Karlsruher Institut für Technologie

IPQ

Vorlesung 10: Parallelplattenleitung

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2021/22

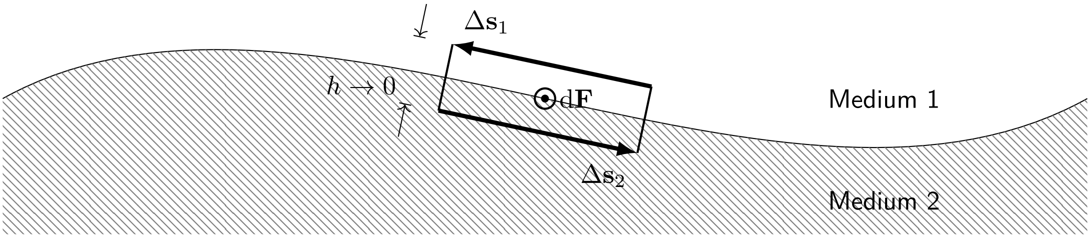
Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 15. Dezember 2021

Vorlesungsinhalte

Vorlesungsinhalte

Wdh.: Stetigkeit der tangentialen Feldkomponenten (I)

- Zur Herleitung der Stetigkeitsbedingungen der Tangentialkomponenten an einem Grenzübergang zwischen zwei Medien betrachten wir zunächst eine Fläche F, deren Normalenvektor parallel zur Grenzfläche ist.
- Senkrecht zur Grenzfläche betrage die Seitenlänge h, parallel zur Grenzfläche betrage sei die Ausdehnung Δs. Im Folgenden betrachten wir den Fall $h \to 0$.



Wdh.: Stetigkeit der tangentialen Feldkomponenten (II)

- Gemäß obiger Abbildung folgt aus dem Durchflutungs- bzw. dem Induktionsgesetz, dass

$$\oint_s \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = \int_F \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} + \int_F \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \int_F \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = i'\Delta s$$
$$\oint_s \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = -\int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = 0$$

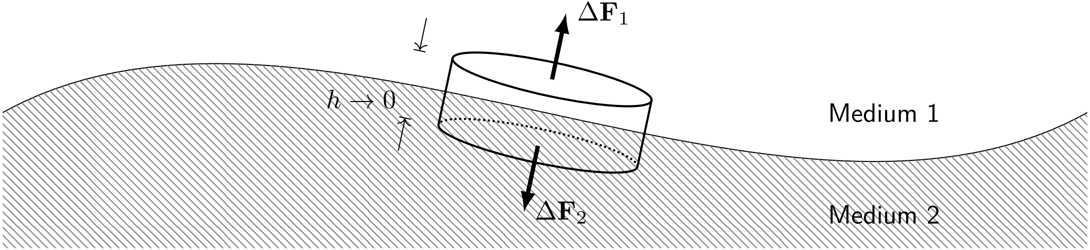
- Die Verschiebungsstromdichte $\partial\mathbf{D}/\partial t$ und die zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte $\partial\mathbf{B}/\partial t$ müssen stets endlich sein. Wegen $h \to 0$ verschwinden somit ihre Flächenintegrale.
- Das Flächenintegral über die Stromdichte $\mathbf{J}$ kann jedoch auch für infinitesimal kleines h einen endlichen Wert annehmen. D.h. es kann ein Oberflächenstrom $i'\Delta s$ mit dem Strombelag i' (Einheit $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$) fließen.
- Dies hat zur Folge, dass

$$H_{\mathrm{t},1} - H_{\mathrm{t},2} = i'$$
$$E_{\mathrm{t},1} - E_{\mathrm{t},2} = 0$$

wobei $H_{\mathrm{t},1}$, $E_{\mathrm{t},1}$, $H_{\mathrm{t},2}$ und $E_{\mathrm{t},2}$ die tangentialen Feldkomponenten an der Grenzfläche sind.

Wdh.: Stetigkeit der normalen Feldkomponenten (I)

- Zur Herleitung der Stetigkeitsbedingungen der Normalkomponenten an einem Grenzübergang zwischen zwei Medien betrachten wir zunächst einen Zylinder mit Volumen V dessen Stirnflächennormalen parallel zur Grenzflächennormalen sind.
- Die Höhe des Zylinders sei h und die beiden Stirnflächen haben jeweils einen Flächeninhalt ΔF.
- Im Folgenden betrachten wir den Fall $h \to 0$.



