Karlsruher Institut für Technologie

IPQ

Vorlesung 13: Dielektrischer Schichtwellenleiter

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2021/22

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 21. Januar 2022

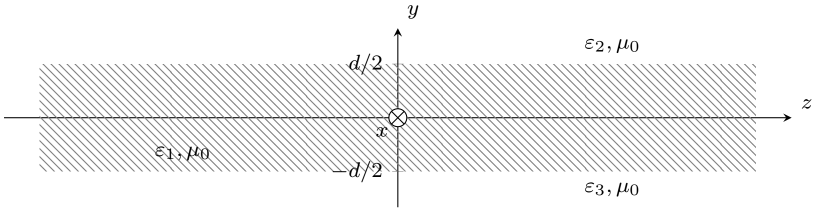
Vorlesungsinhalte

Karlsruher Institut für Technologie

Vorlesungsinhalte

Dielektrischer Schichtwellenleiter

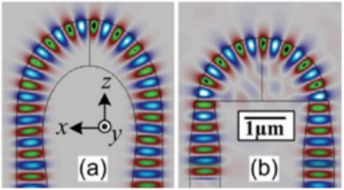
- Wie die Parallelplattenleitung gehört der dielektrische Schichtwellenleiter zur Klasse der Dreischichtenprobleme.

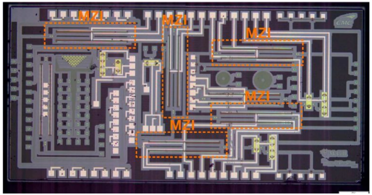


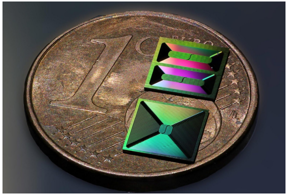
- Der Wellenleiter sei in der xz-Ebene unendlich ausgedehnt und habe eine Dicke d.
- Alle Schichten seien nichtleitend, d.h. $\kappa = 0$, frei von Raumladungen, d.h. $\rho = 0$, und haben die Permeabilität $\mu = \mu_0$.
- Die elektrische Permittivität in der Schicht $i \in \{1, 2, 3\}$ sei $\varepsilon_i = \varepsilon_{\mathrm{r},i}\varepsilon_0 = n_i^2\varepsilon_0$ mit der Brechzahl n_i (oft auch Brechungsindex genannt).
- Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden auf den Fall $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \iff n_2 = n_3$.

Anwendungsbeispiele

- Die Betrachtungen des Schichtwellenleiters lassen sich auch auf Lichtwellenleiter mit rechteckigem Querschnitt, wie sie in photonischen integrierten Schaltungen verwendet werden, übertragen.
- Durch die geringere Wellenlänge von Licht können solche Wellenleiter deutlich kleinere Maße als Mikrowellenleiter haben (Größenordnung Mikrometer).
- Dies erlaubt eine besonders dichte Integration photonischer Wellenleiter und Komponenten, wodurch solche photonischen Chips deutlich kleiner und energieeffizienter als elektrische Schaltungen sind.
- Anwendungsbereiche: optische Kommunikationstechnik, Messtechnik (Lidar, optische Kohärenztomographie), Biophotonik zur medizinischen Diagnostik, Quantencomputer, Neuromorphic Computing, etc.





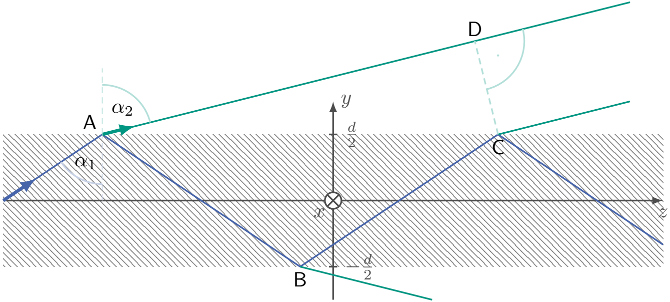


Vorlesungsinhalte

Karlsruher Institut für Technologie

Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter

- Im Folgenden betrachten wir eine harmonische ebene Welle, die unter einem Winkel α_1 innerhalb des Wellenleiters auf die Grenzfläche trifft.
- Geführte Wellen sind nur dann möglich, wenn vollständige Reflexion bzw. Totalreflexion an der Grenzfläche auftritt.
- Für die Wellenzahl innerhalb bzw. außerhalb der Platte gilt $k_{1,2} = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_{1,2}} = \frac{\omega}{c_0} n_{1,2} = k_0 n_{1,2}$.



