



Vorlesung 11: Rechteckhohlleiter

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2021/22

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 12. Januar 2022





Vorlesungsinhalte

1. Kanalwellenleiter

2. Rechteckhohlleiter

3. Was Sie gelernt haben sollten

Vorlesungsinhalte

1. Kanalwellenleiter

2. Rechteckhohlleiter

3. Was Sie gelernt haben sollten

Einleitung und Motivation



- Für eine störsichere und geführte Übertragung von elektromagnetischen Wellen im Mikrowellen-Frequenzbereich von 300 MHz bis etwa 300 GHz werden vorwiegend Hohlleiter verwendet.
- Metallrohre mit meist rechteckigem, kreisförmigen oder elliptischen Querschnitt.
- Verlustarme Übertragung bei hohen Frequenzen oder Leistungen verglichen mit herkömmlichen Kabeln wie dem Koaxialkabel, da die Welle nicht durch einen Mittelleiter propagiert.
- Anwendungsgebiete: Mikrowelle, Antennenspeisung von Richtfunktanlagen, Satellitenantennen und Radioteleskopen, Plasmagenerator, Radargeräten, Teilchenbeschleuniger





Kanalwellenleiter (I)



- Im Unterschied zu Schichtwellenleitern (z.B. Parallelplattenleitung oder dielektrische Platte) besitzen die hier betrachteten Kanalwellenleiter in transversaler Richtung eine geschlossene Grenzfläche zwischen einem inneren und einem äußeren Medium. Beide Medien seien jeweils homogen und das Querschnittsprofil ändere sich in longitudinaler Richtung (d.h. in z-Richtung) nicht.
- An der Grenzfläche müssen an jedem Ort die Rand- bzw. Stetigkeitsbedingungen erfüllt sein.
- Beispiele für zylindrische Wellenleiter sind dielektrische Stäbe (z.B. eine Glasfaser mit Stufenindexprofil) und Hohlleiter mit rechteckigem oder rundem Querschnittsprofil. Während bei dielektrischen Stäben Felder sowohl innerhalb als auch außerhalb vorhanden sind, verschwinden diese in den Wänden eines ideal leitenden Hohlleiters.
- Wir nehmen ferner an, dass die Wellenleiter quellenfrei sind, d.h. es existieren keine Raumladungen $(\rho = 0)$ und keine freien Ströme $(\underline{J} = 0)$.

Kanalwellenleiter (II)

• Kanalwellenleiter mit asymmetrischer Querschnittskontur



Geführte E-Wellen und H-Wellen



- Im Folgenden wollen wir die Eigenschaften geführter Wellen im Kanalwellenleiter analysieren, welche sich mit räumlich konstanter transversaler Feldverteilung in *z*-Richtung ausbreiten.
- In kartesischen Koordinaten suchen wir also Lösungen der Wellengleichungen für Feldvektoren der Form

$$\underline{\mathbf{E}}(x,y,z) = \underline{\mathbf{E}}(x,y) e^{-j \underline{k}_z z} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}(x,y,z) = \underline{\mathbf{H}}(x,y) e^{-j \underline{k}_z z}$$

 \bullet Die Feldvektoren $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ können als Superposition einer E- und einer H-Welle aufgefasst gemäß

$$\mathbf{\bar{E}} = \mathbf{\bar{E}}^E + \mathbf{\bar{E}}^H$$
 und $\mathbf{\bar{H}} = \mathbf{\bar{H}}^E + \mathbf{\bar{H}}^H$

- Bei der E-Welle verfügt nur das E-Feld über eine z-Komponente und es gilt $\underline{H}_{z}^{E} = 0$.
- Entsprechend verfügt bei der H-Welle nur das H-Feld über eine z-Komponente und es gilt $\underline{E}_z^H = 0$.
- E-Wellen werden auch als transversal-magnetische (TM) Wellen und H-Wellen als transversal-elektrische (TE) Wellen bezeichnet. Transversalelektromagnetische (TEM) Wellen stellen einen weiteren Sonderfall dar, welchen wir zunächst nicht näher betrachten werden.