Wdh.: Stetigkeit der normalen Feldkomponenten (II)

- Gemäß der Abbildung folgt aus dem Gaußschen Gesetz sowie der Quellenfreiheit des Magnetfeldes, dass

$$\oint_O \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{D}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = \int_V \rho \, \mathrm{d}V = \sigma \Delta F$$

$$\oint_O \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{B}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = 0\,,$$

  wobei σ die Flächenladungsdichte (Einheit $\frac{\mathsf{A\,s}}{\mathsf{m}^2}$) ist.

- Dies hat zur Folge, dass

$$D_{\mathsf{n},1} - D_{\mathsf{n},2} = \sigma$$
$$B_{\mathsf{n},1} - B_{\mathsf{n},2} = 0$$

  wobei $D_{\mathsf{n},1}$, $B_{\mathsf{n},1}$, $D_{\mathsf{n},2}$ und $B_{\mathsf{n},2}$ die normalen Feldkomponenten an der Grenzfläche sind.

Wdh.: Randbedingungen

- Ist Medium 2 ideal leitend (d.h. Leitfähigkeit $\kappa_2 \to \infty$ bzw. Relaxationszeit $T_\mathsf{r} \to 0$), so verschwinden darin die Felder und die zuvor beschriebenen Stetigkeitsbedingungen werden zu

$$H_{\mathsf{t},1} = i' \,, \qquad E_{\mathsf{t},1} = 0 \,, \qquad D_{\mathsf{n},1} = \sigma \,, \qquad B_{\mathsf{n},1} = 0$$

- In diesem Fall werden die Stetigkeitsbedingungen auch als Randbedingungen bezeichnet.

Reflexions- & Transmissionsfaktor am idealen Leiter

- Eine elektromagnetische Welle breite sich in einem Medium mit Wellenwiderstand $\underline{Z}_1$ aus und treffe unter einem Winkel α_1 auf die Grenzfläche zu einem idealen Leiter mit Wellenwiderstand $\underline{Z}_2$ $(\kappa_2 \to \infty)$.
- Mit dem komplexen Wellenwiderstand

$$\underline{Z}_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\underline{\varepsilon}_2}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2 - \mathrm{j}\,\kappa_2/\omega}} = \sqrt{\mu_2 \frac{\varepsilon_2 + \mathrm{j}\,\kappa_2/\omega}{\varepsilon_2^2 + \kappa_2^2/\omega^2}} \xrightarrow{\kappa_2 \to \infty} 0\,,$$

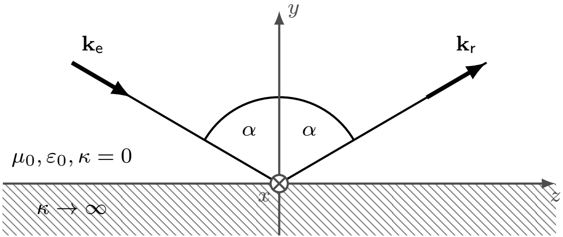
können wir dann die Reflexions- und Transmissionsfaktoren am idealen Leiter für senkrechte und parallele Polarisation schreiben als

$$\underline{r}_\mathsf{s} = \frac{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) - \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)} \xrightarrow{\kappa \to \infty} -1 \qquad \underline{t}_\mathsf{s} = \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)} \xrightarrow{\kappa \to \infty} 0$$

$$\underline{r}_\mathsf{p} = \frac{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) - \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)} \xrightarrow{\kappa \to \infty} 1 \qquad \underline{t}_\mathsf{p} = \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)} \xrightarrow{\kappa \to \infty} 0\,.$$

Reflexion am idealen Leiter (I)

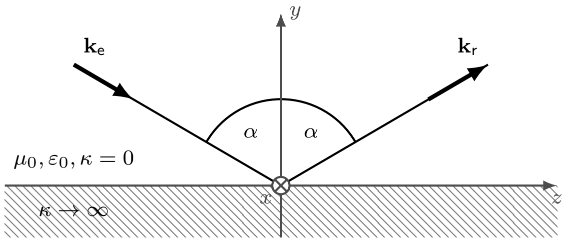
- Betrachten wir nun eine einfallende Welle, welche unter einem Winkel α auf eine in der xz-Ebene liegende Grenzfläche zwischen Vakuum und einem ideal leitenden Medium trifft und reflektiert wird. Die Einfallsebene sei die yz-Ebene.