Grenzwinkel der Totalreflexion (Wdh.)

- Beim Übergang von einem Medium mit höherem Brechungsindex (optisch dichter) zu einem Medium mit geringerem Brechungsindex (optisch dünner), kann - in Abhängigkeit von dem Einfallswinkel gegenüber der Grenzflächennormalen α_1 - Totalreflexion auftreten.
- Das Snelliussche Brechungsgesetz lässt sich für $\alpha_1 = \alpha_{\mathsf{krit}}$ schreiben als

$$\sin\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha_{\mathsf{krit}} = 1\,.$$

- Wir beobachten Totalreflexion für Winkel

$$\alpha_1 \geq \alpha_{\mathsf{krit}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\,.$$

- Gemäß der Strahlenoptik ist eine Wellenführung für alle Winkel $\alpha_1 > \alpha_{\mathsf{krit}}$ möglich.

Fresnelsche Beziehungen (Wdh.)

- Die Fresnelschen Beziehungen für die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten lauten

$$\underline{r}_\mathsf{s} = \frac{n_1\cos(\alpha_1) - n_2\cos(\alpha_2)}{n_1\cos(\alpha_1) + n_2\cos(\alpha_2)} \qquad \underline{r}_\mathsf{p} = \frac{n_2\cos(\alpha_1) - n_1\cos(\alpha_2)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{t}_\mathsf{s} = \frac{2n_1\cos(\alpha_1)}{n_1\cos(\alpha_1) + n_2\cos(\alpha_2)} \qquad \underline{t}_\mathsf{p} = \frac{2n_1\cos(\alpha_1)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)}$$

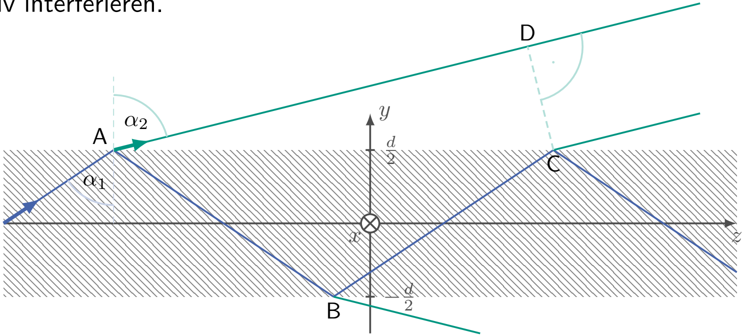
- Im Falle von Totalreflexion bei $n_1 > n_2$ werden die Reflexionskoeffizienten komplexwertig. Ihre Argumente ergeben sich zu

$$\arg(\underline{r}_\mathsf{s}) = -2\arctan\left(\sqrt{\frac{n_1^2\sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_1^2\cos^2(\alpha_1)}}\right) \quad \text{und} \quad \arg(\underline{r}_\mathsf{p}) = -2\arctan\left(\frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{n_1^2\sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_2^2\cos^2(\alpha_1)}}\right)$$

- Es gilt zu beachten, dass die Transmissionskoeffizienten im Falle von Totalreflexion keineswegs verschwinden. Für ihre Argumente gilt jeweils $\arg(\underline{t}) = \frac{1}{2}\arg(\underline{r})$.
- Im Falle von Totalreflexion erfahren die reflektierte und die transmittierte Welle an der Grenzfläche somit eine Phasendrehung.

Ausbreitungsbedingung

- Um eine in z-Richtung geführte Welle zu erhalten, müssen die an den Punkten A und C transmittierten Felder konstruktiv interferieren.



