

Vorlesung 09: Der Gaußsche Strahl

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2021/22

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 8. Dezember 2021

Vorlesungsinhalte

1. Paraxiale Näherung und Strahlwellen

2. Optische Elemente (Linsen, Spiegel, etc.)

3. Was Sie gelernt haben sollten

Vorlesungsinhalte

1. Paraxiale Näherung und Strahlwellen

2. Optische Elemente (Linsen, Spiegel, etc.)

3. Was Sie gelernt haben sollten

Strahlwellen

- Bislang haben wir für die Wellenausbreitung in homogenen Medien stets ebene Wellen oder Kugelwellen betrachtet.
- Dass Wellen - wie für ebene Wellen und Kugelwellen bislang angenommen - senkrecht zur Ausbreitungsrichtung unendlich ausgedehnt sind, gilt meist nur in erster Näherung.
- Wellen nehmen häufig die Form einer Strahlwelle an, d.h. senkrecht zur Ausbreitungsrichtung besteht eine begrenzte Feldausdehnung.
- Dabei muss weiterhin die Helmholtzgleichung gelten

$$\Delta \underline{U} + k^2 \underline{U} = 0$$

- In der letzten Vorlesung haben wir gesehen, dass die Ausbreitung von Kugelwellen in hinreichender Entfernung von der Quelle durch die Fresnel Näherung beschreibbar ist.
- Das Analogon zur Fresnel Näherung des Beugungsintegrals ist die paraxiale Näherung der Helmholtz-Gleichung, welche wir im Folgenden betrachten.

Paraxiale Näherung in Zylinderkoordinaten

- Wir wählen für eine sich in $+z$ -Richtung ausbreitende skalare Feldgröße den Ansatz $\underline{U}(\rho, \phi, z) = \underline{U}_0 \psi(\rho, \phi, z) \exp(-j k z)$, wobei die Amplitude ψ sich nur langsam mit z ändere.
- Setzen wir diesen Ansatz in die Helmholtzgleichung in kartesischen Koordinaten ein, ergibt sich die partielle Differentialgleichung

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - j 2k \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

- Aufgrund der langsamen Änderung von ψ mit z wird bei der sogenannten *paraxialen Näherung* die zweite Ableitung nach z vernachlässigt und es folgt die vereinfachte Differentialgleichung

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} - j 2k \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

- Eine triviale Lösung dieser Differentialgleichung ist $\psi = \text{const}$, also die ebene Welle.

Separation der Variablen

- Zur Lösung der paraxialen Helmholtzgleichung wählen wir zunächst den Produktansatz

$$\psi(\rho, \phi, z) = \psi_\rho(\rho, z)\psi_\phi(\phi)$$

- Setzen wir diesen ein und teilen beide Seiten durch ψ so gilt

$$\frac{1}{\psi_\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\psi_\phi} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi_\phi}{\partial \phi^2} - j 2k \frac{1}{\psi_\rho} \frac{\partial \psi_\rho}{\partial z} = 0$$

- Mit der Separationskonstanten m werden daraus die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \rho} \right) - j 2k \frac{\partial \psi_\rho}{\partial z} - m \psi_\rho &= 0 \\ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi_\phi}{\partial \phi^2} + m \psi_\phi &= 0 \end{aligned}$$

Lösungsansatz: Gaußscher Strahl

- Als nächstes wählen wir nun für ψ_ρ den Ansatz

$$\psi_\rho(\rho, z) = \underline{f}(z)h \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) \exp \left(-j \frac{k\rho^2}{2R(z)} \right)$$

- Durch Einführen der Größe

$$\frac{1}{\underline{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{2}{kw^2(z)}$$

- lässt sich dies vereinfachen zu

$$\psi_\rho(\rho, z) = \underline{f}(z)h \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right) \exp \left(-j \frac{k\rho^2}{2\underline{q}(z)} \right)$$

Lösung der paraxialen Helmholtzgleichung (I)