- Für die Wellenvektoren gilt mit $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$

$$\mathbf{k}_\mathsf{e} = k_0\,\mathbf{e}_\mathsf{e} = k_0\,(-\cos\alpha\,\mathbf{e}_y + \sin\alpha\,\mathbf{e}_z) \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_\mathsf{r} = k_0\,\mathbf{e}_\mathsf{r} = k_0\,(\cos\alpha\,\mathbf{e}_y + \sin\alpha\,\mathbf{e}_z)$$

Reflexion am idealen Leiter (II)

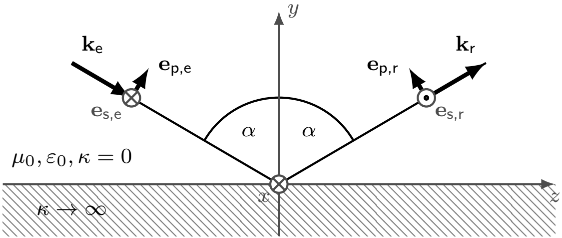


- Die einfallende Welle sei harmonisch und eben, d.h. wir erhalten mit dem Wellenwiderstand des freien Raumes Z_0

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathsf{e}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,\mathsf{e}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \mathbf{k}_{\mathsf{e}}\mathbf{r})} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_{\mathsf{e}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{H}}_{0,\mathsf{e}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \mathbf{k}_{\mathsf{e}}\mathbf{r})} = \frac{1}{Z_0}\mathbf{e}_{\mathsf{e}} \times \underline{\mathbf{E}}_{\mathsf{e}}(\mathbf{r}, t)$$

$$\underline{\mathbf{E}}_{\mathsf{r}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,\mathsf{r}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \mathbf{k}_{\mathsf{r}}\mathbf{r})} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_{\mathsf{r}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{H}}_{0,\mathsf{r}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \mathbf{k}_{\mathsf{r}}\mathbf{r})} = \frac{1}{Z_0}\mathbf{e}_{\mathsf{r}} \times \underline{\mathbf{E}}_{\mathsf{r}}(\mathbf{r}, t)$$

Senkrechte und parallele Polarisation



- Bezogen auf die Einfallsebene (hier die yz-Ebene) können wir die einfallende Welle aufteilen in ein senkrecht polarisiertes und ein parallel polarisiertes Feld gemäß

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathsf{e}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_\mathsf{e}^{\parallel}(\mathbf{r},t) + \underline{\mathbf{E}}_\mathsf{e}^{\perp}(\mathbf{r},t) \qquad \text{und} \qquad \underline{\mathbf{E}}_\mathsf{r}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_\mathsf{r}^{\parallel}(\mathbf{r},t) + \underline{\mathbf{E}}_\mathsf{r}^{\perp}(\mathbf{r},t)\,.$$

Reflexion am idealen Leiter: Parallele Polarisation (I)

- Mit dem Reflexionsfaktor der parallelen Polarisation $\underline{r}_\mathsf{p} = 1$ erhalten wir für das einfallende und reflektierte elektrische Feld

$$\underline{\mathbf{E}}_{0,\mathsf{e}}^{\|} = \underline{E}_0^{\|}\,\mathbf{e}_{\mathsf{p,e}} = \underline{E}_0^{\|}\,(\sin\alpha\,\mathbf{e}_y + \cos\alpha\,\mathbf{e}_z) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}}_{0,\mathsf{r}}^{\|} = \underline{E}_0^{\|}\,\mathbf{e}_{\mathsf{p,r}} = \underline{E}_0^{\|}\,(\sin\alpha\,\mathbf{e}_y - \cos\alpha\,\mathbf{e}_z)$$

- Dementsprechend zeigt das H-Feld in Richtung $\mathbf{e}_\mathsf{e} \times \mathbf{e}_{\mathsf{p,e}} = \mathbf{e}_\mathsf{r} \times \mathbf{e}_{\mathsf{p,r}} = -\mathbf{e}_x$ und lässt sich ausdrücken als

$$\underline{\mathbf{H}}_{0,\mathsf{e}}^{\|} = -\frac{\underline{E}_0^{\|}}{Z_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \mathbf{k}_\mathsf{e}\mathbf{e})}\,\mathbf{e}_x \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_{0,\mathsf{r}}^{\|} = -\frac{\underline{E}_0^{\|}}{Z_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \mathbf{k}_\mathsf{r}\mathbf{r})}\,\mathbf{e}_x\,.$$

Reflexion am idealen Leiter: Parallele Polarisation (II)