- Das bedeutet, dass die akkumulierte Phasendrehung auf den Pfaden $\overline{\mathrm{AC}}$ und $\overline{\mathrm{AD}}$ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π identisch sein müssen. Also mit ganzzahligem m

$$\arg(\underline{r}) + \overline{\mathrm{AB}}k_1 + \arg(\underline{r}) + \overline{\mathrm{BC}}k_1 + \arg(\underline{t}) = \arg(\underline{t}) + \overline{\mathrm{AD}}k_2 + m\,2\pi$$

Geometrische Betrachtung

Karlsruher Institut für Technologie

- Aus den geometrischen Beziehungen ergibt sich

$$\overline{\mathsf{AB}} = \overline{\mathsf{BC}} = \frac{d}{\cos(\alpha_1)}$$

$$\overline{\mathsf{AC}} = 2d\tan(\alpha_1)$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathsf{AD}} &= \overline{\mathsf{AC}}\sin(\alpha_2) = \overline{\mathsf{AC}}\,\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha_1) = 2d\,\frac{n_1}{n_2}\,\frac{\sin^2(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} \\ &= 2d\,\frac{n_1}{n_2}\,\frac{1-\cos^2(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} = \frac{2dn_1}{n_2\cos(\alpha_1)} - \frac{2dn_1}{n_2}\cos(\alpha_1)\end{aligned}$$

- Zudem gilt $\arg(\underline{t}) = \frac{1}{2}\arg(\underline{r})$.
- Somit erhalten wir Wellenführung bei Erfüllung der Bedingung

$$\arg(\underline{r}) = -d\,k_1\cos(\alpha_1) + m\,\pi\,.$$

Eigenwertgleichung für senkrechte Polarisation

- Die oben diskutierte Bedingung für eine geführte Welle wird auch als Eigenwertgleichung bezeichnet. Sie lässt sich nun für senkrechte Polarisation schreiben als

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{n_1^2\sin^2(\alpha_1)-n_2^2}{n_1^2\cos^2(\alpha_1)}}\right)=\frac{d\,k_1}{2}\cos(\alpha_1)-m\,\frac{\pi}{2}$$

- Mit $\xi=\frac{d\,k_1}{2}\cos(\alpha_1)$ und $\eta=\frac{d\,k_1}{2}\sqrt{\sin^2(\alpha_1)-\frac{n_2^2}{n_1^2}}$ ergibt sich daraus

$$\eta=\xi\tan\left(\xi-m\,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\xi\tan(\xi) & \text{für } m \text{ gerade}\\ -\xi\cot(\xi) & \text{für } m \text{ ungerade}\end{cases}$$

- Weiterhin muss gemäß der obigen Definitionen und mit $\gamma=\frac{dk_1}{2}\sqrt{1-\frac{n_2^2}{n_1^2}}$ gelten, dass

$$\eta=\sqrt{\gamma^2-\xi^2}$$

Eigenwertgleichung für parallele Polarisation

Karlsruher Institut für Technologie

- Wie zuvor können wir auch die Eigenwertgleichung für die parallele Polarisation herleiten:

$$\arctan\left(\frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{n_1^2\sin^2(\alpha_1)-n_2^2}{n_2^2\cos^2(\alpha_1)}}\right)=\frac{d\,k_1}{2}\cos(\alpha_1)-m\,\frac{\pi}{2}$$

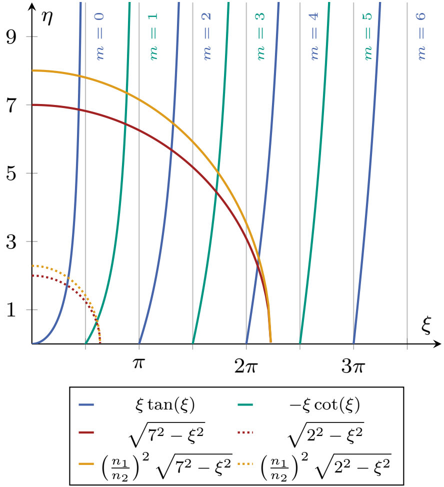
$$\arctan\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\sqrt{\frac{n_1^2\sin^2(\alpha_1)-n_2^2}{n_1^2\cos^2(\alpha_1)}}\right)=\frac{d\,k_1}{2}\cos(\alpha_1)-m\,\frac{\pi}{2}$$

- Mit $\xi=\frac{d\,k_1}{2}\cos(\alpha_1)$ und $\eta=\frac{d\,k_1}{2}\sqrt{\sin^2(\alpha_1)-\frac{n_2^2}{n_1^2}}=\sqrt{\gamma^2-\xi^2}$ ergibt sich in diesem Fall