- Dann erhalten wir (Argumente der Übersichtlichkeit halber weggelassen)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \rho} \right) = \frac{2f}{w^2} \left[h'' + \left(\frac{w}{\sqrt{2}\rho} - j \frac{\sqrt{2}wk\rho}{q} \right) h' + \left(-j \frac{k w^2}{q} - \frac{k^2 \rho^2 w^2}{2q^2} \right) h \right] e^{-j k \frac{\rho^2}{2q}}$$

und

$$\frac{\partial \psi_\rho}{\partial z} = \frac{2f}{w^2} \left[\left(\frac{w^2 f'}{2f} + j \frac{k w^2 \rho^2 q'}{4 q^2} \right) h - \frac{\rho w'}{\sqrt{2}} h' \right] e^{-j k \frac{\rho^2}{2q}}$$

- Dann ergibt sich aus $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \rho} \right) - j 2k \frac{\partial \psi_\rho}{\partial z} - m \psi_\rho = 0$

$$\frac{\sqrt{2}f}{w\rho} \left[\frac{\sqrt{2}\rho}{w} h'' + \left(1 + j \frac{2k\rho^2}{w} \left[w' - \frac{w}{q} \right] \right) h' + \left(\frac{k^2 w \rho^3}{\sqrt{2} q^2} [q' - 1] - j \sqrt{2} k w \rho \left[\frac{1}{q} + \frac{f'}{f} - j \frac{m}{2k} \right] \right) h \right] \\ \times e^{-j k \frac{\rho^2}{2q}} = 0$$

Lösung der paraxialen Helmholtzgleichung (II)

- Diese unübersichtliche Gleichung, können wir mit $\zeta = \frac{\sqrt{2}\rho}{w}$ überführen in

$$\zeta h''(\zeta) + (1 - \zeta)h'(\zeta) + \lambda h(\zeta) = 0$$

- Dies ist die Laguerresche Differentialgleichung, welche für nichtnegative ganzzahlige λ lösbar ist.
- Ihre Lösungen sind Laguerre Polynome der Ordnung λ . Für $\lambda = 0$ gilt $h = 1$.
- Voraussetzung ist, das folgende Gleichungen gelten

$$[q' - 1] = 0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{1}{q} + \frac{f'}{f} - j \frac{m}{2k} \right] = \frac{j \lambda}{\sqrt{2} k w \rho} \quad \text{und} \quad \left[w' - \frac{w}{q} \right] = \frac{j}{\sqrt{2} k \rho}$$

- Die Gültigkeit dieser drei Gleichungen wollen wir im Folgenden betrachten.

Lösung der paraxialen Helmholtzgleichung (III)

- Damit die obige Gleichung erfüllt sein kann, muss einerseits $[q' - 1] = 0$ gelten, also

$$\underline{q}' = 1 \quad \implies \quad \underline{q}(z) = z + \underline{q}_0$$

- Der Fleckradius $w(z)$ sei als $1/e$ -Radius definiert. Daher muss mit $w_0 = w(z = 0)$ gelten, dass

$$j \frac{k w_0^2}{2 \underline{q}_0} = 1 \implies \frac{1}{\underline{q}_0} = \frac{1}{R(z=0)} - j \frac{2}{k w_0^2} = -j \frac{2}{k w_0^2} \implies R(z=0) \rightarrow \infty \text{ und } \underline{q}_0 = j \frac{k w_0^2}{2} = j z_R$$

- wobei $z_R = k w_0^2 / 2$ als Rayleigh-Länge bezeichnet wird. Damit ergibt sich dann

$$\frac{1}{\underline{q}(z)} = \frac{1}{z + j z_R} = \frac{z}{z^2 + z_R^2} - j \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{2}{k w^2(z)}$$

- Daraus erhalten wir

$$R(z) = \frac{z^2 + z_R^2}{z} = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right) \quad \text{und} \quad w(z) = \sqrt{\frac{2(z^2 + z_R^2)}{k z_R}} = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$$

- Bei der Rayleigh-Länge $z = z_R$ hat sich der Fleck also um den Faktor $\sqrt{2}$ verbreitert.