- Für die Überlagerung von einfallender und reflektierter Welle erhalten wir

$$\underline{\mathbf{E}}^{\|}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_{\mathsf{e}}^{\|}(\mathbf{r},t) + \underline{\mathbf{E}}_{\mathsf{r}}^{\|}(\mathbf{r},t) = \underline{E}_y^{\|}(\mathbf{r},t)\,\mathbf{e}_y + \underline{E}_z^{\|}(\mathbf{r},t)\,\mathbf{e}_z$$

mit den Komponenten wobei $\mathbf{k}_{\mathsf{e}} = k_0\,(-\cos\alpha\,\mathbf{e}_y + \sin\alpha\,\mathbf{e}_z)$ und $\mathbf{k}_{\mathsf{r}} = k_0\,(\cos\alpha\,\mathbf{e}_y + \sin\alpha\,\mathbf{e}_z)$

$$\begin{aligned}
\underline{E}_y^{\|}(\mathbf{r},t) &= \underline{E}_0^{\|}\sin\alpha\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_{\mathsf{e}}\cdot\mathbf{r})} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_{\mathsf{r}}\cdot\mathbf{r})}\right)\\
&= \underline{E}_0^{\|}\sin\alpha\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,k_0\cos\alpha\,y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k_0\cos\alpha\,y}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_0\sin\alpha\,z)}\\
&= 2\underline{E}_0^{\|}\sin\alpha\cos\left(k_0\cos\alpha\,y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_0\sin\alpha\,z)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\underline{E}_z^{\|}(\mathbf{r},t) &= \underline{E}_0^{\|}\cos\alpha\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_{\mathsf{e}}\cdot\mathbf{r})} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_{\mathsf{r}}\cdot\mathbf{r})}\right)\\
&= \underline{E}_0^{\|}\cos\alpha\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,k_0\cos\alpha\,y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k_0\cos\alpha\,y}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_0\sin\alpha\,z)}\\
&= \mathrm{j}\,2\underline{E}_0^{\|}\cos\alpha\sin\left(k_0\cos\alpha\,y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_0\sin\alpha\,z)}
\end{aligned}$$

Reflexion am idealen Leiter: Senkrechte Polarisation

Karlsruher Institut für Technologie

- Das elektrische Feld steht jetzt senkrecht auf der Einfallsebene und wir erhalten mit dem Reflexionsfaktor $\underline{r}_\mathsf{s} = -1$

$$\underline{\mathbf{E}}_{0,\mathsf{e}}^{\perp} = \underline{E}_0^{\perp}\,\mathbf{e}_{\mathsf{s,e}} = \underline{E}_0^{\perp}\,\mathbf{e}_x \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}}_{0,\mathsf{r}}^{\perp} = \underline{E}_0^{\perp}\,\mathbf{e}_{\mathsf{s,r}} = -\underline{E}_0^{\perp}\,\mathbf{e}_x\,,$$

  weshalb wir folgende Ausdrücke für das magnetische Feld erhalten

$$\underline{\mathbf{H}}_{0,\mathsf{e}}^{\perp} = \frac{\underline{E}_0^{\perp}}{Z_0}\left(\sin\alpha\,\mathbf{e}_y + \cos\alpha\,\mathbf{e}_z\right) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_{0,\mathsf{r}}^{\perp} = \frac{\underline{E}_0^{\perp}}{Z_0}\left(-\sin\alpha\,\mathbf{e}_y + \cos\alpha\,\mathbf{e}_z\right)\,.$$

- Für die Überlagerung von einfallender und reflektierter Welle erhalten wir

$$\underline{\mathbf{E}}^{\perp}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_{\mathsf{e}}^{\perp}(\mathbf{r},t) + \underline{\mathbf{E}}_{\mathsf{r}}^{\perp}(\mathbf{r},t) = \underline{E}_x^{\perp}(\mathbf{r},t)\,\mathbf{e}_x$$

  mit der Komponente

$$\begin{aligned}\underline{E}_x^{\perp}(\mathbf{r},t) &= \underline{E}_0^{\perp}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_\mathsf{e}\cdot\mathbf{r})} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_\mathsf{r}\cdot\mathbf{r})}\right)\\ &= \mathrm{j}\,2\underline{E}_0^{\perp}\sin\left(k_0\cos\alpha\,y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_0\sin\alpha\,z)}\,.\end{aligned}$$

Wellenausbreitung bei Reflexion am idealen Leiter

- Die Interpretation der obigen Ausdrücke lässt sich vereinfachen, indem wir die Wellenzahlen

$$k_y = k_0 \cos\alpha \quad \text{und} \quad k_z = k_0 \sin\alpha$$

einführen. Es gilt somit $k_0^2 = k_y^2 + k_z^2$.

