

Vorlesung 12: Rundhohlleiter

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2021/22

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 8. März 2022

Vorlesungsinhalte

1. Zylindersymmetrische Kanalwellenleiter

2. Rundhohlleiter

3. Was Sie gelernt haben sollten

Vorlesungsinhalte

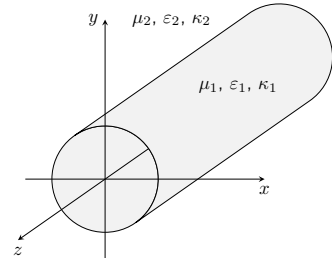
1. Zylindersymmetrische Kanalwellenleiter

2. Rundhohlleiter

3. Was Sie gelernt haben sollten

Zylindersymmetrische Kanalwellenleiter

- Im Folgenden wollen wir die Wellenausbreitung in zylindersymmetrischen Kanalwellenleitern betrachten, deren Querschnitt entlang der Ausbreitungsrichtung z konstant ist.
- Einfachheit halber beschränken wir uns auf Wellenleiter mit in radialer Richtung stückweise homogenen Medien. Entlang der φ -Koordinate seien die Medien stets homogen, d.h. sie sind zylindersymmetrisch.
- Zudem sei der Wellenleiter quellenfrei, d.h. $\rho = 0$ und es fließen keine freien Ströme.
- An den Grenzflächen müssen jeweils die Rand- bzw. Stetigkeitsbedingungen erfüllt sein.
- Die Abbildung zeigt ein Beispiel eines zylindrischen Kanalwellenleiters, der sich aus zwei homogenen Medien zusammensetzt.
- Beispiele sind Rundhohlleiter und Glasfasern.



Geführte E- und H-Wellen (I)

- Im Folgenden wollen wir geführte E- und H-Wellen betrachten, welche sich mit invarianter transversaler Feldverteilung $\underline{F}^E(\rho, \varphi)$ bzw. $\underline{F}^H(\rho, \varphi)$ mit der Ausbreitungskonstanten $\underline{k}_z$ in z -Richtung ausbreiten.
- Für die longitudinalen Feldkomponenten in Zylinderkoordinaten setzen wir an:

$$\begin{aligned}\underline{E}_z(\rho, \varphi, z) &= \underline{E}_0 \underline{F}^E(\rho, \varphi) e^{-j \underline{k}_z z} \\ \underline{H}_z(\rho, \varphi, z) &= \underline{H}_0 \underline{F}^H(\rho, \varphi) e^{-j \underline{k}_z z} .\end{aligned}$$

- In einem radialen Abschnitt mit homogenem Medium und Wellenzahl $\underline{k}$ müssen die longitudinalen Feldkomponenten die skalaren Helmholtzgleichungen

$$\begin{aligned}\Delta \underline{E}_z + \underline{k}^2 \underline{E}_z &= 0 \\ \Delta \underline{H}_z + \underline{k}^2 \underline{H}_z &= 0\end{aligned}$$

unter gegebenen Rand- bzw. Stetigkeitsbedingungen erfüllen.

Geführte E- und H-Wellen (II)

- Im allgemeinen Fall sind die longitudinalen Feldkomponenten $\underline{E}_z$ und $\underline{H}_z$ aufgrund der Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche verkoppelt. Hohlleiter mit ideal leitenden Wänden bilden dabei eine Ausnahme.
- Wie schon zuvor für kartesische Koordinaten gezeigt, lassen sich die transversalen Feldkomponenten aus $\underline{E}_z$ und $\underline{H}_z$ ableiten gemäß

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_\rho &= \underline{E}_\rho^E + \underline{E}_\rho^H = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} + \frac{\omega \mu}{\underline{k}_z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} \right) \\
 \underline{E}_\varphi &= \underline{E}_\varphi^E + \underline{E}_\varphi^H = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} - \frac{\omega \mu}{\underline{k}_z} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} \right) \\
 \underline{H}_\rho &= \underline{H}_\rho^H + \underline{H}_\rho^E = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} - \frac{\omega \varepsilon}{\underline{k}_z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} \right) \\
 \underline{H}_\varphi &= \underline{H}_\varphi^H + \underline{H}_\varphi^E = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} + \frac{\omega \varepsilon}{\underline{k}_z} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} \right) .
 \end{aligned}$$

Lösung der Helmholtzgleichung in Zylinderkoordinaten (I)

- Gemäß dem Produktansatz von Bernoulli setzen für E- bzw. H-Wellen an, dass $\underline{F}(\rho, \varphi) = R(\rho) \underline{\Phi}(\varphi)$.
- Setzen wir den obigen Ansatz für die longitudinalen Feldkomponenten geführter Wellen in Zylinderkoordinaten in die Helmholtzgleichung ein, so erhalten wir Gleichungen der Form