Parameter des Gaußschen Strahls

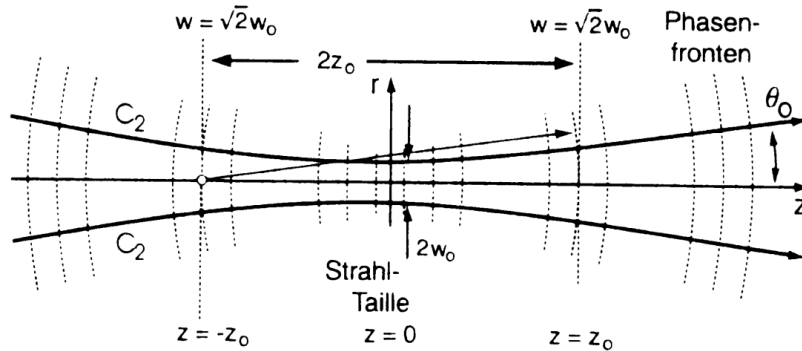
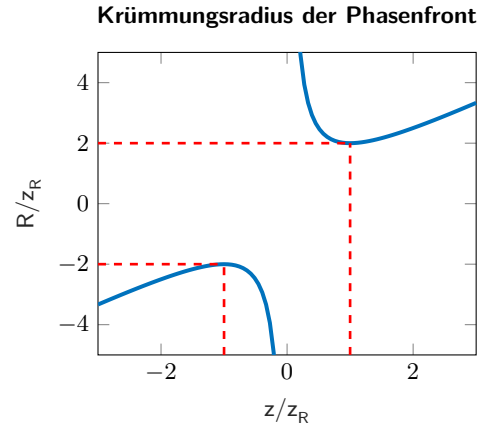
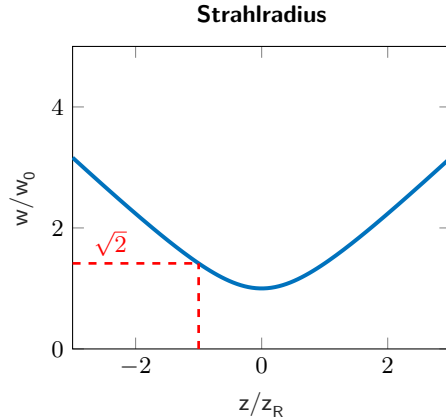


Abbildung: Längsschnitt durch einen Gaußschen Strahl.

Parameter des Gaußschen Strahls



Lösung der paraxialen Helmholtzgleichung (IV)

- Betrachten wir der Einfachheit halber $\lambda = 0$ und $m = 0$, dann muss weiterhin erfüllt sein, dass

$$\left[\frac{1}{\underline{q}} + \frac{\underline{f}'}{\underline{f}} \right] = 0 \quad \xRightarrow{\frac{1}{\underline{q}} = \frac{1}{z + j z_R}} \quad \frac{\underline{f}'}{\underline{f}} = - \frac{z - j z_R}{z^2 + z_R^2}$$

- Daraus folgt, dass $\underline{f}(z) = \exp(-j P(z))$ mit

$$\underline{P}(z) = - \int_0^z \frac{z_R + j z'}{z'^2 + z_R^2} dz' = - \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) - j \frac{1}{2} \ln \left(\frac{z_R^2 + z^2}{z_R^2} \right) = - \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) + j \ln \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)$$

- Damit erhalten wir desweiteren mit der sogenannten Gouy-Phasenverschiebung $\phi_G(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right)$

$$\underline{f}(z) = \frac{w_0}{w(z)} e^{j \phi_G(z)}$$

- Die Gouy-Phasenverschiebung hat zur Folge, dass sich das Vorzeichen dreht, sobald der Strahl seinen Fokuspunkt überschreitet.

