Karlsruher Institut für Technologie

Vorlesung 07: Ebene Wellen an Grenzflächen

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2021/22

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 24. November 2021

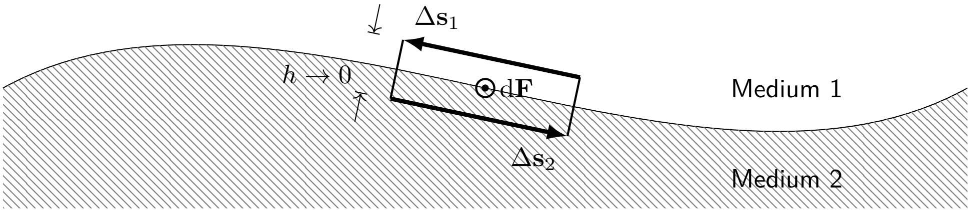
Vorlesungsinhalte

Vorlesungsinhalte

Einführung

- Bislang haben wir stets die Ausbreitung von Wellen in homogenen Medien betrachtet.
- Allerdings ist es etwa für die Datenübertragung von großem Interesse, die Ausbreitungsrichtung elektromagnetischer Wellen vorzugeben.
- In diesem Fall verwenden wir anwendungsspezifisch entworfene inhomogene Medien, sogenannte Wellenleiter.
- Möchten wir verstehen wie und weshalb die Führung von Wellen durch solche Wellenleiter möglich ist, müssen wir zunächst ihr Verhalten an Materialgrenzflächen (welche in inhomogenen Medien unvermeidlich sind) untersuchen.

Stetigkeit der tangentialen Feldkomponenten



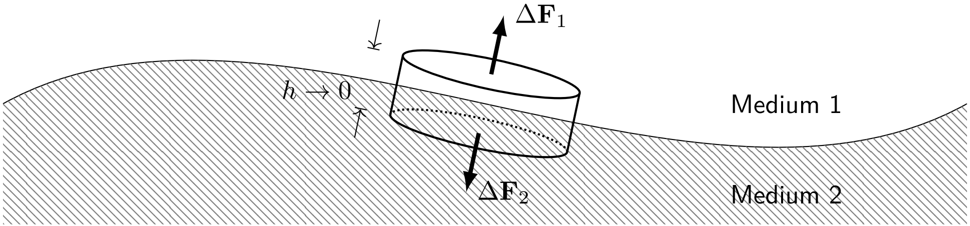
- Wegen $h \to 0$ verschwinden die Verschiebungsstromdichte und der magnetische Fluss aufgrund der Stetigkeit. Es folgt mit der obigen Abbildung aus dem Durchflutungs- bzw. Induktionsgesetz, dass

$$\oint_s \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = \int_F \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = i'\Delta s \quad \Longrightarrow \quad H_{\mathrm{t},1} - H_{\mathrm{t},2} = i'$$

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_{\mathrm{t},1} - E_{\mathrm{t},2} = 0$$

- Hierbei sind $H_{\mathrm{t},1}$, $E_{\mathrm{t},1}$ und $H_{\mathrm{t},2}$, $E_{\mathrm{t},2}$ die tangentialen Feldkomponenten an der Grenzfläche in Medium 1 bzw. Medium 2 und i' bezeichnet einen möglichen Oberflächenstrom (bzw. Strombelag).

Stetigkeit der normalen Feldkomponenten



- Mit der obigen Abbildung und dem Gaußschen Gesetz sowie der Quellenfreiheit des Magnetfeldes gilt

$$\oint_O \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{D}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = \int_V \rho \,\mathrm{d}V = \sigma \Delta F \implies D_{\mathsf{n},1} - D_{\mathsf{n},2} = \sigma$$

$$\oint_O \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{B}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = 0 \implies B_{\mathsf{n},1} - B_{\mathsf{n},2} = 0$$

- Hierbei sind $D_{\mathsf{n},1}$, $B_{\mathsf{n},1}$ und $D_{\mathsf{n},2}$, $B_{\mathsf{n},2}$ die normalen Feldkomponenten an der Grenzfläche in Medium 1 bzw. Medium 2 und σ bezeichnet eine mögliche Flächenladungsdichte.

Randbedingungen

- Ist Medium 2 ideal leitend (d.h. Leitfähigkeit $\kappa \to \infty$ bzw. Relaxationszeit $T_\mathsf{r} \to 0$), so verschwinden die Felder und die zuvor beschriebenen Stetigkeitsbedingungen werden zu

