

Vorlesung 08: Beugung

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2021/22

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 3. Dezember 2021

Vorlesungsinhalte

1. Beugung
2. Kirchhoffsches Beugungsintegral
3. Fresnel und Fraunhofer Näherung
4. Was Sie gelernt haben sollten
5. Anhang

Vorlesungsinhalte

1. Beugung

2. Kirchhoffsches Beugungsintegral

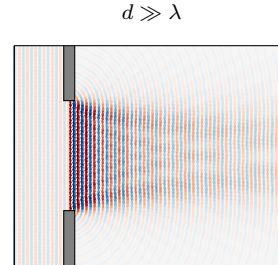
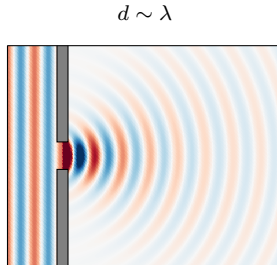
3. Fresnel und Fraunhofer Näherung

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

Huygenssches Prinzip

- Das *Huygenssche Prinzip* besagt, dass jede Wellenfunktion mit komplexer Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r})$ an einem Punkt P mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ als Überlagerung von Kugelwellen dargestellt werden kann.
- Der Ursprung dieser Kugelwellen liegt auf einer Fläche, die den Punkt P umschließt.



Greensche Identitäten

- Der Gaußsche Satz ist ein Erhaltungssatz, der besagt, dass wir das Integral über die Quellen eines Vektorfeldes $\nabla \cdot \mathbf{A}$ innerhalb des Volumens V in das Integral über den Fluss $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ durch seine Oberfläche O umwandeln können. Dabei ist $\mathbf{n}$ der in das Volumen hinein gerichtete Normalenvektor

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = - \oint_O \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F} = - \oint_O \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dF .$$

- Aus diesem Integralsatz, der Beziehung $\frac{\partial \psi}{\partial n} = (\nabla \psi) \cdot \mathbf{n}$ und der Produktregel folgt mit den zwei zweifach stetig differenzierbaren Skalarfeldern ϕ und ψ die **erste Greensche Identität**

$$- \oint_O \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dF = - \oint_O (\phi \nabla \psi) \cdot \mathbf{n} dF = \int_V \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) dV = \int_V (\phi \Delta \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV .$$

- Vertauschen wir die Rollen von ϕ und ψ und subtrahieren beide Varianten der ersten Greenschen Identität, erhalten wir die **zweite Greensche Identität**

$$- \oint_O \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dF = \int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) dV .$$

Anwendung der zweiten Greenschen Identität (I)

- Zur mathematischen Formulierung des Huygensschen Prinzips und des Phänomens der Beugung verwenden wir die zweite Greensche Identität ($'$ kennzeichnet die Integrationsvariablen)

$$-\oint_O \left(\underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dF' = \int_V (U(\mathbf{r}') \Delta' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta' \underline{U}(\mathbf{r}')) dV'.$$

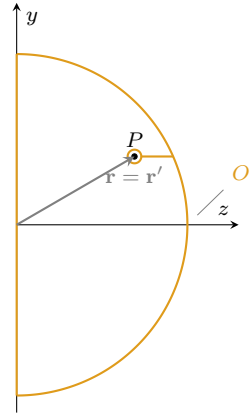
- Dabei ist V ein quellenfreies Volumen mit der Oberfläche O wobei n' den Betrag des nach innen gerichteten Normalenvektors $\mathbf{n}'$ am Ort $\mathbf{r}'$ angibt.
- Die Funktion ψ ist eine als bekannt vorausgesetzte Hilfsfunktion, für welche wir im Folgenden die Fundamentallösung (Greensche Funktion) der Helmholtz-Gleichung verwenden

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-j k \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

welche die Wirkung einer von $\mathbf{r}'$ ausgehenden Kugelwelle am Ort $\mathbf{r}$ beschreibt.

Anwendung der zweiten Greenschen Identität (II)

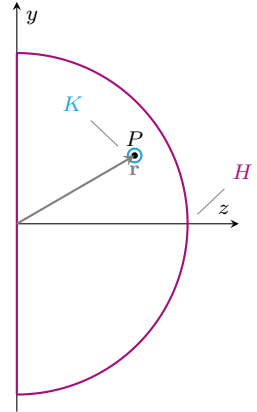
- $\underline{U}$ erfüllt innerhalb des gesamten Volumens V sowie auf der Oberfläche O die skalare Helmholtz-Gleichung $\Delta \underline{U} + k^2 \underline{U} = 0$.
- Auch ψ ist für alle $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$ in V Lösung der Helmholtz-Gleichung. In $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ hat ψ jedoch eine Singularität, welche wir durch geeignete Wahl des Integrationsgebiets ausschließen müssen.
- Zum Ausschließen der Singularität von ψ in $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ legen wir eine infinitesimal kleine Kugel um den Punkt P , die durch einen infinitesimal dünnen Schlauch mit der Oberfläche des Volumens verbunden wird.
- Auf der rechten Seite ist die zweidimensionale Projektion dieser Anordnung in der Ebene $x = 0$ dargestellt.
- Mit dem so gewählten Volumen V können wir die Helmholtz-Gleichungen für $\underline{U}$ und ψ in das Volumenintegral einsetzen, welches damit verschwindet.