- Wir erhalten dementsprechend für den Halbraum $y \geq 0$ im Fall paralleler Polarisation

$$\underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_y^{\parallel}(\mathbf{r},t)\,\mathbf{e}_y + \underline{\mathbf{E}}_z^{\parallel}(\mathbf{r},t)\,\mathbf{e}_z = \left(2\underline{E}_0^{\parallel}\frac{k_z}{k_0}\cos\left(k_y\,y\right)\,\mathbf{e}_y + \mathrm{j}\,2\underline{E}_0^{\parallel}\frac{k_y}{k_0}\sin\left(k_y\,y\right)\,\mathbf{e}_z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)}$$

und im Fall senkrechter Polarisation

$$\underline{\mathbf{E}}^{\perp}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_x^{\perp}(\mathbf{r},t)\,\mathbf{e}_x = \mathrm{j}\,2\underline{E}_0^{\perp}\sin\left(k_y\,y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)}\;\mathbf{e}_x\,.$$

- Wir beobachten also unabhängig von der Polarisation eine Welle, welche sich in z-Richtung ausbreitet und deren Amplitude von y abhängt.

Sonderfälle der Wellenausbreitung am idealen Leiter

- Im Fall $\alpha = 0°$ trifft die einfallende Welle senkrecht auf die Grenzfläche. Wie erhalten $k_y = k_0$ und $k_z = 0$. Die reflektierte Welle breitet sich also in entgegengesetzter Richtung zur einfallenden Welle aus.
- Durch die Überlagerung der einfallenden und der reflektierten Welle erhalten wir eine stehende Welle.
- Im Fall $\alpha = 90°$ kommt es zu keiner Reflexion und die einfallende Welle breitet sich ungestört im Halbraum $y \geq 0$ aus. Es gilt $k_y = 0$ und $k_z = k_0$.

Darstellung mittels Wellenlängen

Karlsruher Institut für Technologie

- Die Welle kann auch mithilfe der Wellenlängen

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{k_y} = \frac{\lambda_0}{\cos\alpha} \quad \text{und} \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{\lambda_0}{\sin\alpha}$$

  beschrieben werden, wobei $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi c_0}{\omega}$ die Wellenlänge im Vakuum ist und $\alpha \in (0, \pi/2)$.
- Die beiden Wellenlängen erfüllen also die Beziehung $\frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}$, wobei $\lambda_y, \lambda_z \geq \lambda_0$.
- Damit lassen sich die komplexen Zeiger der elektrischen Feldstärkevektoren für die parallele bzw. senkrechte Polarisation schreiben als

$$\underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_0^{\parallel} \left[2\frac{\lambda_0}{\lambda_z} \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda_y}\right) \mathbf{e}_y + \mathrm{j}\, 2\frac{\lambda_0}{\lambda_y} \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_y}\right) \mathbf{e}_z \right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z}\right)}$$

$$\underline{\mathbf{E}}^{\perp}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_0^{\perp} \left[\mathrm{j}\, 2 \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_y}\right) \mathbf{e}_x \right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z}\right)} \,.$$

Reellwertige Feldkomponenten

- Die reellwertigen E-Feldkomponenten erhalten wir mit $\underline{E}_0 = E_0 \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi_0}$ als Realteil der komplexen Zeiger

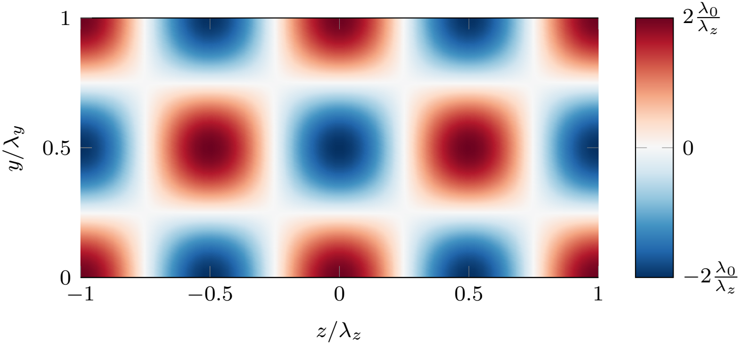
$$\mathbf{E}^{\parallel}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r},t)\right\} = E_0^{\parallel} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{\lambda_0}{\lambda_z}\cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda_y}\right)\cos\left(\varphi_0 + \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z}\right) \\ 2\frac{\lambda_0}{\lambda_y}\sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_y}\right)\sin\left(\varphi_0 + \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}^{\perp}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\underline{\mathbf{E}}^{\perp}(\mathbf{r},t)\right\} = E_0^{\perp} \begin{pmatrix} 2\sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_y}\right)\sin\left(\varphi_0 + \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Da im idealen Leiter kein elektrisches Feld existieren kann, verschwinden die tangentialen E-Feldkomponenten (hier E_z und E_x) auf der Grenzfläche $y = 0$ gemäß den Stetigkeitsbedingungen der Maxwellschen Gleichungen.

