Vorlesung 06: Hertzscher Dipol

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2021/22

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 3. März 2022

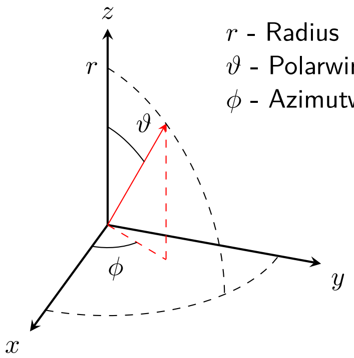
Vorlesungsinhalte

Vorlesungsinhalte

Karlsruher Institut für Technologie

Kugelkoordinaten

- Für die Beschreibung von Kugelwellen eignen sich Kugelkoordinaten.



r - Radius
ϑ - Polarwinkel
ϕ - Azimutwinkel

- In Kugelkoordinaten gibt es - im Gegensatz zu den Zylinderkoordinaten - keine kartesische Koordinate.

Grundoperationen der Vektorrechnung

- Gradient:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi$$

- Divergenz:

$$\nabla\cdot\underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2\underline{A}_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial\sin(\vartheta)\underline{A}_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial\underline{A}_\phi}{\partial\phi}$$

- Kreuzprodukt:

$$\nabla\times\underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial\sin\vartheta\,\underline{A}_\phi}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\underline{A}_\vartheta}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\underline{A}_r}{\partial\phi} - \frac{\partial r\,\underline{A}_\phi}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r\,\underline{A}_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial\underline{A}_r}{\partial\vartheta}\right)\mathbf{e}_\phi$$

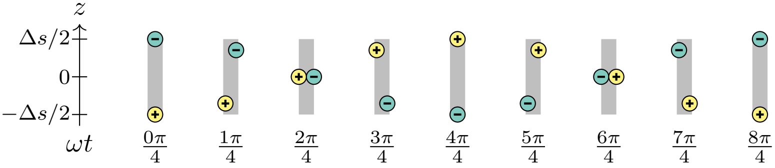
- Laplace Operator:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

Vorlesungsinhalte

Hertzscher Dipol

- Zwei entgegengesetzt geladene Punktladungen $\mp q$ oszillieren entlang der z-Achse um den Nullpunkt.
- Derartig ungleichförmig bewegte Ladungen erzeugen eine elektromagnetische Welle.



- Im Übergang von diskreten Ladungen auf einen kontinuierlichen Ladungsfluss, gilt bei $z = \Delta s/2$ für den komplexen Zeiger der negativen Ladung: $\underline{q}(t) = \underline{q}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}$
- Dies lässt sich überführen in den zeitabhängigen Strom

$$\underline{I}(t) = \frac{\mathrm{d}\underline{q}}{\mathrm{d}t} = \underline{I}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t} \quad \text{mit} \quad \underline{I}_0 = \mathrm{j}\,\omega\,\underline{q}_0$$

- Der Hertzsche Dipol ist ein solches infinitesimal kleines Stromelement der Länge $\Delta s \to 0$ mit einer homogenen und harmonischen Stromverteilung.

Elektrostatisches Potential

- Betrachten wir den elektrische Feldvektor $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ am Punkt $\mathbf{r}$ sehr nahe am Dipol, d.h. im Abstand $r \ll \lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$, so können wir diesen aus dem elektrostatischen Potential ableiten. Im kartesischen Koordinatensystem liegen die Ladungen auf der z-Achse bei $\pm d/2$.
- Das elektrostatische Potential am Ortsvektor $\mathbf{r}$ ist

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q\,\Delta s\,\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}|^3}$$

- In Kugelkoordinaten wird dies mit $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r} = r\cos(\vartheta)$ zu

$$\phi(r, \vartheta) = \frac{q\,\Delta s\,\cos(\vartheta)}{4\pi\varepsilon\,r^2}$$

  wobei r der Abstand vom Beobachtungspunkt zum Ursprung ist und ϑ der Polarwinkel.
- Aufgrund der Rotationssymmetrie ist das elektrostatische Potential unabhängig vom Azimuthalwinkel ϕ.