Anwendung der zweiten Greenschen Identität (III)

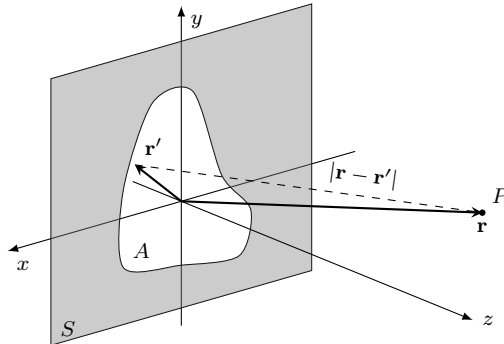
- Da das Integral über die Oberfläche des Schlauchs verschwindet, können wir das Integral über O auffassen als die Summe des Integrals über die Hüllfläche H und des Integrals über die Kugel K .
- Wir können zeigen, dass das Integral über K gerade $\underline{U}(\mathbf{r})$ ergibt (vgl. Henke 2020, S. 464) und erhalten

$$\begin{aligned}
 & - \oint_H \left(\underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dF' \\
 & = \oint_K \left(\underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dF' = \underline{U}(\mathbf{r}) .
 \end{aligned}$$



Beugung an einer Apertur

- Im Folgenden verwenden wir dieses Ergebnis, um die Beugung einer Welle an einer Apertur A (z.B. einem Loch) in einem unendlich ausgedehnten Schirm S in der Ebene $z = 0$ zu beschreiben.
- Eine Welle mit der komplexen Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r})$ treffe vom Halbraum $z < 0$ aus auf die Apertur.
- Wir suchen die Feldverteilung $\underline{U}(\mathbf{r})$ im Halbraum $z > 0$.



Helmholtz-Kirchhoff Integral

- Mit der Apertur in der Ebene $z = 0$, deren Normalen in $+z$ -Richtung zeigen, erhalten wir mit $z' \rightarrow 0$

$$\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial n'} = \frac{\partial \psi}{\partial z'} = \frac{z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[jk + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \frac{e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- Damit erhalten wir aus der zweiten Greenschen Identität das *Helmholtz-Kirchhoff Integral*

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_H \left[\frac{z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[jk + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] U - \frac{\partial U}{\partial z'} \right] \frac{e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF'$$

- Dieses Integral stellt die mathematische Formulierung des Huygensschen Prinzips dar.

Vorlesungsinhalte

1. Beugung

2. Kirchhoffsches Beugungsintegral

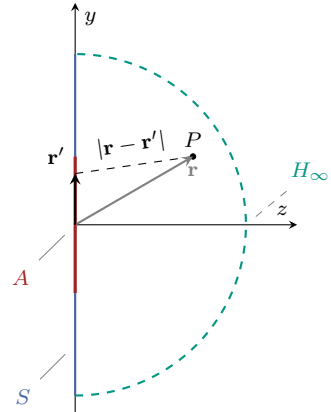
3. Fresnel und Fraunhofer Näherung

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

Kirchhoffsche Näherungen

- Die Hüllfläche H zerlegen wir erneut in drei Teilflächen: Die Aperturfläche A , die Schirmfläche (ohne Apertur) S und die Fläche einer ins Unendliche ausgedehnten Halbkugel H_∞ .
- Kirchhoff hat für diese drei Teilintegrale folgende Näherungen getroffen:
 - Innerhalb der Apertur beeinflusst das Vorhandensein des Schirms den komplexen Zeiger $\underline{U}$ und dessen Ableitung $\frac{\partial \underline{U}}{\partial n'}$ nicht.
 - Auf dem Schirm ($z = 0+$) gilt hingegen $\underline{U} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial n'} \equiv 0$, weshalb das Integral über S zu null wird.
 - Die Wellen im Halbraum $z > 0$ klingen mit zunehmendem Abstand von der Apertur schneller ab als die Kugeloberfläche H_∞ wächst, weshalb der Beitrag des Integrals über H_∞ verschwindet.