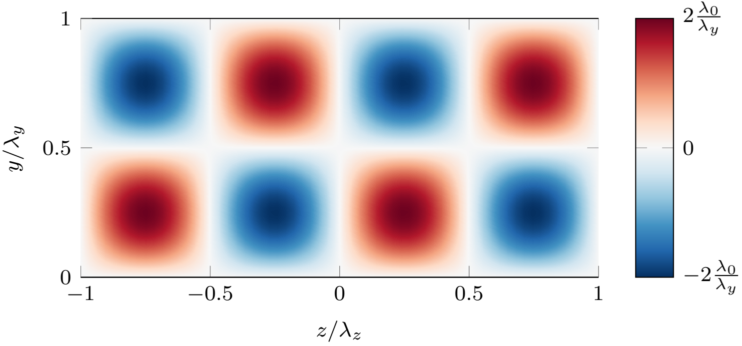
Amplitudenverteilung von $E_y^{\parallel}$

- Die Abbildung zeigt die normierte y-Komponente $E_y^{\parallel}/E_0^{\parallel}$ des *parallel polarisierten* elektrischen Feldstärkevektors zum Zeitpunkt $t = 0$ für $\varphi_0 = 0$.



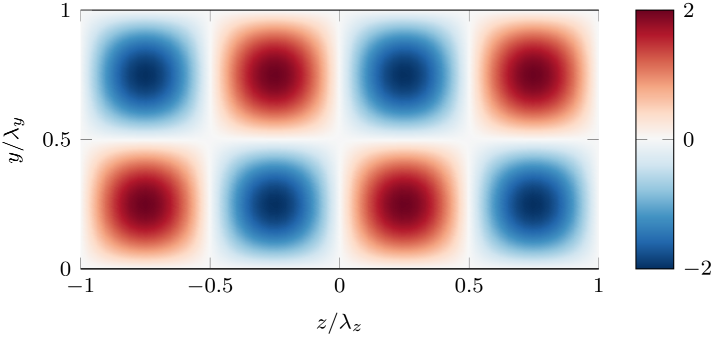
Amplitudenverteilung von $E_z^{\|}$

- Die Abbildung zeigt die normierte z-Komponente $E_z^{\|}/E_0^{\|}$ des *parallel polarisierten* elektrischen Feldstärkevektors zum Zeitpunkt $t = 0$ für $\varphi_0 = 0$.



Amplitudenverteilung von $E_x^\perp$

- Die Abbildung zeigt die normierte x-Komponente $E_x^\perp / E_0^\perp$ des *senkrecht polarisierten* elektrischen Feldstärkevektors zum Zeitpunkt $t = 0$ für $\varphi_0 = 0$.



Dispersionsrelation

- Da k_z reell ist, verläuft die Wellenausbreitung verlustlos. Wir erhalten also für die Phasenkonstante in z-Richtung

$$\beta_z = k_z = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_y^2}\,.$$

- Aufgelöst nach ω ergibt sich daraus die Dispersionsrelation

$$\omega(\beta_z) = c_0\sqrt{\beta_z^2 + k_y^2}\,,$$

aus welcher im Folgenden die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bestimmt werden kann.

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (I)

- Die Phasengeschwindigkeit in z-Richtung ergibt sich zu

$$v_{\mathsf{ph},z} = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{\omega}{k_0 \sin\alpha} = \frac{c_0}{\sin\alpha} \geq c_0$$

- und die Gruppengeschwindigkeit in z-Richtung aus der Dispersionsrelation zu

$$v_{\mathsf{gr},z} = \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,\beta_z} = \frac{\beta_z c_0}{\sqrt{\beta_z^2 + k_y^2}} = \frac{\beta_z c_0}{k_0} = \frac{\beta_z c_0^2}{\omega} = \frac{c_0^2}{v_{\mathsf{ph},z}} = c_0 \sin\alpha \leq c_0$$

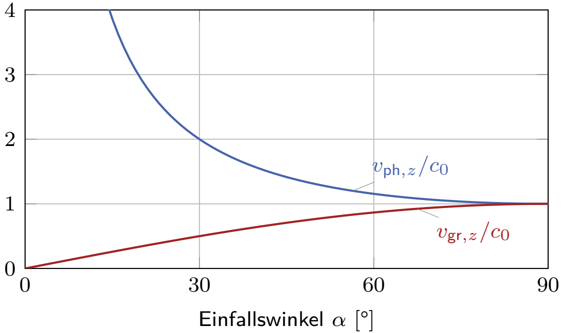
- Damit ergibt sich für die Reflexion am idealen Leiter die Beziehung

$$v_{\mathsf{ph},z} v_{\mathsf{gr},z} = c_0^2$$

d.h. dass das Produnkt von Phasen- und Gruppengeschindigkeit gleich dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit ist.