Feldkomponenten geführter E-Wellen



• Aus dem Durchflutungsgesetz $\nabla \times \mathbf{H}^E = \mathbf{j} \, \omega \underline{\varepsilon} \mathbf{E}^E$ erhalten wir mit $\underline{H}_z^E = 0$ und $\partial / \partial z \to -\mathbf{j} \, k_z$

$$\begin{pmatrix} \bar{E}_x^E \\ \bar{E}_x^E \\ \bar{E}_y^E \\ \bar{E}_z^E \end{pmatrix} = \frac{1}{j\,\omega\varepsilon} \begin{pmatrix} -\frac{\partial\underline{H}_y^E}{\partial z} \\ \frac{\partial\underline{H}_x^E}{\partial z} \\ \frac{\partial\underline{H}_y^E}{\partial x} - \frac{\partial\underline{H}_x^E}{\partial y} \end{pmatrix} \implies \bar{E}_x^E = -\frac{\underline{k}_z}{\omega\varepsilon}\underline{H}_y^E \\ \Longrightarrow \bar{E}_y^E = -\frac{\underline{k}_z}{\omega\varepsilon}\underline{H}_x^E$$

• Aus dem Induktionsgesetz $\nabla \times \mathbf{\underline{E}}^E = -j \omega \mu \mathbf{\underline{H}}^E$ erhalten wir mit $\underline{k}^2 = \omega^2 \underline{\varepsilon} \mu$ und $\underline{k}_t^2 = \underline{k}^2 - \underline{k}_z^2$

$$\begin{pmatrix} \underline{H}_{x}^{E} \\ \underline{H}_{y}^{E} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-j\,\omega\mu} \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_{y}^{E}}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{E}_{x}^{E}}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial y} \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{H}_{x}^{E}} = -\frac{1}{j\,\omega\mu} \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial y} - \frac{\underline{k}_{z}}{\omega\mu} \underline{E}_{y}^{E} \\ \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial y} \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{H}_{y}^{E}} = \frac{\underline{k}_{z}}{\omega\mu} \underline{E}_{x}^{E} + \frac{1}{j\,\omega\mu} \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial x} \\ \underline{H}_{x}^{E} = -j \frac{\underline{k}_{z}}{\underline{k}_{t}^{2}} \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial x} \\ \underline{H}_{x}^{E} = -j \frac{\underline{k}_{z}}{\underline{k}_{t}^{2}} \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial y} \\ \underline{H}_{x}^{E} = -j \frac{\underline{k}_{z}}{\underline{k}_{t}^{2}} \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial y} \\ \underline{H}_{x}^{E} = -j \frac{\underline{k}_{z}}{\underline{k}_{t}^{2}} \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial y} \\ \underline{H}_{y}^{E} = -j \frac{\underline{k}_{z}}{\underline{k}_{t}^{2}} \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial x} \\ \underline{H}_{z}^{E} = -j \frac{\underline{k}_{z}}{\underline{k}_{t}^{2}} \frac{\partial \underline{E}_{z}^{E}}{\partial y} \\ \underline{H}_{z}^{E} = -j \frac{\underline{k}_{z}}{\underline{k}_{t}^{2}} \frac{\partial \underline{E}_{z}}{\partial y} \\ \underline{H}_{z}^{E} = -j \frac{\underline{k}_{z}}{\underline{k}_{t}^{2}} \frac{\partial \underline{E}_{z}}{\partial y} \\ \underline{H}_{z}^{E} = -j \frac{\underline{k}}{\underline{k}_{t}^{2}} \frac{\underline{H}_{z}}{\underline{k}_{t}^{2}} \frac{\partial \underline{E}_{z}}{\partial y} \\ \underline{H}_{z}^{E} = -j \frac{\underline{K}}{\underline{k}_{t}^{2}} \frac{\underline{H}_{z}}{\underline{K}} \\ \underline{H}_{z}^{E} = -j \frac{\underline{H}_{z}}{\underline{H}_{z}} \frac{\underline{H}_{z}}{\underline{H}_{z}} \frac{\underline{H}_{z}}{\underline{H}} \\ \underline{H}_{z}^{E} = -j \frac{\underline{H}}{\underline{H}_{z}} \frac{\underline{H}_{z}}{\underline{H}} \\ \underline{H}_{z}^{E} = -j \frac{\underline{H}}{\underline{H}_{z}} \frac{\underline{H}_{z}}{\underline{H}} \underbrace{H}_{z} \underbrace{H}_{z} \underline{H} \\ \underline{H}_{z}^{E} = -j \frac{\underline{H}}{\underline{H}_{z}} \frac{\underline{H}}{\underline{H}} \underbrace{H}_{z} \underbrace{H}_{z} \underbrace{H}_{z} \underbrace{H}_{z} \underbrace{H}_$$