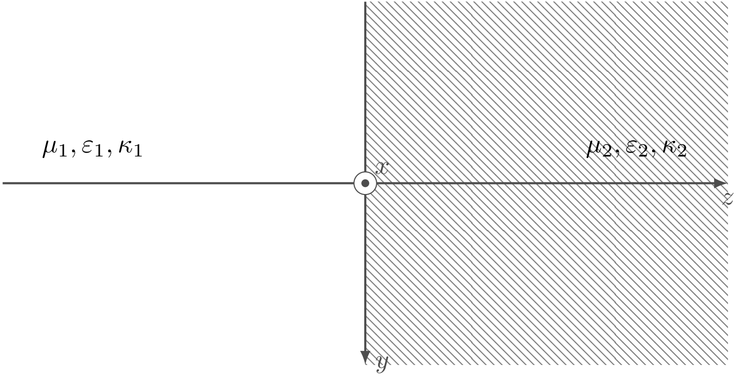
$$H_{\mathsf{t},1} = i' \,, \qquad E_{\mathsf{t},1} = 0 \,, \qquad D_{\mathsf{n},1} = \sigma \,, \qquad B_{\mathsf{n},1} = 0$$

- In diesem Fall werden die Stetigkeitsbedingungen auch als Randbedingungen bezeichnet.

Vorlesungsinhalte

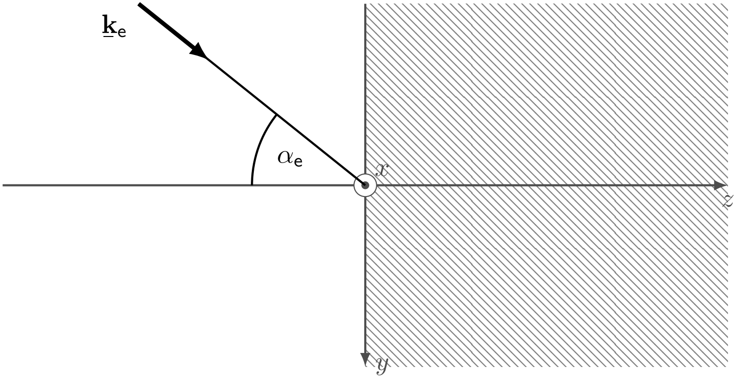
Reflexion und Brechung

- Betrachtet werde eine einfallende Welle (e), welche sich an einer in der xy-Ebene liegenden Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien in eine reflektierte Welle (r) und eine transmittierte Welle (t) aufteilt.



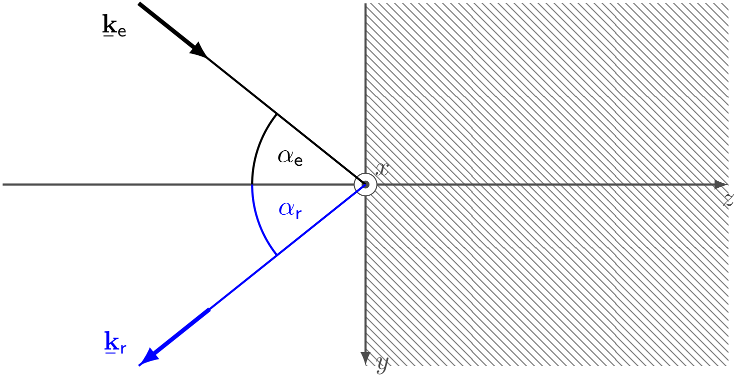
Reflexion und Brechung

- Betrachtet werde eine einfallende Welle (e), welche sich an einer in der xy-Ebene liegenden Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien in eine reflektierte Welle (r) und eine transmittierte Welle (t) aufteilt.



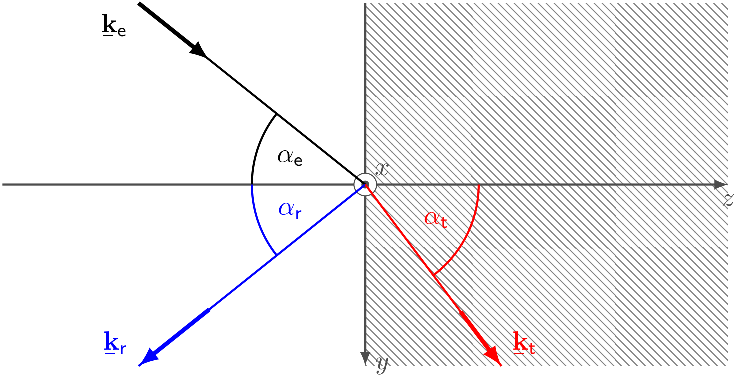
Reflexion und Brechung

- Betrachtet werde eine einfallende Welle (e), welche sich an einer in der xy-Ebene liegenden Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien in eine reflektierte Welle (r) und eine transmittierte Welle (t) aufteilt.



Reflexion und Brechung

- Betrachtet werde eine einfallende Welle (e), welche sich an einer in der xy-Ebene liegenden Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien in eine reflektierte Welle (r) und eine transmittierte Welle (t) aufteilt.