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{1}{\underline{\Phi}} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}}{\partial \varphi^2} + (\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2) \rho^2 = 0$$

- Diese lässt sich mit der Separationskonstante $\underline{m}$ und der transversalen Wellenzahl $\underline{k}_t^2 = \underline{k}^2 - \underline{k}_z^2$ separieren in die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \underline{\Phi}}{\partial \varphi^2} + \underline{m}^2 \underline{\Phi} = 0$$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} + [\underline{k}_t^2 \rho^2 - \underline{m}^2] R = 0 .$$

Lösung der Helmholtzgleichung in Zylinderkoordinaten (II)

- Die erste Gleichung ist eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche unter der Randbedingung $\Phi(\varphi = 0) = \Phi(\varphi = 2\pi)$, für ganzzahlige $m \geq 0$ Lösungen folgender Form aufweist

$$\Phi(\varphi) = \underline{c}_1 \sin(m\varphi) + \underline{c}_2 \cos(m\varphi) .$$

- Bei der zweiten Gleichung unterscheiden wir für reellwertige m zwei Fälle:
 - Für reellwertige und positive $\underline{k}_t^2$, d.h. rein reellwertige k_t , können wir die zweite Gleichung mit $x = k_t \rho$ in die Besselsche Differentialgleichung überführen, deren reellwertige Lösungen allgemein als Zylinderfunktionen bzw. Besselfunktionen bezeichnet werden.
 - Für reellwertige und negative $\underline{k}_t^2$, d.h. rein imaginäre $\underline{k}_t$, können wir die zweite Gleichung mit $x = \Im\{\underline{k}_t\}\rho$ in die modifizierte Besselsche Differentialgleichung überführen, deren reellwertige Lösungen als modifizierte Besselfunktionen bezeichnet werden.

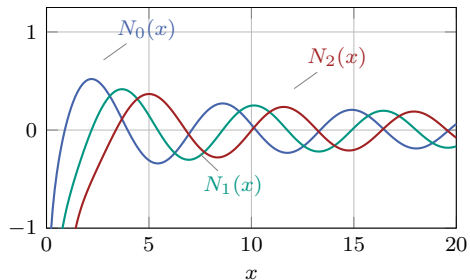
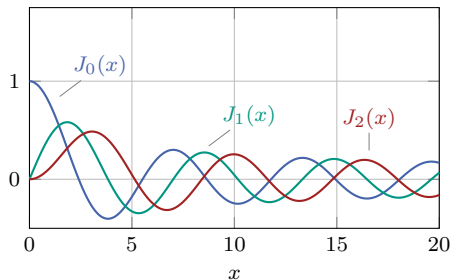
Besselfunktionen

- Die Besselsche Differentialgleichung lautet:

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} + [x^2 - m^2] f = 0$$

- Sie wird gelöst durch:

- Besselfunktionen erster Gattung: $J_m(x)$
- Besselfunktionen zweiter Gattung: $N_m(x)$ (auch Neumann Funktionen)



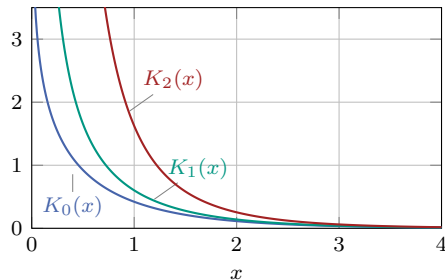
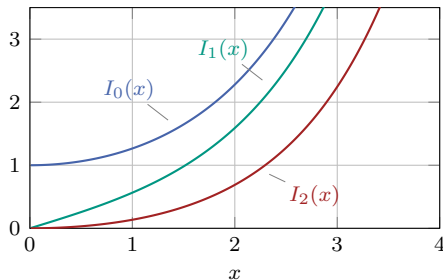
Modifizierte Besselfunktionen

- Die modifizierte Besselsche Differentialgleichung lautet:

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} - [x^2 + m^2] f = 0$$

- Sie wird gelöst durch:

- Modifizierte Besselfunktionen erster Gattung: $I_m(x)$
- Modifizierte Besselfunktionen zweiter Gattung: $K_m(x)$ (auch MacDonald-Funktionen)



Weitere Lösungen der Radialgleichung

- Für den Fall, dass $\underline{k}_t = 0$ gilt, erhalten wir aus der (modifizierten) Besselschen Differentialgleichung die Eulersche Differentialgleichung

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} - \underline{m}^2 R = 0 .$$