Feldkomponenten geführter H-Wellen



• Aus dem Induktionsgesetz $\nabla \times \underline{\mathbf{E}}^H = -j \, \omega \mu \underline{\mathbf{H}}^H$ erhalten wir mit $\underline{E}_z^H = 0$ und $\partial / \partial z \rightarrow -j \, k_z$

$$\begin{pmatrix} \underline{H}_{x}^{H} \\ \underline{H}_{y}^{H} \\ \underline{H}_{z}^{H} \end{pmatrix} = \frac{1}{-j \, \omega \underline{\mu}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \underline{E}_{y}^{H}}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_{x}^{H}}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_{y}^{H}}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_{y}^{H}}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_{x}^{H}}{\partial y} \end{pmatrix} \implies \underline{H}_{y}^{H} = -\frac{\underline{k}_{z}}{\omega \mu} \underline{E}_{y}^{H}$$

• Aus dem Durchflutungsgesetz $\nabla \times \mathbf{\underline{H}}^{H} = \mathbf{j}\,\omega\underline{\varepsilon}\mathbf{\underline{E}}^{H}$ erhalten wir mit $\underline{k}^{2} = \omega^{2}\underline{\varepsilon}\mu$ und $\underline{k}_{t}^{2} = \underline{k}^{2} - \underline{k}_{z}^{2}$

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_{x}^{H} \\ \underline{E}_{y}^{H} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}_{z}^{H}}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_{y}^{H}}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_{z}^{H}}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_{z}^{H}}{\partial y} \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{E}_{x}^{H}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_{z}^{H}}{\partial y} + \frac{\underline{k}_{z}}{\omega\varepsilon} \underline{H}_{y}^{H} \\ \Rightarrow \underline{E}_{y}^{H} = -\frac{\underline{k}_{z}}{\underline{k}_{z}} \underline{H}_{x}^{H} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_{z}^{H}}{\partial x} \\ \Rightarrow \underline{H}_{y}^{H} = -j \frac{\underline{k}_{z}}{\underline{k}_{z}^{L}} \frac{\partial \underline{H}_{z}^{H}}{\partial x} \\ \underline{H}_{y}^{H} = -j \frac{\underline{k}_{z}}{\underline{k}_{z}^{L}} \frac{\partial \underline{H}_{z}^{H}}{\partial x} \\ \underline{H}_{y}^{H} = -j \frac{\underline{k}_{z}}{\underline{k}_{z}^{L}} \frac{\partial \underline{H}_{z}^{H}}{\partial x} \\ \underline{H}_{y}^{H} = -j \frac{\underline{k}_{z}}{\underline{k}_{z}^{2}} \frac{\partial \underline{H}_{z}^{H}}{\partial y}$$

Skalare Wellengleichungen



 Für geführte Wellen können wir also alle vier transversalen Feldkomponenten aus den beiden unabhängigen longitudinalen Feldkomponenten <u>E</u>_z und <u>H</u>_z ableiten, für welche wir im Folgenden ansetzen:

$$\underline{E}_{z}(x, y, z) = \underline{E}_{z,0} F^{E}(x, y) e^{-j \underline{k}_{z}^{E} z}$$
$$\underline{H}_{z}(x, y, z) = \underline{H}_{z,0} F^{H}(x, y) e^{-j \underline{k}_{z}^{H} z}$$

 Zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen genügt also nunmehr die Lösung der beiden skalaren Wellengleichungen

$$\Delta \underline{E}_z + \underline{k}^2 \underline{E}_z = 0$$

$$\Delta \underline{H}_z + \underline{k}^2 \underline{H}_z = 0.$$

• An der Grenzfläche zwischen den zwei Medien müssen die Stetigkeits- bzw. die Randbedingungen erfüllt sein.