Ebene Wellen

- Wir nehmen an, dass beide Medien frei von Raumladungen sind $(\rho = 0)$ und dass es sich bei allen drei Wellen um ebene Wellen handelt. In komplexer Zeigerschreibweise haben diese somit die Form

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathsf{e}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,\mathsf{e}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_\mathsf{e} t - \underline{\mathbf{k}}_\mathsf{e}\mathbf{r})} \qquad \underline{\mathbf{H}}_\mathsf{e}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\underline{Z}_1}\left[\mathbf{e}_{k,\mathsf{e}} \times \underline{\mathbf{E}}_\mathsf{e}(\mathbf{r},t)\right]$$

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathsf{r}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,\mathsf{r}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_\mathsf{r} t - \underline{\mathbf{k}}_\mathsf{r}\mathbf{r})} \qquad \underline{\mathbf{H}}_\mathsf{r}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\underline{Z}_1}\left[\mathbf{e}_{k,\mathsf{r}} \times \underline{\mathbf{E}}_\mathsf{r}(\mathbf{r},t)\right]$$

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathsf{t}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,\mathsf{t}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_\mathsf{t} t - \underline{\mathbf{k}}_\mathsf{t}\mathbf{r})} \qquad \underline{\mathbf{H}}_\mathsf{t}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\underline{Z}_2}\left[\mathbf{e}_{k,\mathsf{t}} \times \underline{\mathbf{E}}_\mathsf{t}(\mathbf{r},t)\right]$$

- Dabei ist die einfallende Welle durch ihren Amplitudenvektor $\underline{\mathbf{E}}_{0,\mathsf{e}}$, ihre Kreisfrequenz ω_e und ihren Wellenvektor $\underline{\mathbf{k}}_\mathsf{e} = \underline{k}_1\,\mathbf{e}_{k,\mathsf{e}}$ mit Ausbreitungsrichtung $\mathbf{e}_{k,\mathsf{e}}$ gegeben.
- Im Folgenden wollen wir die entsprechenden Größen der reflektierten und der transmittierten Welle herleiten.

Wellenvektoren in der Einfallsebene

Karlsruher Institut für Technologie

- Bei gegebener Kreisfrequenz ω sind die Medien charakterisiert durch ihre komplexe Wellenzahl $\underline{k} = \pm\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon\left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)}$ bzw. den komplexen Wellenwiderstand $\underline{Z} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon\left(1-\mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)}}$
- Die jeweilige Ausbreitungsrichtung ist gegeben durch die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_{k,\mathsf{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathsf{e}) \\ \cos(\alpha_\mathsf{e}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{k,\mathsf{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathsf{r}) \\ -\cos(\alpha_\mathsf{r}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{k,\mathsf{t}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathsf{t}) \\ \cos(\alpha_\mathsf{t}) \end{pmatrix}.$$

- Die Wellenvektoren ergeben sich somit zu

$$\underline{\mathbf{k}}_\mathsf{e} = \underline{k}_1\mathbf{e}_{k,\mathsf{e}}\,, \quad \underline{\mathbf{k}}_\mathsf{r} = \underline{k}_1\mathbf{e}_{k,\mathsf{r}} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{k}}_\mathsf{t} = \underline{k}_2\mathbf{e}_{k,\mathsf{t}}$$

- Die *Einfallsebene* ist die Ebene, in der die drei Wellenvektoren $\underline{\mathbf{k}}_\mathsf{e}$, $\underline{\mathbf{k}}_\mathsf{r}$ und $\underline{\mathbf{k}}_\mathsf{t}$ liegen (hier yz-Ebene).

Stetigkeitsbedingungen

- An allen Punkten $\mathbf{r}_0 = (x,\, y,\, 0)$ auf der Grenzfläche in der xy-Ebene müssen die Stetigkeitsbedingungen zu jeder Zeit erfüllt sein.
- Für die tangentialen Feldkomponenten ergeben sich somit *in Abwesenheit von Oberflächenströmen* (d.h. $i' = 0$) die Beziehungen

$$[\underline{\mathbf{E}}_\mathsf{e}(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{E}}_\mathsf{r}(\mathbf{r}_0, t)] \times \mathbf{e}_z = \underline{\mathbf{E}}_\mathsf{t}(\mathbf{r}_0, t) \times \mathbf{e}_z$$
$$[\underline{\mathbf{H}}_\mathsf{e}(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{H}}_\mathsf{r}(\mathbf{r}_0, t)] \times \mathbf{e}_z = \underline{\mathbf{H}}_\mathsf{t}(\mathbf{r}_0, t) \times \mathbf{e}_z$$

- Für die normalen Feldkomponenten folgt *für den Fall verschwindender Oberflächenladungsdichten* (d.h. $\sigma = 0$), dass

$$\varepsilon_1 \, [\underline{\mathbf{E}}_\mathsf{e}(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{E}}_\mathsf{r}(\mathbf{r}_0, t)] \cdot \mathbf{e}_z = \varepsilon_2 \underline{\mathbf{E}}_\mathsf{t}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{e}_z$$
$$\mu_1 \, [\underline{\mathbf{H}}_\mathsf{e}(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{H}}_\mathsf{r}(\mathbf{r}_0, t)] \cdot \mathbf{e}_z = \mu_2 \underline{\mathbf{H}}_\mathsf{t}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{e}_z$$