- Diese Differentialgleichung können wir mit $\underline{c}_3, \underline{c}_4 \in \mathbb{C}$ lösen durch

$$R(\rho) = \rho^{\pm m} (\underline{c}_3 \ln \rho + \underline{c}_4) ,$$

was sich für den Fall $m = 0$ weiter vereinfacht zu

$$R(\rho) = \underline{c}_3 \ln \rho + \underline{c}_4 .$$

Vorlesungsinhalte

1. Zylindersymmetrische Kanalwellenleiter

2. Rundhohlleiter

3. Was Sie gelernt haben sollten

Einleitung und Motivation

- Hohlleiter mit kreisförmigen oder elliptischem Querschnitt sind flexibler als Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt. Längere Wellenleiter lassen sich so auf Kabeltrommeln aufwickeln.
- Gerillte Hohlleiter (engl. corrugated waveguides) lassen noch geringere Biegeradien zu.
- Aufgrund ihrer Flexibilität werden sie häufig als Wellenleiter für Funk-Basisstationen und Antennenzuläufe verwendet.



Lösung der Randbedingungen für E-Wellen

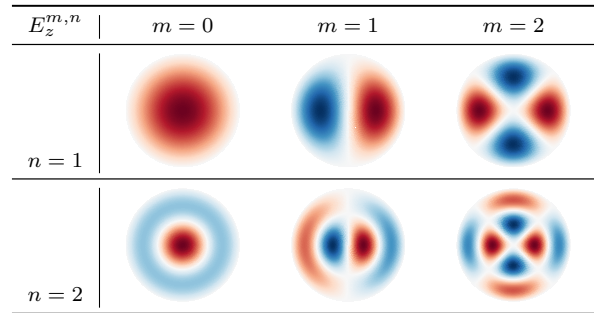
- An der ideal leitenden Innenwand des Rundhohlleiters bei $\rho = a$ müssen gemäß der Randbedingungen die tangentialen Komponenten des E-Feldes verschwinden.
- Dies ist nur für reelle $k_t^2 = k^2 - k_z^2 > 0$ möglich, da die modifizierten Besselfunktionen für $\rho > 0$ keine Nullstellen besitzen.
- Für E-Wellen muss also gelten, dass $\underline{E}_z(a, \varphi, z) = \underline{E}_0 \underline{F}^E(a, \varphi) e^{-j k_z z} = 0$.
- Da die Neumannfunktionen bei $\rho = 0$ eine Singularität aufweisen, kommen für die radiale Abhängigkeit nur die Besselfunktionen in Frage, sodass

$$\underline{E}_z^{m,n} = \begin{Bmatrix} \underline{E}_0^{m,n,h} \\ \underline{E}_0^{m,n,v} \end{Bmatrix} J_m(k_t \rho) \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} e^{-j k_z z}$$

- Damit die Randbedingung $\underline{E}_z^{m,n}(\rho = a) = 0$ erfüllt ist, muss gelten, dass $k_t = \frac{j_{m,n}}{a}$ ist, wobei $j_{m,n}$ die n -te Nullstelle der Besselfunktion J_m größer null ist.
- Für $m > 0$ ergibt sich jeweils eine horizontal und eine vertikal orientierte Lösung (man spricht von zweifacher Entartung).

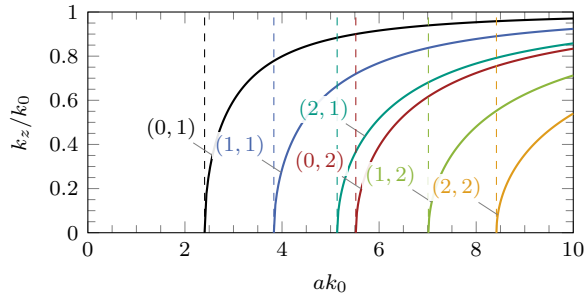
Moden der E-Welle im Rundhohlleiter

- Die Tabelle zeigt die Realteile $E_z^{m,n} = \Re\{E_z^{m,n}\}$ der ersten sechs Moden der E-Welle in der Ebene $z = 0$.
- Die Schwingungsfrequenz sowie der Hohlleiterradius sind konstant.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.
- Die Abbildungen zeigen, dass m die Anzahl der Perioden entlang der azimuthalen Achse (φ) bzw. n die Anzahl der Nullstellen (*exklusive* Koordinatenursprung) entlang der radialen Achse (r) angibt.



Ausbreitungskonstanten der E-Welle

- Die Abbildung zeigt die normierte Ausbreitungskonstante der *E-Welle* k_z/k_0 als Funktion der normierten Wellenzahl $ak_0 = a\omega/c$.
- Die Tupel (m, n) geben die entsprechenden Modenzahlen an.
- Die gestrichelten vertikalen Linien geben jeweils die normierten Grenzfrequenzen an; die Tabelle schlüsselt die zugehörigen Werte (die Nullstellen der Besselfunktion) auf.