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sqrt{\gamma^2-\xi^2}=\xi\tan\left(\xi-m\,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\xi\tan(\xi) & \text{für } m \text{ gerade}\\ -\xi\cot(\xi) & \text{für } m \text{ ungerade}\end{cases}$$

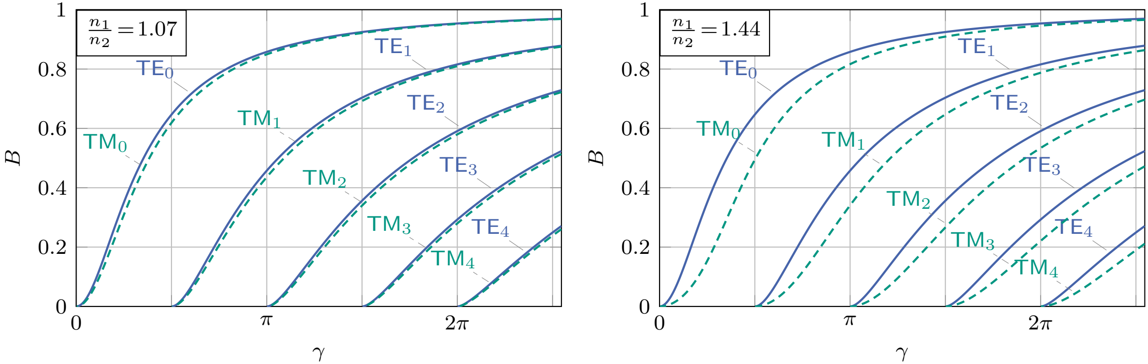
Graphische Lösung der Eigenwertgleichung

- Die Abbildung erlaubt die graphische Lösung der Eigenwertgleichung für $\gamma = 7$ (durchgezogen) bzw. $\gamma = 2$ (gestrichelt) bei $\frac{n_1}{n_2} = 1.07$.
- Die Schnittpunkte der roten bzw. orangenen Kurven mit der blauen und grünen Kurven führen auf die Ausbreitungskonstanten für die m-ten Moden mit senkrechter bzw. paralleler Polarisation.
- Im Vergleich zur senkrechten Polarisation ist zu beachten, dass die linke Seite der Eigenwertgleichung für parallele Polarisation keinen Viertelkreis sondern eine Viertelellipse darstellt.
- Da nur bestimmte ξ die Eigenwertgleichung lösen, treten auch nur für diskrete Winkel α_1 geführte Wellen auf.



Numerische Lösung der Eigenwertgleichung

- Die Abbildungen zeigen die normierten Lösungen der Eigenwertgleichungen $B = 1 - \frac{\xi^2}{\gamma^2}$.
- Mit zunehmendem Brechzahlunterschied wächst auch der Unterschied zwischen den Ausbreitungskonstanten der TE-Moden und TM-Moden.



Vorlesungsinhalte

1. Dielektrischer Schichtwellenleiter
2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter
3. **Geführte E-Wellen und H-Wellen**
4. Was Sie gelernt haben sollten
5. Anhang
   - Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion
   - Lösungsansatz für E-Wellen

Geführte E-Wellen und H-Wellen

- Im Folgenden wollen wir die Eigenschaften geführter Wellen im dielektrischen Schichtwellenleiter analysieren, welche sich mit räumlich konstanter transversaler Feldverteilung in z-Richtung ausbreiten.
- In kartesischen Koordinaten suchen wir also Lösungen der Wellengleichungen für Feldvektoren der Form

$$\underline{\mathbf{E}}(x,y,z) = \underline{\mathbf{E}}(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\underline{k}_z z} \qquad \text{und} \qquad \underline{\mathbf{H}}(x,y,z) = \underline{\mathbf{H}}(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\underline{k}_z z}$$

- Die Feldvektoren $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ können als Superposition einer E- und einer H-Welle aufgefasst gemäß

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}^E + \underline{\mathbf{E}}^H \qquad \text{und} \qquad \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}^E + \underline{\mathbf{H}}^H$$

- Bei der E-Welle verfügt nur das E-Feld über eine z-Komponente und es gilt $\underline{H}_z^E = 0$.
- Entsprechend verfügt bei der H-Welle nur das H-Feld über eine z-Komponente und es gilt $\underline{E}_z^H = 0$.
- E-Wellen werden auch als transversal-magnetische (TM) Wellen und H-Wellen als transversal-elektrische (TE) Wellen bezeichnet. Transversalelektromagnetische (TEM) Wellen stellen einen weiteren Sonderfall dar, welchen wir zunächst nicht näher betrachten werden.