Reflexionsgesetz

- Damit diese Stetigkeitsbedingungen zu jeder Zeit und an jedem Punkt auf der Grenzfläche erfüllt sein können, müssen zunächst einmal alle drei Exponentialterme identisch sein.
- Dies bedeutet einerseits, dass

$$\omega_\mathsf{e} = \omega_\mathsf{r} = \omega_\mathsf{t} = \omega,$$

und andererseits, dass

$$\underline{\mathbf{k}}_\mathsf{e} \cdot \mathbf{r}_0 = \underline{\mathbf{k}}_\mathsf{r} \cdot \mathbf{r}_0 = \underline{\mathbf{k}}_\mathsf{t} \cdot \mathbf{r}_0.$$

- Aus der Bedingung $\underline{\mathbf{k}}_\mathsf{e} \cdot \mathbf{r}_0 = \underline{\mathbf{k}}_\mathsf{r} \cdot \mathbf{r}_0$ folgt

$$\underline{k}_1 \sin(\alpha_\mathsf{e}) y = \underline{k}_1 \sin(\alpha_\mathsf{r}) y$$

und somit das *Reflexionsgesetz* („Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“)

$$\alpha_\mathsf{e} = \alpha_\mathsf{r}$$

Snelliussches Brechungsgesetz

Karlsruher Institut für Technologie

- Aus der Bedingung $\underline{\mathbf{k}}_\mathsf{r} \cdot \mathbf{r}_0 = \underline{\mathbf{k}}_\mathsf{t} \cdot \mathbf{r}_0$ und mit $\alpha_1 = \alpha_\mathsf{e} = \alpha_\mathsf{r}$ und $\alpha_2 = \alpha_\mathsf{t}$ folgt $\underline{k}_1 \sin(\alpha_1) y = \underline{k}_2 \sin(\alpha_2) y$ bzw. das *Snelliussche Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}$$

- Sofern α_1 und α_2 reellwertige Winkel aus dem Intervall $[0, \pi/2]$ sind, lässt sich das *Brechungsgesetz* nur anwenden, wenn das Verhältnis $\underline{k}_2/\underline{k}_1$ reellwertig ist.
- Ferner muss in diesem Fall gelten, dass

$$\sin(\alpha_1) = \frac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1} \sin(\alpha_2) \in [-1, 1] \qquad \text{und} \qquad \sin(\alpha_2) = \frac{\underline{k}_1}{\underline{k}_2} \sin(\alpha_1) \in [-1, 1]$$

- Wird allerdings die Definition der Sinusfunktion auf komplexwertige Argumente $\underline{\gamma} = \gamma_\mathsf{re} + \mathrm{j}\,\gamma_\mathsf{im}$ erweitert, gemäß $\sin(\underline{\gamma}) = \frac{1}{\mathrm{j}\,2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\underline{\gamma}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\underline{\gamma}}\right) = \sin(\gamma_\mathsf{re})\cosh(\gamma_\mathsf{im}) + \mathrm{j}\cos(\gamma_\mathsf{re})\sinh(\gamma_\mathsf{im})$, so lässt sich das *Brechungsgesetz* auch auf den Fall beliebiger komplexer Wellenzahlen $\underline{k}_1$ und $\underline{k}_2$ anwenden.

Senkrechte und parallele Polarisation (I)

- Um die Amplituden der reflektierten und der transmittierten Welle zu bestimmen, werden diese zunächst in zwei orthogonale Polarisationskomponenten aufgeteilt

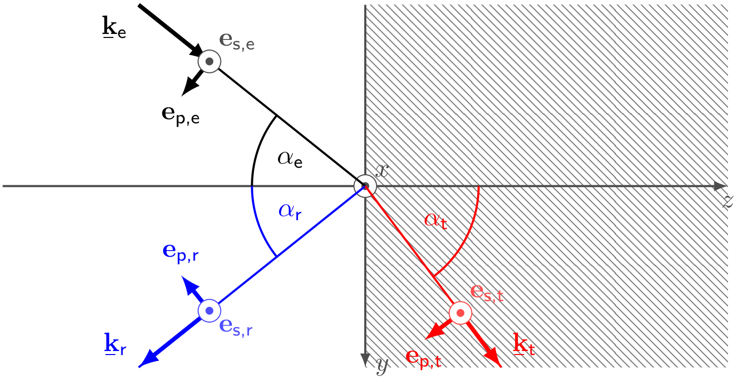
$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{e}(\mathbf{r},t) = \left[\underline{E}_{0,\mathrm{e}}^{(s)}\mathbf{e}_{\mathrm{s,e}} + \underline{E}_{0,\mathrm{e}}^{(p)}\mathbf{e}_{\mathrm{p,e}}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{e}\mathbf{r})}$$
$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}(\mathbf{r},t) = \left[\underline{E}_{0,\mathrm{r}}^{(s)}\mathbf{e}_{\mathrm{s,r}} + \underline{E}_{0,\mathrm{r}}^{(p)}\mathbf{e}_{\mathrm{p,r}}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{r}\mathbf{r})}$$
$$\underline{\mathbf{E}}_\mathrm{r}(\mathbf{r},t) = \left[\underline{E}_{0,\mathrm{t}}^{(s)}\mathbf{e}_{\mathrm{s,t}} + \underline{E}_{0,\mathrm{t}}^{(p)}\mathbf{e}_{\mathrm{p,t}}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{t}\mathbf{r})}$$