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (II)

- Die Abbildung zeigt die normierte Phasen- und Gruppengeschwindigkeit einer ebenen Welle bei Reflexion am idealen Leiter als Funktion des Einfallswinkels α.

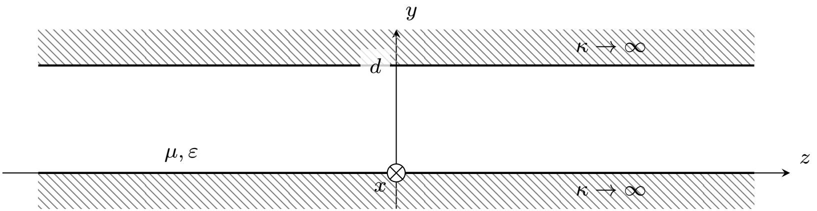


Vorlesungsinhalte

Karlsruher Institut für Technologie

Parallelplattenleitung

- Gemäß der Randbedingungen verschwindet die tangentiale E_z-Komponente auf der Grenzfläche, d.h. das elektrische Feld steht senkrecht.
- In den xz-Ebenen bei $y = n\frac{\lambda_y}{2}$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ verschwindet die $\underline{E}_z$ Komponente ebenfalls.
- Man kann in diesen Ebenen also ideal leitende Platten im Abstand $d = n\frac{\lambda_y}{2}$ einziehen, ohne dass sich das Feld zwischen den Platten verändern würde.
- Eine solche Anordnung heißt *Parallelplattenleiter*.



Moden im Parallelplattenleiter (I)

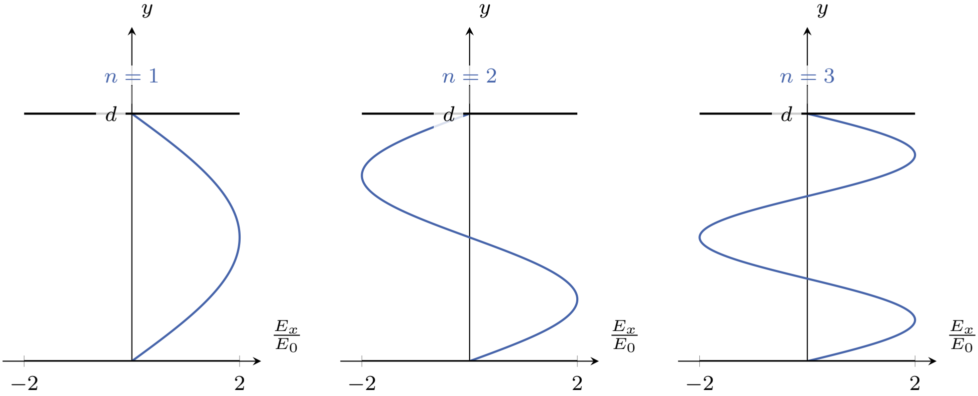
Karlsruher Institut für Technologie

- Für einen gegebenen Plattenabstand d beobachten wir im Parallelplattenleiter abhängig von der Frequenz verschiedene Feldbilder.
- Diese Feldbilder unterscheiden sich in der Anzahl von Nullstellen. Je größer n, desto mehr Nullstellen existieren zwischen den Platten.
- Die verschiedenen Feldbilder bezeichnen wir als *Moden*.
- Das parallel bzw. senkrecht polarisierte elektrische Feld können wir dann schreiben als

$$\underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r},t) = \underline{E}_0^{\parallel} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{\lambda_0}{\lambda_z}\cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \\ \mathrm{j}\,2\frac{\lambda_0}{\lambda_y}\sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z}\right)} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}}^{\perp}(\mathbf{r},t) = \underline{E}_0^{\perp} \begin{pmatrix} \mathrm{j}\,2\sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z}\right)}\,.$$

Moden im Parallelplattenleiter (II)

- Die Abbildungen zeigen die Amplitudenverteilungen von $E_x^{\perp} = \Re\{\underline{E}_x^{\perp}\}$ des senkrecht polarisierten elektrischen Felds für $t = 0, z = 0, \varphi_0 = 0$ und verschiedene Werte von n.