Transversale Feldkomponenten geführter E- und H-Wellen

Karlsruher Institut für Technologie

- Für die transversalen Feldkomponenten gilt im Schichtwellenleiter mit $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ und $\underline{k}_\mathrm{t}^2 = \underline{k}_{y,i}^2$ und $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_i$ $(i \in \{1,2\})$

$$\begin{aligned}
\underline{E}_x &= -\mathrm{j}\,\frac{1}{\underline{k}_\mathrm{t}^2}\left(\underline{k}_z\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}\right) &&= -\mathrm{j}\,\frac{\omega\mu}{\underline{k}_{y,i}^2}\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}\\
\underline{E}_y &= -\mathrm{j}\,\frac{1}{\underline{k}_\mathrm{t}^2}\left(\underline{k}_z\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \omega\mu\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\right) &&= -\mathrm{j}\,\frac{\underline{k}_z}{\underline{k}_{y,i}^2}\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}\\
\underline{H}_x &= \mathrm{j}\,\frac{1}{\underline{k}_\mathrm{t}^2}\left(\omega\underline{\varepsilon}_i\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} + \underline{k}_z\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\right) &&= \mathrm{j}\,\frac{\omega\underline{\varepsilon}}{\underline{k}_{y,i}^2}\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}\\
\underline{H}_y &= -\mathrm{j}\,\frac{1}{\underline{k}_\mathrm{t}^2}\left(\omega\underline{\varepsilon}\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} + \underline{k}_z\frac{\partial \underline{H}_z^H}{\partial y}\right) &&= -\mathrm{j}\,\frac{\underline{k}_z}{\underline{k}_{y,i}^2}\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}
\end{aligned}$$

- Damit ergibt sich eine E-Welle (TM-Welle) mit den Feldkomponenten $\underline{E}_z$, $\underline{E}_y$ und $\underline{H}_x$ sowie eine H-Welle (TE-Welle) mit den Feldkomponenten $\underline{H}_z$, $\underline{H}_y$ und $\underline{E}_x$.

Lösung der skalaren Wellengleichung (I)

- Für $\underline{E}_z$ und $\underline{H}_z$ muss in den Medien $i \in \{1, 2\}$ die skalare Helmholtzgleichung erfüllt sein, d.h.

$$\Delta \underline{E}_{z,i} + \underline{k}_i^2 \underline{E}_{z,i} = 0$$
$$\Delta \underline{H}_{z,i} + \underline{k}_i^2 \underline{H}_{z,i} = 0\,.$$

- In kartesischen Koordinaten wird diese z.B. für $\underline{E}_z$ mit $\underline{k}_i^2 = \underline{k}_{x,i}^2 + \underline{k}_{y,i}^2 + \underline{k}_{z,i}^2$ gelöst durch

$$\underline{E}_{z,i} = \underline{E}_0 \begin{Bmatrix} \cos(\underline{k}_{x,i}x) \\ \sin(\underline{k}_{x,i}x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\underline{k}_{y,i}y) \\ \sin(\underline{k}_{y,i}y) \end{Bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\underline{k}_{z,i}z} \quad \text{bzw.} \quad \underline{E}_{z,i} = \underline{E}_0 \begin{Bmatrix} \cos(\underline{k}_{x,i}x) \\ \sin(\underline{k}_{x,i}x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,i}y} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,i}y} \end{Bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\underline{k}_{z,i}z}$$

- Die Ausdrücke in geschweiften Klammen stehen dabei für beliebige Linearkombinationen, d.h. $\begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} \equiv \underline{A}\cos(\alpha) + \underline{B}\sin(\alpha)$. Diese lassen sich auch als Linearkombination $\begin{Bmatrix} \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\alpha} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\alpha} \end{Bmatrix}$ darstellen.