Produktansatz von Bernoulli (I)



- Die Lösung der Wellengleichung kann elegant über den Produktansatz von Bernoulli (auch Separationsansatz) gefunden werden.
- Dazu nehmen setzen wir für die transversale Feldverteilung an, dass F(x,y) = X(x)Y(y). D.h.

$$\underline{E}_{z} = \underline{E}_{z,0} \underline{X}^{E}(x) \underline{Y}^{E}(y) e^{-j \underline{k}_{z}^{E} z}$$
$$\underline{H}_{z} = \underline{H}_{z,0} \underline{X}^{H}(x) \underline{Y}^{H}(y) e^{-j \underline{k}_{z}^{H} z}$$

• Eingesetzt in die Hemholtzgleichung ergeben sich für die *E*- und die *H*-Welle jeweils Gleichungen der Form

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \underline{k}^2 - \underline{k}_z^2 = 0$$

Produktansatz von Bernoulli (II)



Diese lassen sich nun separieren in zwei homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial x^2} + \underline{k}_x^2 \underline{X}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \underline{Y}}{\partial y^2} + \underline{k}_y^2 \underline{Y}(y) = 0 \text{ ,}$$

welche gekoppelt sind über $\underline{k}_x^2+\underline{k}_y^2=\underline{k}^2-\underline{k}_z^2.$

• Allgemein werden diese gelöst durch

$$\underline{X}(x) = \begin{cases} \underline{a}\sin\left(\underline{k}_{x}x\right) + \underline{b}\cos\left(\underline{k}_{x}x\right) & \forall & \underline{k}_{x} \neq 0\\ \underline{a}_{0} + \underline{b}_{0}x & \forall & \underline{k}_{x} = 0 \end{cases}$$

$$\underline{Y}(y) = \begin{cases} \underline{c}\sin\left(\underline{k}_{y}y\right) + \underline{d}\cos\left(\underline{k}_{y}y\right) & \forall & \underline{k}_{y} \neq 0\\ \underline{c}_{0} + \underline{d}_{0}y & \forall & \underline{k}_{y} = 0 \end{cases}$$

Vorlesungsinhalte

1. Kanalwellenleiter

2. Rechteckhohlleiter

3. Was Sie gelernt haben sollten

Rechteckhohlleiter



• Als erstes Beispiel für einen Kanalwellenleiter betrachten wir einen Rechteckhohlleiter der Breite *a* und Höhe *b*.



• Der Hohlleiter habe ideal leitende Wände ($\kappa \to \infty$) und in seinem Inneren herrsche ein Vakuum (d.h. $\kappa = 0$ und $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$).

E-Wellen

 An den Wänden müssen gemäß der Randbedingungen die tangentialen E-Feld Komponenten verschwinden, also

$$\underline{E}_z(x = 0, y, z) = \underline{E}_z(x = a, y, z) = 0 \underline{E}_z(x, y = 0, z) = \underline{E}_z(x, y = b, z) = 0 .$$

- Nichttriviale Lösungen (d.h. Lösungen die von der Nulllösung abweichen) ergeben sich für $\underline{k}_x = m\pi/a$ und $\underline{k}_y = n\pi/b$ mit $m, n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Im Allgemeinen erhalten wir damit für E-Wellen Lösungen der Form

$$\underline{E}_z(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{E}_z^{m,n}(x,y,z)$$

mit

$$\underline{E}_{z}^{m,n}(x,y,z) = \underline{E}_{z,0}^{m,n} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\underline{k}_{z,m,n}z}$$



H-Wellen

 Bei H-Wellen müssen an den Wänden ebenfalls die tangentialen E-Feld Komponenten verschwinden. Daraus folgt mit Folie 9

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\Big|_{x=0,y,z} = \left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\right|_{x=a,y,z} = 0 \qquad \text{sowie} \qquad \left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}\right|_{x,y=0,z} = \left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}\right|_{x,y=b,z} = 0 \;.$$