Das Kirchhoffsche Beugungsintegral

- Mit den vorigen Näherungen genügt es also, das Integral über die Aperturfläche A in der Ebene $z = 0$ zu berechnen.
- Damit wird aus dem Helmholtz-Kirchhoff Integral das Kirchhoffsche Beugungsintegral

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_A \left[\frac{z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(jk + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) U(\mathbf{r}') - \frac{\partial U(\mathbf{r}')}{\partial z'} \right] \frac{e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF'.$$

- Wir müssen also $\underline{U}$ und $\frac{\partial \underline{U}}{\partial z}$ nur auf der Apertur kennen, um die Verteilung von $\underline{U}$ im gesamten Halbraum $z > 0$ zu bestimmen.
- In hinreichend großer Entfernung von der Apertur, d.h. für $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$ und mit $\frac{z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{z}{|\mathbf{r}|} = \cos \theta$ erhalten wir mit dem Winkel $\theta \in [-\pi/2, \pi/2)$ daraus

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_A \left[jk \cos \theta U(\mathbf{r}') - \frac{\partial U(\mathbf{r}')}{\partial z'} \right] \frac{e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF'$$

Beugung einer ebenen Welle

- Bei Anregung mit einer ebenen Welle gilt im Halbraum $z < 0$ $\underline{U}(\mathbf{r}) = \underline{U}_0 e^{-j k z}$ und in der Apertur

$$\underline{U}(\mathbf{r}') = \underline{U}_0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'} \right|_{z'=0} = -j k \underline{U}_0$$

- Damit erhalten wir für das Feld im Halbraum $z > 0$

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{j \underline{U}_0 k}{4\pi} \int_A (1 + \cos \theta) \frac{e^{-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF',$$

was sich für kleine Winkel gegenüber der z -Achse wegen $\cos \theta \approx 1$ weiter vereinfacht zu

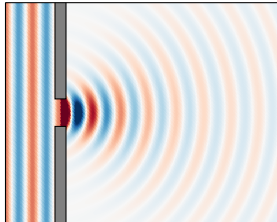
$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{j \underline{U}_0}{\lambda} \int_A \frac{e^{-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF' \approx \frac{j \underline{U}_0}{\lambda r} \int_A e^{-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF'.$$

- Letztere Näherung gilt für $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx |\mathbf{r}| = r$. Beachte, dass diese Näherung nicht ohne Weiteres im komplexen Exponenten getroffen werden darf.

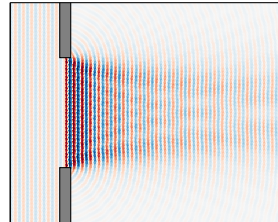
Huygenssches Prinzip

- Das *Huygenssche Prinzip* besagt, dass jede Wellenfunktion mit komplexer Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r})$ an einem Punkt P mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ als Überlagerung von Kugelwellen dargestellt werden kann.
- Der Ursprung dieser Kugelwellen liegt auf einer Fläche, die den Punkt P umschließt.

$$d \sim \lambda$$



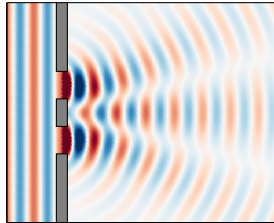
$$d \gg \lambda$$



Interferenz am Doppelspalt

- Gemäß dem Superpositionsprinzip können die Feldverteilungen für jeden Spalt separat berechnet werden. Das Gesamtfeld ergibt sich dann als Summer der Einzellösungen.
- Bei der Darstellung mittels komplexer Amplituden interferieren die Felder entsprechend ihrer Phasenrelation entweder konstruktiv oder destruktiv.

$$d \sim \lambda$$



Vorlesungsinhalte

1. Beugung

2. Kirchhoffsches Beugungsintegral

3. Fresnel und Fraunhofer Näherung

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

Fresnel Näherung

- Das Beugungsintegral kann weiter vereinfacht werden, wenn wir schreiben

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{z^2}}.$$

- Die Wurzel können wir nun in eine Taylorreihe entwickeln, gemäß $\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha^3}{16} + \dots$, und durch ihre ersten beiden Terme annähern

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx z \left(1 + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z^2} \right)$$

- Dies ist die sogenannte Fresnel Näherung welche das Beugungsintegral vereinfacht zu

$$\underline{U}^{(\text{Fresnel})}(\mathbf{r}) = \frac{j \underline{U}_0 e^{-j k z}}{\lambda r} \iint_{\mathcal{A}} e^{-j k \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}} dx' dy'$$

Wann gilt die Fresnel Näherung?