Lösung der skalaren Wellengleichung (II)

- Im betrachteten Schichtwellenleiter mit unendlicher Ausdehnung in x-Richtung ist die Lösung unabhängig von x, d.h. $k_{x,i}^2 = 0$ und $k_{y,i}^2 = \underline{k}_i^2 - \underline{k}_{z,i}^2$, also

$$\underline{E}_{z,i} = \underline{E}_0 \left\{ \begin{matrix} \cos(k_{y,i} y) \\ \sin(k_{y,i} y) \end{matrix} \right\} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\underline{k}_{z,i} z} \quad \text{bzw.} \quad \underline{E}_{z,i} = \underline{E}_0 \left\{ \begin{matrix} \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,k_{y,i} y} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k_{y,i} y} \end{matrix} \right\} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\underline{k}_{z,i} z}$$

- Jede Linearkombination $A\cos(\alpha) + B\sin(\alpha)$ können wir auch schreiben als

$$A\cos(\alpha) + B\sin(\alpha) = C\left[\sin(\psi)\cos(\alpha) + \cos(\psi)\sin(\alpha)\right] = C\sin(\alpha + \psi)$$

mit den freien Parametern C und ψ.

- Damit können wir auch ansetzen, dass

$$\underline{E}_{z,i} = \underline{E}_0 \sin(k_{y,i} y + \psi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\underline{k}_{z,i} z} \quad \text{bzw.} \quad \underline{E}_{z,i} = \underline{E}_0 \left\{ \begin{matrix} \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,k_{y,i} y} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k_{y,i} y} \end{matrix} \right\} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\underline{k}_{z,i} z}$$

Stetigkeitsbedingungen (Wdh.)

- Im Gegensatz zu den bisher betrachteten idealen Leitern verschwinden die Felder an den Grenzflächen des dielektrischen Schichtwellenleiters nicht.
- Da wir die Dielektrika als nichtleitend annehmen, verschwinden allerdings der Strombelag $i' = 0$ und die Flächenladungsdichte $\sigma = 0$.
- Für die tangentialen Feldkomponenten an der Grenzfläche zweiter Medien $\underline{H}_{\mathrm{t},1}$, $\underline{E}_{\mathrm{t},1}$, $\underline{H}_{\mathrm{t},2}$ und $\underline{E}_{\mathrm{t},2}$ muss mit dem Oberflächenstrom $i'\Delta s$ mit dem Strombelag i' (Einheit $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$) gelten, dass

$$\underline{H}_{\mathrm{t},1} - \underline{H}_{\mathrm{t},2} = i' = 0$$
$$\underline{E}_{\mathrm{t},1} - \underline{E}_{\mathrm{t},2} = 0\,.$$

- Für die normalen Feldkomponenten an der Grenzfläche zweiter Medien $\underline{H}_{\mathrm{n},1}$, $\underline{E}_{\mathrm{n},1}$, $\underline{H}_{\mathrm{n},2}$ und $\underline{E}_{\mathrm{n},2}$ muss mit der Flächenladungsdichte σ (Einheit $\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{m}^2}$) gelten, dass

$$\underline{D}_{\mathrm{n},1} - \underline{D}_{\mathrm{n},2} = \sigma = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad E_{\mathrm{n},2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} E_{\mathrm{n},1}$$
$$\underline{B}_{\mathrm{n},1} - \underline{B}_{\mathrm{n},2} = 0\,.$$

Lösungsansatz für H-Wellen

- Wir wollen zunächst elektromagnetische H-Wellen betrachten, die innerhalb des Wellenleiters geführt werden und deren Felder für $y \to \pm\infty$ verschwinden.
- Die analoge Herleitung für E-Wellen findet sich im Anhang.
- Damit wir eine geführte Welle mit räumlich konstanter transversaler Verteilung beobachten können, muss die Ausbreitungskonstante $\underline{k}_z$ in allen Medien identisch sein, d.h. $\underline{k}_z = \underline{k}_{z,1} = \underline{k}_{z,2}$.
- Außerdem muss für die Führung innerhalb des Wellenleiters Totalreflexion an den Grenzflächen auftreten und daher $k_2 < k_z < k_1$ gelten.
- Wegen $k_2^2 = \underline{k}_{y,2}^2 + k_z^2$ ist die transversale Wellenzahlen $\underline{k}_{y,2}$ also rein imaginär.
- Damit erhalten wir für H-Wellen Lösungen der Form

$$\underline{H}_z = \underline{H}_0 \begin{cases} \sin(\underline{k}_{y,1} y + \psi) & |y| \leq \frac{d}{2} \\ A \exp\left(-\mathrm{j}\, \underline{k}_{y,2}(y - d/2)\right) & y > +\frac{d}{2} \\ B \exp\left(\mathrm{j}\, \underline{k}_{y,2}(y + d/2)\right) & y < -\frac{d}{2} \end{cases} .$$

