}{(\beta^2 + \beta_r^2)^{\frac{3}{2}}} = v_{\text{ph}}(\beta) \left(1 + \frac{\beta_r^2}{\beta^2 + \beta_r^2} \right)$$

- Wegen $\beta_r \propto \kappa$ gilt in nichtleitenden Medien in der Regel $\beta_r/\beta \ll 1$ und somit $v_{\text{gr}} \approx v_{\text{ph}} \approx c$.
- Für gute Leiter hingegen gilt $\beta_r/\beta \gg 1$ und somit $v_{\text{gr}} \approx 2v_{\text{ph}}$.

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

- Normierte Darstellungen für ein homogenes Medium mit $\beta_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\kappa}{2}$ und $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \leq c_0$
- Gute Leiter: $\frac{\beta}{\beta_r} \ll 1$, nichtleitende Materialien: $\frac{\beta}{\beta_r} \gg 1$



Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung
2. Komplexe Wellenzahl
3. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit
- 4. Was Sie gelernt haben sollten**

Was Sie gelernt haben sollten

- Was die Unterschiede zwischen dem reellen und komplexen Poynting-Vektor sind.
- Inwiefern der (komplexe) Poynting-Vektor Wirk- und Blindleistung berücksichtigt.
- Wie wir die Phasenkonstante und Dämpfungskonstante aus der komplexen Wellenzahl erhalten haben.
- Welche Bedeutung die Phasenkonstante und Dämpfungskonstante für die Ausbreitung ebener Wellen haben.
- Dass die hergeleitete Dispersionsrelation und die Beziehungen für die Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeit nur für ebene Wellen in homogenen Medien gültig sind.
- Welche Rolle die Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeit spielen und wie sich die Größen unterscheiden.