- Dies ist zum einen die *senkrechte* (s) Polarisationskomponente in x-Richtung ($\mathbf{e}_{\mathrm{s},i} = \mathbf{e}_x$) und zum anderen die *parallele* (p) Polarisationskomponente in Richtung der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{\mathrm{p},i}$ wobei $i \in \{\mathrm{e,r,t}\}$. Diese beiden ergeben mit der Richtung des Wellenvektors ein Rechtsschraubensystem, d.h.

$$\mathbf{e}_{k,i} \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_{\mathrm{p},i}$$

Senkrechte und parallele Polarisation (II)

- Die drei Vektoren lassen sich stets - relativ zur Einfallsebene - in senkrechte und parallele Polarisationsanteile aufspalten.



Senkrechte und parallele Polarisation (III)

- Für die hier betrachteten ebenen Wellen erhalten wir somit

$$\mathbf{e}_{\mathsf{p},e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha_1) \\ -\sin(\alpha_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\mathsf{p},r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha_1) \\ -\sin(\alpha_1) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{\mathsf{p},t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha_2) \\ -\sin(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

- Die magnetischen Felder ergeben sich zu

$$\underline{\mathbf{H}}_{\mathsf{e}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\underline{Z}_1}\left[\underline{E}_{0,\mathsf{e}}^{(s)}\mathbf{e}_{\mathsf{p,e}} - \underline{E}_{0,\mathsf{e}}^{(p)}\mathbf{e}_{\mathsf{s,e}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\underline{\mathbf{k}}_{\mathsf{e}}\mathbf{r})}$$
$$\underline{\mathbf{H}}_{\mathsf{r}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\underline{Z}_1}\left[\underline{E}_{0,\mathsf{r}}^{(s)}\mathbf{e}_{\mathsf{p,r}} - \underline{E}_{0,\mathsf{r}}^{(p)}\mathbf{e}_{\mathsf{s,r}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\underline{\mathbf{k}}_{\mathsf{r}}\mathbf{r})}$$
$$\underline{\mathbf{H}}_{\mathsf{t}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\underline{Z}_2}\left[\underline{E}_{0,\mathsf{t}}^{(s)}\mathbf{e}_{\mathsf{p,t}} - \underline{E}_{0,\mathsf{t}}^{(p)}\mathbf{e}_{\mathsf{s,t}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\underline{\mathbf{k}}_{\mathsf{t}}\mathbf{r})}$$

Vorlesungsinhalte

1. Rand- und Stetigkeitsbedingungen

2. Reflexion und Brechung ebener Wellen

3. **Fresnelsche Formeln**

4. Was Sie gelernt haben sollten

Senkrechte Polarisation (I)

- Durch das Reflexionsgesetz und das Snelliussche Brechungsgesetz ist bereits sichergestellt, dass die zeitliche und die räumliche Abhängigkeit der drei ebenen Wellen auf der Grenzfläche identisch ist.
- Betrachten wir zunächst die senkrechte Polarisation, so muss gelten

$$\underline{E}_{x,0,\mathrm{e}} + \underline{E}_{x,0,\mathrm{r}} = \underline{E}_{x,0,\mathrm{t}}, \quad \text{und} \quad \underline{H}_{y,0,\mathrm{e}} + \underline{H}_{y,0,\mathrm{r}} = \underline{H}_{y,0,\mathrm{t}}$$

- Da das senkrecht polarisierte elektrische Feld nur eine x-Komponente hat gilt also

$$\underline{E}_{0,\mathrm{e}}^{(\mathrm{s})} + \underline{E}_{0,\mathrm{r}}^{(\mathrm{s})} = \underline{E}_{0,\mathrm{t}}^{(\mathrm{s})}$$

Senkrechte Polarisation (II)

- Die tangentialen Komponenten des mit dem senkrecht polarisierten elektrischen Feld verkoppelten magnetischen Feldes ergeben sich aus der Projektion

$$\underline{H}_{y,0,\mathrm{e}} = \frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{E}_{0,\mathrm{e}}^{(s)}\mathbf{e}_{\mathrm{p,e}} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{1}{\underline{Z}_1}\cos(\alpha_1)\underline{E}_{0,\mathrm{e}}^{(s)}$$

$$\underline{H}_{y,0,\mathrm{r}} = \frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{E}_{0,\mathrm{r}}^{(s)}\mathbf{e}_{\mathrm{p,r}} \cdot \mathbf{e}_y = -\frac{1}{\underline{Z}_1}\cos(\alpha_1)\underline{E}_{0,\mathrm{r}}^{(s)}$$

$$\underline{H}_{y,0,\mathrm{t}} = \frac{1}{\underline{Z}_2}\underline{E}_{0,\mathrm{t}}^{(s)}\mathbf{e}_{\mathrm{p,t}} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{1}{\underline{Z}_2}\cos(\alpha_2)\underline{E}_{0,\mathrm{t}}^{(s)}$$