- Im Exponenten haben wir lediglich die ersten zwei Terme berücksichtigt. Der Fehler ist folglich in der Größenordnung von $k \left((x - x')^2 + (y - y')^2 \right)^2 / 8z^3$.
- Da eine Phasendrehung um 2π einen Vorzeichenwechsel bewirkt, erhalten wir mit $\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ die folgende Bedingung

$$k \frac{\rho^4}{8z^3} \ll 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\rho^4}{\lambda z^3} \ll 8 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\rho^4}{\lambda^4} \ll 8 \frac{z^3}{\lambda^3}.$$

- In der Regel gilt für Wellenlängen im optischen Bereich in großem Abstand von der Apertur $\lambda \ll \rho \ll z$. Unter diesen Bedingungen ist die Fresnel Näherung zulässig.

Fraunhofer Näherung

- Eine Weitere Vereinfachung ergibt sich mit der zusätzlichen Näherung

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx z + \frac{x^2 - 2xx' + y^2 - 2yy'}{2z}.$$

- Dies ist die sogenannte Fraunhofer Näherung, welche das Beugungsintegral vereinfacht zu

$$\underline{U}^{(\text{Fraunhofer})}(\mathbf{r}) = \frac{j \underline{U}_0 e^{-j k z}}{\lambda r} e^{-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}} \iint_{\mathcal{A}} e^{-j k \frac{xx' + yy'}{z}} dx' dy'$$

- Wenn wir nun eine Aperturfunktion $g_A(x', y')$ einführen sowie die Raumfrequenzen $\xi = x/\lambda z$ und $v = y/\lambda z$, dann wird dieses Integral zu

$$\underline{U}^{(\text{Fraunhofer})}(\mathbf{r}) = \frac{j \underline{U}_0 e^{-j k z}}{\lambda r} e^{-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}} \iint_{-\infty}^{\infty} g_A(x', y') e^{-j 2\pi(\xi x' + v y')} dx' dy'$$

- Das Integral entspricht der zweidimensionalen räumlichen Fouriertransformation der Aperturfunktion.

Wann gilt die Fraunhofer Näherung?

- Im Exponenten haben wir den Term $-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}$ vernachlässigt.
- Nehmen wir nun eine kreisförmige Apertur mit dem Radius $R = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ an, so muss bei guter Näherung gelten, dass

$$k \frac{R^2}{2z} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{R^2}{2z} \ll 2\pi$$

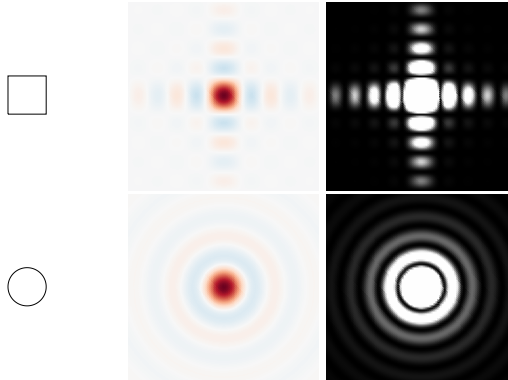
- Daraus folgt als Bedingung für die Gültigkeit der Fraunhofer Näherung

$$z \gg \frac{R^2}{2\lambda} = F$$

- Die Größe F wird in der Optik als Fresnel Zahl bezeichnet.

Beugungsmuster

- Die Abbildungen zeigen den Realteil bzw. das Betragsquadrat (d.h. die Intensität) des Beugungsmusters von $\underline{U}$ im Fernfeld für eine rechteckige Apertur (oben) und eine kreisförmige Apertur (unten). Dementsprechend stimmen die Muster mit den Fouriertransformierten der Aperturfunktionen überein.



Vorlesungsinhalte

1. Beugung

2. Kirchhoffsches Beugungsintegral

3. Fresnel und Fraunhofer Näherung

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

Was Sie gelernt haben sollten

- Die Aussage des Huygensschen Prinzips, dass jede Wellenfunktion als Überlagerung von Kugelwellen dargestellt werden kann, habe ich verstanden.
- Mir ist klar, weshalb wir neben dem Ortsvektor $\mathbf{r}$, der sich auf den Beobachtungspunkt bezieht, die Integration über den Ortsvektor $\mathbf{r}'$ benötigen.
- Die Vereinfachung des Helmholtz-Kirchhoff Integrals mit Hilfe der Kirchhoffschen Näherung kann ich nachvollziehen.
- Die Fresnel und Fraunhofer Näherung sowie deren Gültigkeitsbereiche habe ich verstanden.
- Ich habe verstanden, dass das Beugungsintegral gemäß der Fraunhofer Näherung für eine ebene Welle der zweidimensionalen Fouriertransformation der Aperturfunktion entspricht.

Vorlesungsinhalte

1. Beugung

2. Kirchhoffsches Beugungsintegral

3. Fresnel und Fraunhofer Näherung

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

Literaturverweise



Heino Henke. *Elektromagnetische Felder: Theorie und Anwendung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. ISBN: 978-3-662-62234-6 978-3-662-62235-3. DOI: 10.1007/978-3-662-62235-3. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-62235-3>.