- Nichttriviale Lösungen ergeben sich für $\underline{k}_x = m\pi/a$ und $\underline{k}_y = n\pi/b$ mit $m, n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$, wobei m und n nicht gleichzeitig null sein dürfen.
- Für H-Wellen erhalten wir also Lösungen der Form

$$\underline{H}_z(x,y,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=0\\n=m\neq 0}}^{\infty} \underline{H}_z^{m,n}(x,y,z)$$

mit

$$\underline{H}_{z}^{m,n}(x,y,z) = \underline{H}_{z,0}^{m,n} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\underline{k}_{z,m,n}z} .$$

Moden im Wellenleiter



- Eine Mode (lat. Modus) in einem Wellenleiter bezeichnet eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen für E und H unter gegebenen Rand- bzw. Stetigkeitsbedingungen, deren transversale Feldverteilung sich während der Ausbreitung nicht ändert.
- In Kanalwellenleitern mit endlichen Abmessungen ist abhängig von der Frequenz eine endliche Zahl an Moden ausbreitungsfähig.
- Die Menge der Moden (lat. Modi) bildet ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bzw. eine orthogonale Modenbasis. Jede im Wellenleiter ausbreitungsfähige Feldverteilung kann als gewichtete Überlagerung von Einzelmoden dargestellt werden.
- Nicht jede Mode wird im Wellenleiter geführt, es können ggf. auch Strahlungsmoden existieren, welche nach außen abgestrahlt werden.

Moden der E-Welle im Rechteckhohlleiter



Die Tabelle zeigt die Realteile $E_z^{m,n}$ m = 2m = 0m = 1 $E_z^{m,n} = \Re\{E_z^{m,n}\}$ der ersten vier Moden der E-Welle in der Ebene z = 0 für a/b = 3/2. Je dunkler der Rotton, desto positiver n = 0der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer. Die Abbildungen zeigen, dass m bzw. n die Anzahl der Extrema entlang der n = 1horizontalen (x) bzw. vertikalen Achse (y) angibt.

n=2

Moden der H-Welle im Rechteckhohlleiter



- Die Tabelle zeigt die Realteile H^{m,n} = \\${<u>H</u>^{m,n}} der ersten acht Moden der H-Welle in der Ebene z = 0 f
 ür a/b = 3/2.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.
- Die Abbildungen zeigen, dass m bzw. n die Anzahl der Extrema entlang der horizontalen (x) bzw. vertikalen Achse (y) angibt.



Ausbreitungskonstante und Grenzfrequenz



- Bei der Lösung der Wellengleichung haben wir für die transversale Wellenzahl die Bedingung $\underline{k}^2 \underline{k}_z^2 = \underline{k}_x^2 + \underline{k}_y^2$ erhalten.
- Im Rechteckhohlleiter mit $\underline{k} = k_0 = \omega/c_0$ erhalten wir daraus für eine gegebene Kombination der Indizes m und n die Ausbreitungskonstante

$$\underline{k}_{z,m,n} = \beta_{m,n} + j \,\alpha_{m,n} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{g,m,n}^2} \,.$$

• Für Frequenzen größer der Grenzfrequenz, also für

$$\omega > \omega_{\mathrm{g},m,n} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

wird der Term unter der Wurzel positiv und die Ausbreitungskonstante somit reellwertig, was je nach Vorzeichen einer verlustlosen Ausbreitung in positive bzw. negative *z*-Richtung entspricht.

Ausbreitungskonstanten



- Die Abbildung zeigt die normierte Ausbreitungskonstante β_z/k_0 als Funktion der Wellenzahl $k_0 = \omega/c$ für a/b = 3/2.
- Die Ausbreitungskonstanten der E^{m,n}- und H^{m,n}-Moden sind im Rechteckhohlleiter f
 ür ein gegebenes Modenzahlpaar (unterschieden durch die Tupel (m, n)) identisch.
- Die gestrichelten vertikalen Linien geben jeweils die normierten Grenzfrequenzen an.
- Für a/b > 1 bzw. a/b < 1 ist die $H^{1,0}$ bzw. $H^{0,1}$ -Mode die Grundmode.



Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (I)



• Lösen wir für $\omega > \omega_{g,m,n}$ den obigen Ausdruck für die Phasenkonstante nach ω auf, so erhalten wir die Dispersionsrelation

$$\omega = \sqrt{\beta_{m,n}^2 c_0^2 + \omega_{g,m,n}^2} = \beta_{m,n} c_0 \sqrt{1 + \frac{\omega_{g,m,n}^2}{\beta_{m,n}^2 c_0^2}}.$$

Daraus ergeben sich nun die Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeit zu

$$\begin{split} v_{\mathrm{ph},m,n} &= \frac{\omega}{\beta_{m,n}} = c_0 \sqrt{1 + \frac{\omega_{\mathrm{g},m,n}^2}{\beta_{m,n}^2 c_0^2}} = c_0 \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{\mathrm{g},m,n}^2}} \\ v_{\mathrm{gr},m,n} &= \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta_{m,n}} = \frac{\pm c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_{\mathrm{g},m,n}^2}{\beta_{m,n}^2 c_0^2}}} = c_0 \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{\mathrm{g},m,n}^2}{\omega^2}} \,. \end{split}$$

• Wir erhalten somit wie bei der Reflexion am Leiter $v_{\text{ph},m,n}v_{\text{gr},m,n} = c_0^2$.

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (II)



- Die Abbildung zeigt die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit normiert auf die Grenzfrequenz der jeweiligen Modenzahlen.
- Die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit verhält sich damit unabhängig von der Mode bezogen auf die entsprechende Grenzfrequenz exakt wie im Parallelplattenleiter.





Hohlleiterwellenlänge (I)

• Anstatt der Ausbreitungskonstante $\beta_{m,n}$ wird für gegebene m und n häufig die Hohlleiterwellenlänge angegeben, gemäß

$$\lambda_{m,n} = \frac{2\pi}{|\beta_{m,n}|} = \frac{2\pi c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{\mathsf{g},m,n}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{\mathsf{g},m,n}^2}}}$$

- Dabei ist $\lambda = 2\pi c/\omega$ die Freiraumwellenlänge und $\lambda_{g,m,n}$ die Grenzwellenlänge, ab der eine gegebene Wellenlösung der Wellengleichung ausbreitungsfähig ist.
- Die Grenzwellenlänge ergibt sich zu

$$\lambda_{\mathbf{g},m,n} = \frac{2\pi c}{\omega_{\mathbf{g},m,n}} = \frac{2a}{\sqrt{m^2 + \left(n\frac{a}{b}\right)^2}} \,.$$

- Für ein gegebenes Verhälnis a/b von Höhe zu Breite ist die Grenzwellenlänge proportional zur Breite des Hohlleiters.
- Die Hohlleiterwellenlänge ist immer größer als die Freiraumwellenlänge.

Hohlleiterwellenlänge (II)



- Die Abbildung zeigt die normierte Hohlleiterwellenlänge für einen Recheckhohlleiter mit dem Seitenverhältnis a/b = 3/2 als Funktion der normierten Freiraumwellenlänge.
- Die gestrichelten vertikalen Linien geben jeweils die Grenzwellenlänge an.



Vorlesungsinhalte

1. Kanalwellenleiter

2. Rechteckhohlleiter

3. Was Sie gelernt haben sollten

Was Sie gelernt haben sollten



- Was eine E- bzw. H-Welle ist und welche Rolle diese Unterscheidung f
 ür die L
 ösung der Maxwellschen Gleichungen in Kanalwellenleitern spielt.
- Wie wir die Wellengleichungen für die longitudinalen Feldkomponenten analytisch lösen können.
- Welche Randbedingungen im Rechteckhohlleiter erfüllt sein müssen und welche Lösungen wir daher für die longitudinalen Feldkomponenten der E- und H-Wellen erhalten.
- Was eine Mode ist und unter welchen Bedingungen sich die einzelnen Moden im Rechteckhohlleiter ausbreiten können.
- Welche Modenzahlen für die E- bzw. H-Wellen zulässig sind.
- Wie die Moden im Rechteckhohlleiter aussehen.
- Die Bedeutung der Grenzfrequenz für die Moden des Rechteckhohlleiters.
- Wie sich die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im Rechteckhohlleiter verhalten.