Elektrisches Feld nahe am Dipol

- Den elektrischen Feldstärkevektor erhalten wir als negativen Gradienten des elektrostatischen Potentials zu

$$\underline{\mathbf{E}}(r,\vartheta)\Big|_{r\ll\lambda} = -\nabla\phi(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\phi_\mathrm{D}}{\partial r} \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_\mathrm{D}}{\partial\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\underline{I}_0\Delta s}{\mathrm{j}\,4\pi\omega\varepsilon r^3}\begin{pmatrix} 2\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_r \\ \underline{E}_\vartheta \\ \underline{E}_\phi \end{pmatrix}$$

- Die ϕ-Komponente des elektrischen Feldes verschwindet also.
- Da sich das elektromagnetische Feld mit endlicher Phasengeschwindigkeit ausbreitet, wird diese Feldverteilung nicht für beliebige Abstände vom Ursprung gültig sein.

Magnetisches Vektorpotential

- Fassen wir den Hertzschen Dipol als stromdurchflossenen Leiter auf, so wird dieser gemäß dem Durchflutungsgesetz von einer magnetischen Feldstärke $\mathbf{H}$ umgeben.
- Dieses H-Feld lässt sich aus dem magnetischen Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \underline{A}_z \mathbf{e}_z$ in Stromrichtung ableiten gemäß

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \underline{\mathbf{A}})$$

- Transformiert in Kugelkoordinaten ergibt das Vektorpotential zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \underline{A}_z \cos(\vartheta)\, \mathbf{e}_r - \underline{A}_z \sin(\vartheta)\, \mathbf{e}_\vartheta$$

- Da die Divergenz eines Wirbelfeldes verschwindet, gilt stets

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{\mathbf{A}}) \equiv 0$$

- Über die Divergenz des Vektorpotentials kann frei verfügt werden (Eichung).

Feldkomponenten und Wellengleichung

- Den elektrischen Feldstärkevektor erhalten wir aus Induktionsgesetz zu

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\,\omega\mu\underline{\mathbf{H}} = -\mathrm{j}\,\omega\,(\nabla \times \underline{\mathbf{A}}) \quad\Longrightarrow\quad \underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\,\omega\underline{\mathbf{A}} - \nabla\phi$$

- Aus dem Durchflutungsgesetz folgt mit $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu}\left[\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{A}})\right] \equiv \frac{1}{\mu}\left[\nabla\,(\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}) - \Delta\underline{\mathbf{A}}\right] = \mathrm{j}\,\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}} = \frac{k^2}{\mu}\underline{\mathbf{A}} - \mathrm{j}\,\omega\varepsilon\nabla\phi$$

- Mit der Eichung

$$\frac{1}{\mu}\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = -\mathrm{j}\,\omega\varepsilon\phi$$

erhalten wir für das magnetische Vektorpotential die Wellengleichung in Form der Helmholtzgleichung

$$\Delta\underline{\mathbf{A}} + k^2\underline{\mathbf{A}} = 0$$

Vorlesungsinhalte

Kugelwellen

- Ausgehend vom Hertzschen Dipol im Koordinatenursprung breiten sich elektromagnetische Kugelwellen aus, welche im Folgenden beschrieben werden sollen.
- Mit dem Laplaceoperator in Kugelkoordinaten und mit $\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_z \mathbf{e}_z$ erhalten wir die skalare Helmholtzgleichung

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \underline{A}_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial \underline{A}_z}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 \underline{A}_z}{\partial \phi^2} + \underline{k}^2\underline{A}_z = 0$$

- Als Lösungsweg wählen wir den Produktansatz von Bernoulli und setzen an, dass

$$\underline{A}_z(r,\vartheta,\phi) = \underline{A}_0\underline{R}(r)\underline{Y}(\vartheta,\phi)$$

- Aus der Helmholtzgleichung erhalten wir dann nach wenigen Schritten

$$\frac{1}{\underline{R}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \underline{R}}{\partial r}\right) + \frac{1}{\underline{Y}}\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial \underline{Y}}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\underline{Y}}\frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 \underline{Y}}{\partial \phi^2} + \underline{k}^2 r^2 = 0\,.$$

Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten

- Mit der Separationskonstanten λ können wir diese Gleichung separieren in die Winkelgleichung

$$\frac{1}{\underline{Y}}\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial\underline{Y}}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\underline{Y}}\frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2\underline{Y}}{\partial\phi^2}+\lambda=0$$

- und in die Radialgleichung

$$\frac{1}{\underline{R}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\underline{R}}{\partial r}\right)+\underline{k}^2r^2-\lambda=0\,.$$

- Die Addition dieser beiden gekoppelten Differentialgleichungen ergibt wieder die Helmholtzgleichung.