- Aus der Stetigkeitsbedingung erhalten wir also

$$\frac{1}{\underline{Z}_1}\cos(\alpha_1)\underline{E}_{0,\mathrm{e}}^{(\mathrm{s})} - \frac{1}{\underline{Z}_1}\cos(\alpha_1)\underline{E}_{0,\mathrm{r}}^{(\mathrm{s})} = \frac{1}{\underline{Z}_2}\cos(\alpha_2)\underline{E}_{0,\mathrm{t}}^{(\mathrm{s})}$$

Senkrechte Polarisation (III)

Karlsruher Institut für Technologie

- Wir definieren den *Reflexionsfaktor* $\underline{r}_\mathsf{s}$ und den *Transmissionsfaktor* $\underline{t}_\mathsf{s}$ (für senkrechte Polarisation) als

$$\underline{r}_\mathsf{s} = \frac{\underline{E}_{0,\mathsf{r}}^{(\mathsf{s})}}{\underline{E}_{0,\mathsf{e}}^{(\mathsf{s})}} \quad \text{und} \quad \underline{t}_\mathsf{s} = \frac{\underline{E}_{0,\mathsf{t}}^{(\mathsf{s})}}{\underline{E}_{0,\mathsf{e}}^{(\mathsf{s})}}$$

- So erhalten wir aus den obigen Gleichungen

$$1 + \underline{r}_\mathsf{s} = \underline{t}_\mathsf{s} \quad \text{und} \quad \underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)(1 - r_\mathsf{s}) = \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2) t_\mathsf{s}$$

- Nach gegenseitigem Einsetzen wird daraus

$$\underline{r}_\mathsf{s} = \frac{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) - \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)} \quad \text{und} \quad \underline{t}_\mathsf{s} = \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)}$$

Parallele Polarisation (I)

- Betrachten wir parallele Polarisation, so lauten die Stetigkeitsbedingungen

$$\underline{E}_{y,0,\mathsf{e}} + \underline{E}_{y,0,\mathsf{r}} = \underline{E}_{y,0,\mathsf{t}} \quad \text{und} \quad \underline{H}_{x,0,\mathsf{e}} + \underline{H}_{x,0,\mathsf{r}} = \underline{H}_{x,0,\mathsf{t}}$$

- Hierfür müssen wir nun das elektrische Feld auf die Grenzfläche projizieren, gemäß

$$\begin{aligned}
\underline{E}_{y,0,\mathsf{e}} &= \underline{E}_{0,\mathsf{e}}^{(p)} \mathbf{e}_{\mathsf{p,e}} \cdot \mathbf{e}_y = \underline{E}_{0,\mathsf{e}}^{(p)} \cos(\alpha_1) \\
\underline{E}_{y,0,\mathsf{r}} &= \underline{E}_{0,\mathsf{r}}^{(p)} \mathbf{e}_{\mathsf{p,r}} \cdot \mathbf{e}_y = -\underline{E}_{0,\mathsf{r}}^{(p)} \cos(\alpha_1) \\
\underline{E}_{y,0,\mathsf{t}} &= \underline{E}_{0,\mathsf{t}}^{(p)} \mathbf{e}_{\mathsf{p,t}} \cdot \mathbf{e}_y = \underline{E}_{0,\mathsf{t}}^{(p)} \cos(\alpha_2)
\end{aligned}$$

- Es folgt also

$$\underline{E}_{0,\mathsf{e}}^{(p)} \cos(\alpha_1) - \underline{E}_{0,\mathsf{r}}^{(p)} \cos(\alpha_1) = \underline{E}_{0,\mathsf{t}}^{(p)} \cos(\alpha_2)$$

Parallele Polarisation (II)

- Für die entsprechenden Komponenten des magnetischen Feldes gilt

$$\underline{H}_{x,0,\mathrm{e}} = -\frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{E}^{(p)}_{0,\mathrm{e}}$$

$$\underline{H}_{x,0,\mathrm{r}} = -\frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{E}^{(p)}_{0,\mathrm{r}}$$

$$\underline{H}_{x,0,\mathrm{t}} = -\frac{1}{\underline{Z}_2}\underline{E}^{(p)}_{0,\mathrm{t}}$$

- Es folgt also

$$\frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{E}^{(p)}_{0,\mathrm{e}} + \frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{E}^{(p)}_{0,\mathrm{r}} = \frac{1}{\underline{Z}_2}\underline{E}^{(p)}_{0,\mathrm{t}}$$

Parallele Polarisation (III)