Gaußsche Strahlwellen

- Mit den obigen Betrachtungen erhalten wir für den und $m = 0$ und der Stetigkeitsbedingung $\psi_\phi(0) = \psi_\phi(2\pi)$

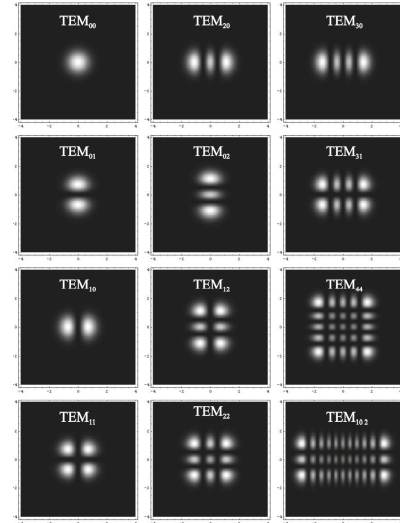
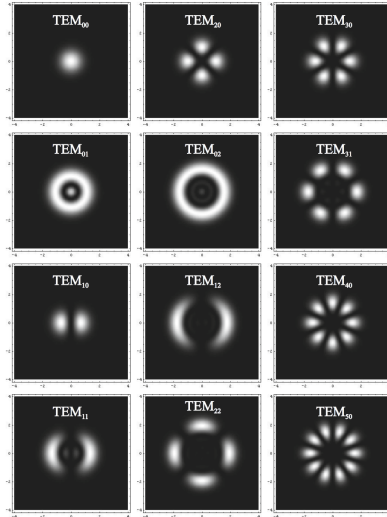
$$\psi_\phi(\phi) = 1$$

- Desweiteren gilt dafür für die Grundmode, d.h. für $\lambda = 0$ mit den obigen Ergebnissen

$$\psi(\rho, z) = \underbrace{\frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right)}_{\text{Gaußscher Fleck}} \times \underbrace{\exp\left(-j \frac{k\rho^2}{2R(z)}\right)}_{\text{Phasenkrümmung}} \times \underbrace{\exp\left(j \phi_G(z)\right)}_{\text{Gouy-Phasenverschiebung}}$$

- Für $\lambda \in \{1, 2, \dots\}$ und $m \in \{-\lambda, \dots, \lambda\}$ erhalten wir Wellen höherer Ordnung.
- Gaußsche Strahlwellen sind, wie ebene Wellen, transversalelektromagnetische (TEM) Wellen.

Gaußsche Strahlmoden höherer Ordnung



Vorlesungsinhalte

1. Paraxiale Näherung und Strahlwellen

2. Optische Elemente (Linsen, Spiegel, etc.)

3. Was Sie gelernt haben sollten

Durchgang durch optisches Element

- Lineare optische Elemente, wie Linsen und Spiegel, können jeweils durch eine sogenannte ABCD-Matrix beschrieben werden.
- Gegeben sei ein Gaußscher Strahl an der Stelle $z = z_1$ mit $\underline{q}_1 = \underline{q}(z_1)$, d.h.

$$\frac{1}{\underline{q}(z_1)} = \frac{1}{R(z_1)} - j \frac{2}{kw^2(z_1)}$$

- Am Ausgang eines optischen Elementes mit den Parametern A , B , C und D , bei $z = z_2$, gilt dann

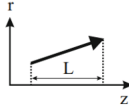
$$\underline{q}_2 = \underline{q}(z_2) = \frac{A\underline{q}_1 + B}{C\underline{q}_1 + D}$$

- ABDC-Matrizen kaskadierter Elemente können aufmultipliziert werden.

ABCD-Matrizen

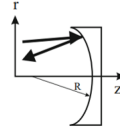
Translation

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



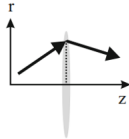
sphärischer Spiegel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$



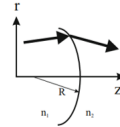
dünne Linse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$



sphärische Grenzfläche

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}$$



Vorlesungsinhalte

1. Paraxiale Näherung und Strahlwellen

2. Optische Elemente (Linsen, Spiegel, etc.)

3. Was Sie gelernt haben sollten

Was Sie gelernt haben sollten