Winkelabhängigkeit

Karlsruher Institut für Technologie

- Die Winkelgleichung können wir schreiben als

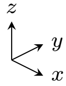
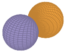
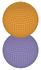
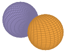
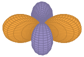
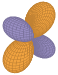
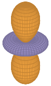
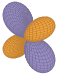
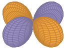
$$\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial \underline{Y}}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2\underline{Y}}{\partial\phi^2}+\lambda\underline{Y}=0$$

- Diese Gleichung ist im Fall $\lambda=\ell(\ell+1)$ für ganzzahlige ℓ lösbar. Ihre Lösungen werden als *Kugelflächenfunktionen* $\underline{Y}_{\ell,m}(\vartheta,\phi)$ bezeichnet mit den Indizes ℓ und $m\in\{-\ell,-\ell+1,\ldots,\ell\}$.

$\underline{Y}_{\ell,m}$	$m=-2$	$m=-1$	$m=0$	$m=+1$	$m=+2$
$\ell=0$			$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$		
$\ell=1$		$\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\phi}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\phi}$	
$\ell=2$	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\vartheta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\phi}$	$\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\phi}$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\vartheta-1)$	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\phi}$	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\vartheta\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\phi}$

Kugelflächenfunktionen

- Der Radius der im Koordinatenursprung zentrierten Körper stellt den Betrag des Realteils der Kugelflächenfunktionen $\underline{Y}_{\ell,m}(\vartheta,\phi)$ dar. Die Farbe steht für das Vorzeichen: + bzw. -.

$\Re\{\underline{Y}_{\ell,m}\}$	$m=-2$	$m=-1$	$m=0$	$m=+1$	$m=+2$
$\ell=0$					
$\ell=1$					
$\ell=2$					

Radiale Abhängigkeit

- Die Radialgleichung können wir mit $\lambda = \ell(\ell+1)$ umformen in

$$r^2 \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \underline{R}}{\partial r} + \left[k^2 r^2 - \ell(\ell+1)\right] \underline{R} = 0\,.$$

- Substituieren wir $\underline{R}(r) = \sqrt{\frac{1}{kr}} f(kr)$, $x = kr$ und $\nu = \ell + \frac{1}{2}$, so erhalten wir

$$x^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \left(x^2 - \nu^2\right) f(x) = 0$$

- Diese Gleichung ist die *Besselsche Differentialgleichung*, deren Lösungen die Zylinderfunktionen $f(x) = \underline{Z}_\nu(x)$ der Ordnung ν sind.
- Wir erhalten also für die radiale Abhängigkeit

$$\underline{R}(r) = \sqrt{\frac{1}{kr}} \underline{Z}_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)$$

Sphärische Hankelfunktionen

- Zylinderfunktionen halbzahliger Ordnung lassen sich als Linearkombination der sphärischen Hankelfunktionen erster und zweiter Art ausdrücken

$$\underline{Z}_{\ell+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{h}_\ell^{(1)}(x) \\ \underline{h}_\ell^{(2)}(x) \end{Bmatrix}$$

- Für die ersten drei Ordnungen lassen sich diese schreiben als:

$$\underline{h}_0^{(1)}(x) = \left[-\frac{\mathrm{j}}{x}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,x} \qquad \underline{h}_0^{(2)}(x) = \left[+\frac{\mathrm{j}}{x}\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,x}$$

$$\underline{h}_1^{(1)}(x) = \left[-\frac{1}{x} - \frac{\mathrm{j}}{x^2}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,x} \qquad \underline{h}_1^{(2)}(x) = \left[-\frac{1}{x} + \frac{\mathrm{j}}{x^2}\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,x}$$

$$\underline{h}_2^{(1)}(x) = \left[+\frac{\mathrm{j}}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{3\,\mathrm{j}}{x^3}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,x} \qquad \underline{h}_2^{(2)}(x) = \left[-\frac{\mathrm{j}}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{3\,\mathrm{j}}{x^3}\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,x}\ .$$

Vektorpotential des Hertzschen Dipols

Karlsruher Institut für Technologie

- Das Vektorpotential eines allgemeinen Dipols kann stets als Linearkombination der durch ℓ und m unterschiedenen Lösungen der Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten ausgedrückt werden, d.h.

$$\underline{\mathbf{A}}(r,\vartheta,\phi,t) = \sum_{m,\ell} \underline{a}_{m,\ell} \sqrt{\frac{1}{kr}} \underline{Z}_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)\, \underline{Y}_{\ell,m}(\vartheta,\phi)\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\,\mathbf{e}_z$$