- Wir definieren den *Reflexionsfaktor* $\underline{r}_\mathsf{p}$ und den *Transmissionsfaktor* $\underline{t}_\mathsf{p}$ (für parallele Polarisation) als

$$\underline{r}_\mathsf{p} = \frac{\underline{E}_{0,\mathsf{r}}^{(\mathsf{p})}}{\underline{E}_{0,\mathsf{e}}^{(\mathsf{p})}} \quad \text{und} \quad \underline{t}_\mathsf{p} = \frac{\underline{E}_{0,\mathsf{t}}^{(\mathsf{p})}}{\underline{E}_{0,\mathsf{e}}^{(\mathsf{p})}}$$

- Damit erhalten wir aus den obigen Gleichungen

$$(1 - \underline{r}_\mathsf{p}) \cos(\alpha_1) = \underline{t}_\mathsf{p} \cos(\alpha_2) \quad \text{und} \quad (1 + r_\mathsf{p}) = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} t_\mathsf{p}$$

- Nach gegenseitigem Einsetzen folgt daraus

$$\underline{r}_\mathsf{p} = \frac{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) - \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)} \quad \text{und} \quad \underline{t}_\mathsf{p} = \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)} \,.$$

Fresnelsche Formeln

- Nichtleitende Medien ($\kappa = 0$) werden häufig durch ihren Brechungsindex $n = \sqrt{\mu_\mathsf{r}\varepsilon_\mathsf{r}}$ charakterisiert. Es gilt

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0\sqrt{\frac{\mu_\mathsf{r}}{\varepsilon_\mathsf{r}}} = \frac{Z_0\mu_\mathsf{r}}{n}$$

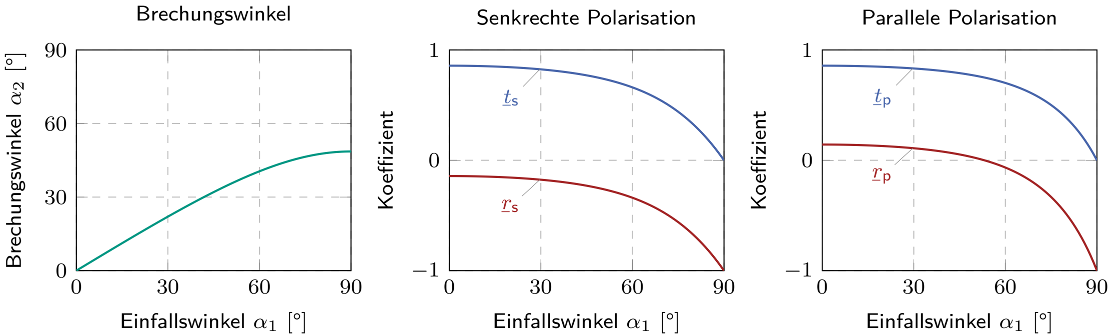
- Sind nun beide Medien nichtleitend und gelte ferner $\mu_1 = \mu_2$, so lassen sich die Reflexions- und Transmissionsfaktoren schreiben als

$$\underline{r}_\mathsf{s} = \frac{n_1\cos(\alpha_1) - n_2\cos(\alpha_2)}{n_1\cos(\alpha_1) + n_2\cos(\alpha_2)} \qquad \underline{r}_\mathsf{p} = \frac{n_2\cos(\alpha_1) - n_1\cos(\alpha_2)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{t}_\mathsf{s} = \frac{2n_1\cos(\alpha_1)}{n_1\cos(\alpha_1) + n_2\cos(\alpha_2)} \qquad \underline{t}_\mathsf{p} = \frac{2n_1\cos(\alpha_1)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)}$$

Fresnelsche Formeln: Beispiel A

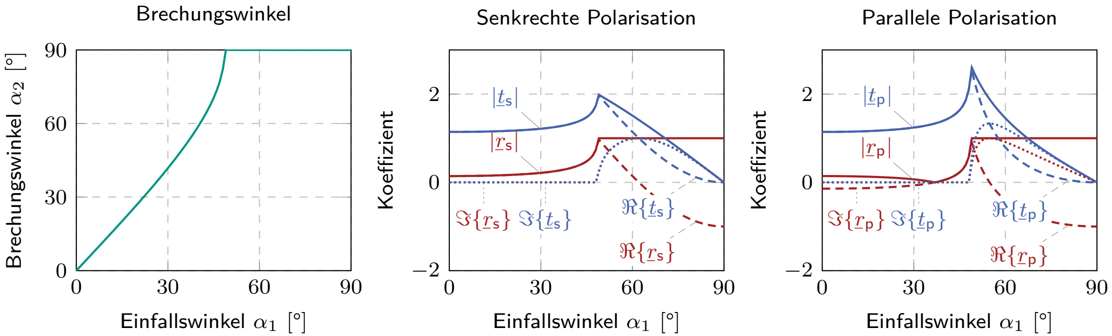
- Für den Übergang von einem Medium mit $n_1 = 1$ (d.h. Vakuum) in ein Medium mit $n_2 = 1{,}333$ ergibt sich aus dem Brechungsgesetz und den Fresnelschen Formeln folgendes Verhalten:



- Beachte, dass $\alpha_2 < \alpha_1$ gilt und alle Koeffizienten reellwertig sind. Bei paralleler Polarisation ändert sich das Vorzeichen des Reflexionskoeffizienten.