$j_{m,n}$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$n = 1$	2.40483	3.83171	5.13562
$n = 2$	5.52008	7.01559	8.41724

Lösung der Randbedingungen für H-Wellen

- Analog setzen wir für H-Wellen an, dass

$$\underline{H}_z^{m,n} = \begin{Bmatrix} \underline{H}_0^{m,n,h} \\ \underline{H}_0^{m,n,v} \end{Bmatrix} J_m(k_t \rho) \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} e^{-j k_z z}.$$

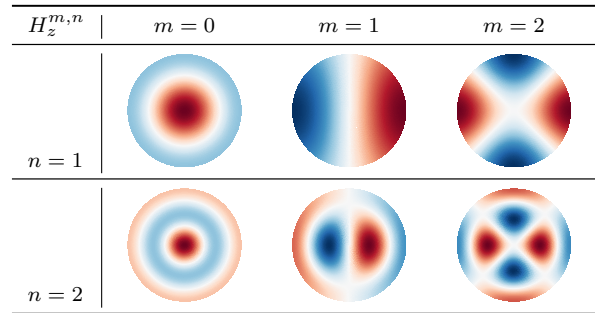
- Im Falle von H-Wellen existiert keine $\underline{E}_z$ -Komponente. Es muss jedoch auch die $\underline{E}_\varphi$ -Komponente auf der Innenseite der Hohlleiterwand verschwinden. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{E}_\varphi^H(a, \varphi, z) &= j \frac{\omega \mu}{k_t^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \underline{H}_0 \frac{\partial \underline{F}^H(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} e^{-j k_z z} = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{dJ_m(k_t \rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=a} &\propto J'_m(k_t a) = 0 \end{aligned}$$

- Dabei muss also für die transversale Wellenzahl gelten, dass $k_t = \frac{j'_{m,n}}{a}$ ist, wobei $j'_{m,n}$ die n -te Nullstelle der abgeleiteten Besselfunktion J'_m größer null ist.

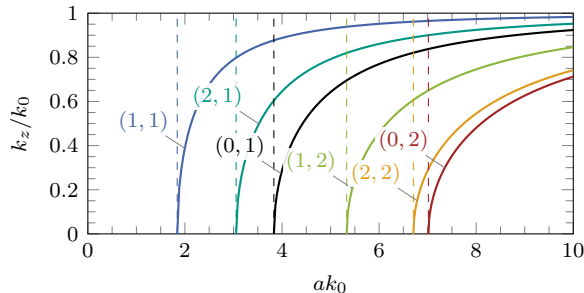
Moden der H-Welle im Rundhohlleiter

- Die Tabelle zeigt die Realteile $H_z^{m,n} = \Re\{H_z^{m,n}\}$ der ersten sechs Moden der H-Welle in der Ebene $z = 0$.
- Die Schwingungsfrequenz sowie der Hohlleiterradius sind konstant.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.
- Die Abbildungen zeigen, dass m die Anzahl der Perioden entlang der azimuthalen Achse (φ) bzw. n die Anzahl der Nullstellen (*inklusive* Koordinatenursprung) entlang der radialen Achse (r) angibt.



Ausbreitungskonstanten der H-Welle

- Die Abbildung zeigt die normierte Ausbreitungskonstante der *H-Welle* k_z/k_0 als Funktion der normierten Wellenzahl $ak_0 = a\omega/c$.
- Die Tupel (m, n) geben die entsprechenden Modenzahlen an.
- Die gestrichelten vertikalen Linien geben jeweils die normierten Grenzwellenzahlen an; die Tabelle schlüsselt die zugehörigen Werte (die Nullstellen der abgeleiteten Besselfunktion) auf.
- Die Grundmode ist damit die $H^{1,1}$ -Mode, die nächsthöhere Mode ist dann die $E^{0,1}$ -Mode.



$j'_{m,n}$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$n = 1$	3.83171	1.84118	3.05424
$n = 2$	7.01559	5.33144	6.70613

Vorlesungsinhalte

1. Zylindersymmetrische Kanalwellenleiter

2. Rundhohlleiter

3. Was Sie gelernt haben sollten

Was Sie gelernt haben sollten

- Mit welchem Ansatz wir die Wellengleichungen für die longitudinalen Feldkomponenten im Rundhohlleiter analytisch lösen können.
- Wie die Besselsche bzw. modifizierte Besselsche Differentialgleichung zusammenhängen.
- Welche Funktionen die Besselsche bzw. modifizierte Besselsche Differentialgleichung lösen.
- Welche Randbedingungen im Rundhohlleiter erfüllt sein müssen und welche Lösungen wir daher für die longitudinalen Feldkomponenten der E- und H-Wellen erhalten.
- Wie die E- bzw. H-Moden im Rundhohlleiter aussehen.
- Weshalb sich die Ausbreitungskonstanten der E- und H-Wellen für identische Modenzahlpaare unterscheiden.