- Sehr nah am Dipol, für $r \ll \lambda$ muss das elektrische Feld dem des elektrostatischen Dipols entsprechen. Daraus folgt für das Vektorpotential des Hertzschen Dipols dass $m=0$ und $\ell = 0$ sein muss und

$$\underline{Y}(\vartheta,\phi) = \underline{Y}_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \text{und} \quad \underline{R}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} h_0^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathrm{j}}{kr} e^{-\mathrm{j}\,kr} \quad \text{und} \quad \underline{a}_{0,0} = -\mathrm{j}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu \Delta s \underline{I}_0 k}{4\pi}$$

- Daraus erhalten wir bei harmonischer Anregung mit dem Strom $\underline{I}(t) = \underline{I}_0\,\mathrm{e}^{j\omega t}$ mit $\mathbf{e}_z = [\cos(\vartheta)\mathbf{e}_r - \sin(\vartheta)\mathbf{e}_\vartheta]$ für den komplexen Zeiger des magnetischen Vektorpotentials

$$\underline{\mathbf{A}}(r,\vartheta,t) = \frac{\mu \Delta s \underline{I}_0 k}{4\pi} \frac{1}{kr}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kr)}\,[\cos(\vartheta)\mathbf{e}_r - \sin(\vartheta)\mathbf{e}_\vartheta]$$

Feldkomponenten des Hertzschen Dipols (I)

- Für das H-Feld erhalten wir gemäß der Definition des magnetischen Vektorpotentials

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \underline{\mathbf{A}}) = \frac{1}{\mu}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r\,\underline{A}_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta}\right)\mathbf{e}_\phi = \underline{H}_\phi\,\mathbf{e}_\phi$$

- Für das E-Feld folgt aus dem Durchflutungsgesetz

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\varepsilon}(\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\varepsilon}\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta\,\underline{H}_\phi}{\partial \vartheta}\,\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial r\,\underline{H}_\phi}{\partial r}\,\mathbf{e}_\vartheta\right)$$

- Die nichtverschwindenden Feldkomponenten des Hertzschen Dipols werden also zu

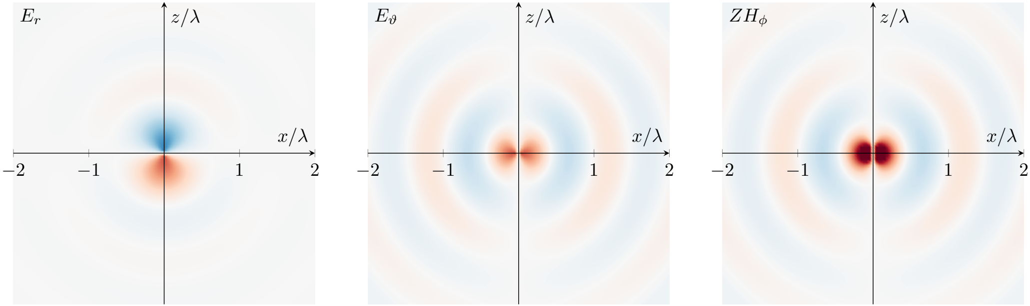
$$\underline{E}_r = \frac{\underline{I}_0 \Delta s\, k^3}{4\pi\omega\varepsilon} 2\left(\frac{1}{k^2r^2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{k^3r^3}\right)\cos(\vartheta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kr)}$$

$$\underline{E}_\vartheta = \frac{\underline{I}_0 \Delta s\, k^3}{4\pi\omega\varepsilon}\left(\mathrm{j}\,\frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2r^2} - \mathrm{j}\,\frac{1}{k^3r^3}\right)\sin(\vartheta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kr)}$$

$$\underline{H}_\phi = \frac{\underline{I}_0 \Delta s\, k^3}{4\pi\omega\varepsilon}\frac{1}{Z}\left(\mathrm{j}\,\frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2r^2}\right)\sin(\vartheta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kr)}$$

Feldkomponenten des Hertzschen Dipols (II)

- Die Abbildungen[1] zeigen die normierten nichtverschwindenden Feldkomponenten (den Realteil des komplexen Zeigers $\underline{\mathbf{E}}$ bzw. $\underline{\mathbf{H}}$) in einer Ebene $y = 0$ bzw. $\phi = \mathrm{const}$ für $t = \frac{n\pi}{4\omega}, n \in \{0, 1, \ldots, 7\}$. Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.