Dispersionsrelation der Parallelplattenleitung (I)

- Ist der Plattenabstand d fest vorgegeben, so folgt für gegebenes n

$$d = n\lambda_y/2 \quad \text{bzw.} \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y} = n\frac{\pi}{d}$$

- Damit ergibt sich für die Ausbreitungskonstante bzw. für die Wellenlänge in Ausbreitungsrichtung

$$k_z = k_0\sqrt{1-\left(\frac{k_y}{k_0}\right)^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{n\lambda_0}{2d}\right)^2}} \,.$$

Grenzfrequenz im Parallelplattenleiter

- Wird die Ausbreitungskonstante k_z zu null, kann sich keine Welle mehr ausbreiten.
- Daher bezeichnen wir die Frequenz, bei der $k_z = 0$ gilt, als *Grenzfrequenz* f_c („cut-off frequency“).
- Dementsprechend gilt

$$1 - \left(\frac{k_y}{k_0}\right)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k_y = k_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{n\pi}{d} = \frac{2\pi f_\mathsf{c}}{c_0} \quad \Longleftrightarrow \quad f_\mathsf{c} = \frac{n c_0}{2d}\,.$$

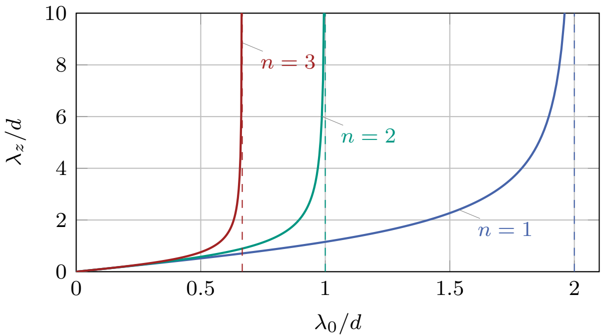
- Nun können wir mit $\omega_\mathsf{c} = 2\pi f_\mathsf{c}$ die Ausbreitungskonstante ausdrücken durch

$$k_z = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_\mathsf{c}}{\omega}\right)^2}\,.$$

- Für Frequenzen $f < f_\mathsf{c}$ wird k_z imaginär, d.h. die Welle wird in z-Richtung exponentiell gedämpft. Eine ungedämpfte Wellenausbreitung ist also für gegebenes n nur bei Frequenzen $f \geq f_{\mathsf{c},n}$ möglich.

Dispersionsrelation der Parallelplattenleitung (II)

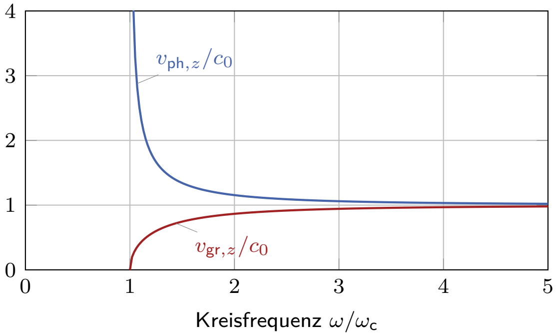
- Äquivalent zu der Grenzfrequenz definieren wir die *Grenzwellenlänge* $\lambda_\mathsf{c} = \frac{c_0}{f_\mathsf{c}} = \frac{2d}{n}$.
- Die Darstellung unten zeigt die normierte Wellenlänge in Ausbreitungsrichtung λ_z/d.
- Da $\lambda_z \propto \frac{1}{k_z}$ gilt, sehen wir die Polstellen bei $\lambda \to \lambda_\mathsf{c}$, welche durch die gestrichelten Linien hervorgehoben sind.



Phasen- & Gruppengeschwindigkeit im Parallelplattenleiter

- Mit $\beta_z = k_z$ gilt für die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im Parallelplattenleiter

$$v_{\mathrm{ph},z} = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{c_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}\right)^2}} \quad \text{und} \quad v_{\mathrm{gr},z} = \frac{c_0^2}{v_{\mathrm{ph},z}} = c_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}\right)^2}$$



Vorlesungsinhalte

Karlsruher Institut für Technologie

1. Reflexion am idealen Leiter

2. Parallelplattenleitung

3. Was Sie gelernt haben sollten

Was Sie gelernt haben sollten

- Wie sich elektromagnetische Wellen an Grenzflächen, insbesondere an idealen Leitern verhalten.
- Dass die Überlagerung von einfallender und am Leiter reflektierter Welle in einer - senkrecht zur Grenzfläche - stehenden Welle resultiert.
- Wie die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der, durch die Überlagerung resultierenden Welle, mit dem Einfallswinkel zusammenhängt.
- Wie das Funktionsprinzip des Parallelplattenleiters von der Betrachtung des Welleneinfalls auf den idealen Leiter abgeleitet werden kann.
- Was eine Mode ist und unter welchen Bedingungen sich die einzelnen Moden im Parallelplattenleiter ausbreiten können.
- Die Bedeutung der Grenzfrequenz für die einzelnen Moden des Parallelplattenleiters.
- Wie sich die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im Parallelplattenleiter verhalten.