Fresnelsche Formeln: Beispiel B

- Für den Übergang von einem Medium mit $n_1 = 1{,}333$ in ein Medium mit $n_2 = 1$ ergibt sich:



- Beachte, dass $\alpha_2 > \alpha_1$ gilt. Ab einem Grenzwinkel werden die Koeffizienten komplex. Bei paralleler Polarisation ändert sich das Vorzeichen des Reflexionskoeffizienten. Der Realteil des Transmissionskoeffizienten kann Werte größer Eins annehmen.

Grenzwinkel der Totalreflexion

- Beim Übergang von einem Medium mit höherem Brechungsindex (optisch dichter) zu einem Medium mit geringerem Brechungsindex (optisch dünner), kann - in Abhängigkeit von dem Einfallswinkel gegenüber der Grenzflächennormalen α_1 - Totalreflexion auftreten.
- Das Snelliussche Brechungsgesetz lässt sich für $\alpha_1 = \alpha_{\mathsf{krit}}$ schreiben als

$$\sin\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha_{\mathsf{krit}} = 1\,.$$

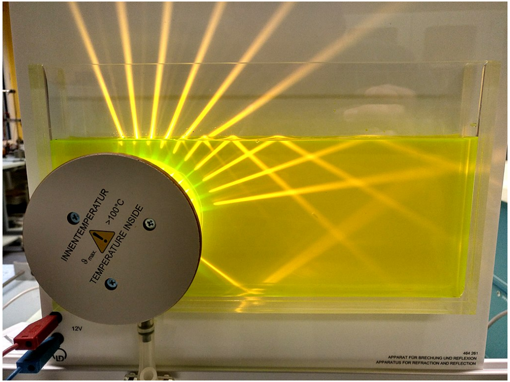
- Für Winkel $\alpha_1 > \alpha_{\mathsf{krit}}$ wird keine ungedämpfte Welle transmittiert, d.h. wir beobachten Totalreflexion.
- Der kritische Winkel α_{krit} lässt sich berechnen als

$$\alpha_{\mathsf{krit}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\,.$$

- Beim Übergang von Wasser ($n_1 = 1.333$) zu Luft ($n = 1$), erhalten wir für den kritischen Winkel

$$\alpha_{\mathsf{krit}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \approx 48{,}60^\circ\,.$$

Visualisierung der Totalreflexion



Brewsterscher Polarisationswinkel

Karlsruher Institut für Technologie

- Zusammen mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz erhalten wir für $r_\mathsf{p} = 0$ also

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1)} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1)} = \frac{\sin(2\alpha_2)}{\sin(2\alpha_1)} = 1$$

- Diese Gleichung hat die triviale Lösung $\alpha_2 = \alpha_1$. Eine weitere Lösung ist $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$. Damit ergibt sich

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_1)} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} = \tan(\alpha_1) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \operatorname{atan}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

- Dieser Winkel α_1 heißt *Brewsterscher Polarisationswinkel*. Von einer beliebig polarisierten Welle, die unter α_1 einfällt, wird also nur die Feldkomponente reflektiert, die senkrecht auf der Einfallsebene steht. Die reflektierte Welle ist senkrecht polarisiert.

Anwendung in der Fotografie

- Während das einfallende Sonnenlicht unpolarisiert ist, ist das von der Wasseroberfläche unter dem Brewesterschen Polarisationswinkel reflektierte Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Wird der Polarisationsfilter so ausgerichtet, dass er nur die parallele Polarisation durchlässt, so verschwinden die Reflexionen vollständig.

Vorlesungsinhalte

1. Rand- und Stetigkeitsbedingungen

2. Reflexion und Brechung ebener Wellen

3. Fresnelsche Formeln

4. Was Sie gelernt haben sollten

Was Sie gelernt haben sollten

- Welche tangentialen bzw. normalen Feldkomponenten (nicht) stetig sind und wie sich die zugrundeliegenden Beziehungen herleiten lassen.
- Dass wir elektromagnetische (ebene) Wellen an einer Grenzfläche in einen einfallenden, reflektierten und transmittierten Anteil zerlegen können.
- Welche Annahmen bei der Herleitung des Reflexions- und Brechungsgesetzes getroffen wurden.
- Nach welchem Kriterium zwischen senkrechter und paralleler Polarisation unterschieden wird.
- Wie die Polarisation (senkrecht bzw. parallel) den Reflexions- und Transmissionsfaktor beeinflusst.
- Unter welchen Bedingungen Totalreflexion auftreten kann.
- Welche Bedeutung der Brewsterwinkel hat.