[1] Die Animation funktioniert im Acrobat Reader (nicht auf Mobilgeräten), KDE Okular, PDF-XChange und Foxit Reader.

Nahfeld des Hertzschen Dipols

- Sehr nah am Hertzschen Dipol, d.h. für $r \ll 2\pi/k = \lambda$ spielen in der Klammer jeweils nur die Terme mit dem höchsten Exponenten im Nenner eine Rolle und $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kr} \approx 1$ und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\underline{E}_r &\approx -\mathrm{j}\,2\frac{1}{\omega\varepsilon}\frac{\underline{I}_0\Delta s}{4\pi}\frac{1}{r^3}\cos(\vartheta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\\
\underline{E}_\vartheta &\approx -\mathrm{j}\,\frac{1}{\omega\varepsilon}\frac{\underline{I}_0\Delta s}{4\pi}\frac{1}{r^3}\sin(\vartheta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\\
\underline{H}_\phi &\approx \frac{\underline{I}_0\Delta s}{4\pi}\frac{1}{r^2}\sin(\vartheta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}
\end{aligned}
$$

- Dabei entspricht das E-Feld dem des elektrostatischen Dipols bei harmonischer Zeitabhängigkeit.
- Für größere Abstände r ändert sich die Feldverteilung aufgrund der endlichen Phasengeschwindigkeit.
- Das E-Feld und das H-Feld haben einen Phasenunterschied von $90°$; es wird also primär Blindleistung transportiert.

Fernfeld des Hertzschen Dipols

- Weit weg vom Hertzschen Dipol, d.h. für $r \gg 2\pi/k = \lambda$ spielen in der Klammer jeweils nur die Terme proportional $1/r$ eine Rolle und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\underline{E}_r &\approx 0 \\
\underline{E}_\vartheta &\approx \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega\varepsilon}\,\frac{\underline{I}_0 \Delta s}{4\pi}\,\frac{k^2}{r}\,\sin(\vartheta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kr)} \\
\underline{H}_\phi &\approx \mathrm{j}\,\frac{\underline{I}_0 \Delta s}{4\pi}\,\frac{k}{r}\,\sin(\vartheta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kr)}
\end{aligned}
$$

- Das Fernfeld hat den Charakter einer ebenen Welle in r-Richtung. Es gilt $\frac{\underline{E}_\vartheta}{\underline{H}_\phi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z$.
- Dies resultiert in dem komplexen Poynting Vektor

$$
\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*\right) = \frac{1}{2}\underline{E}_\vartheta \underline{H}_\phi^*\,\mathbf{e}_r = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\omega\varepsilon}\left(\frac{\underline{I}_0 \Delta s}{4\pi}\right)^2 \frac{k^3}{r^2}\,\sin^2(\vartheta)\,\mathbf{e}_r
$$

- Dieser ist rein reell; es findet somit ein reiner Wirkleistungstransport statt.

Vorlesungsinhalte

Was Sie gelernt haben sollten

- Welches physikalische Modell dem Hertzschen Dipol zugrunde liegt und dessen Bedeutung für die Erzeugung elektromagnetischer Wellen.
- Dass wir das magnetische Vektorpotential verwenden, um die Maxwellschen Gleichungen zu entkoppeln.
- Welche Bedeutung Kugelwellen für die Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten haben.
- Welche Rolle die durch ℓ bzw. m unterschiedenen Lösungen der Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten für die Darstellung des Vektorpotentials eines allgemeinen Dipols spielen.
- Weshalb im Nah- bzw. Fernfeld des Hertzschen Dipols primär ein Blind- bzw. Wirkleistungstransport stattfindet.

Vorlesungsinhalte

Definition der Kugelflächenfunktionen

- Die Kugelflächenfunktionen $\underline{Y}_{\ell,m}(\vartheta,\phi)$ sind definiert durch

$$\underline{Y}_{\ell,m}(\vartheta,\phi) = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,m\phi}\,\sin^m(\vartheta)\frac{\mathrm{d}^{\ell+m}\left(\sin^{2\ell}(\vartheta)\right)}{\mathrm{d}\cos^{\ell+m}(\vartheta)}\,.$$

- Weitere Details zu den Kugelflächenfunktionen finden Sie z.B. in Kapitel 14 der NIST Digital Library of Mathematical Functions `https://dlmf.nist.gov/`.