Stetigkeitsbedingungen für H-Wellen (I)

- Um die Stetigkeitsbedingungen für das magnetische Feld an den Grenzfläche $y = \pm d/2$ zu erfüllen, muss auch $\underline{H}_z$ in $y = \pm\frac{d}{2}$ stetig sein.
- Wir erhalten daher $A = \sin(\underline{k}_{y,1} d/2 + \psi)$ bzw. $B = \sin(-\underline{k}_{y,1} d/2 + \psi)$ und entsprechend

$$\underline{H}_z = \underline{H}_0 \begin{cases} \sin(\underline{k}_{y,1} y + \psi) & |y| \leq \frac{d}{2} \\ \sin(\underline{k}_{y,1} d/2 + \psi) \exp\left(-\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}(y - d/2)\right) & y > +\frac{d}{2} \\ -\sin(\underline{k}_{y,1} d/2 - \psi) \exp\left(\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}(y + d/2)\right) & y < -\frac{d}{2} \end{cases} .$$

Stetigkeitsbedingungen für H-Wellen (II)

- Aus der H_z-Komponente erhalten wir für die ebenfalls tangential zur Grenzfläche orientierte E_x-Komponente den Ausdruck

$$\underline{E}_x = -\mathrm{j}\,\frac{\omega\mu}{\underline{k}_\mathrm{t}^2}\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = -\mathrm{j}\,\omega\mu_0\underline{H}_0 \begin{cases} \frac{1}{\underline{k}_{y,1}}\cos(\underline{k}_{y,1}y+\psi) & |y| \le \frac{d}{2} \\ \frac{-\mathrm{j}}{\underline{k}_{y,2}}\sin(\underline{k}_{y,1}d/2+\psi)\exp\left(-\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}(y-d/2)\right) & y > +\frac{d}{2} \\ \frac{-\mathrm{j}}{\underline{k}_{y,2}}\sin(\underline{k}_{y,1}d/2-\psi)\exp\left(\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}(y+d/2)\right) & y < -\frac{d}{2} \end{cases} .$$

- Auch diese muss an den Grenzflächen stetig sein, weshalb wir fordern, dass

$$\frac{1}{\underline{k}_{y,1}}\cos\left(\underline{k}_{y,1}\frac{d}{2}+\psi\right) = \frac{1}{\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}}\sin\left(\underline{k}_{y,1}\frac{d}{2}+\psi\right) \quad\Longrightarrow\quad \tan\left(\underline{k}_{y,1}\frac{d}{2}+\psi\right) = \frac{\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}}{\underline{k}_{y,1}}$$

$$\frac{1}{\underline{k}_{y,1}}\cos\left(\underline{k}_{y,1}\frac{d}{2}-\psi\right) = \frac{1}{\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}}\sin\left(\underline{k}_{y,1}\frac{d}{2}-\psi\right) \quad\Longrightarrow\quad \tan\left(\underline{k}_{y,1}\frac{d}{2}-\psi\right) = \frac{\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}}{\underline{k}_{y,1}}$$

Eigenwertgleichung für H-Wellen (I)

- Mithilfe der Variablen $\xi = \underline{k}_{y,1}d/2$ und $\eta = \mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}d/2$ können wir die beiden Forderungen folgendermaßen ausdrücken (wobei wir die Periodizität des Tangens durch $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ berücksichtigen)

$$\xi + \psi = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + m_1\pi \qquad \text{und} \qquad \xi - \psi = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + m_2\pi$$

- Addieren bzw. subtrahieren wir beide Gleichungen, ergibt sich mit $m = m_1 + m_2$ und $m' = m_1 - m_2$

$$\xi = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + m\frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad \psi = m'\frac{\pi}{2}\,.$$

- Wegen $m' = 2m_1 - m$ erhalten wir für festes m lediglich Werte m', welche sich um ein gerades Vielfaches $2m_1$ von m unterscheiden.
- Folglich unterscheiden sich auch die möglichen Werte von ψ für ein gegebenes m stets um ein ganzzahliges Vielfaches von π.

Eigenwertgleichung für H-Wellen (II)

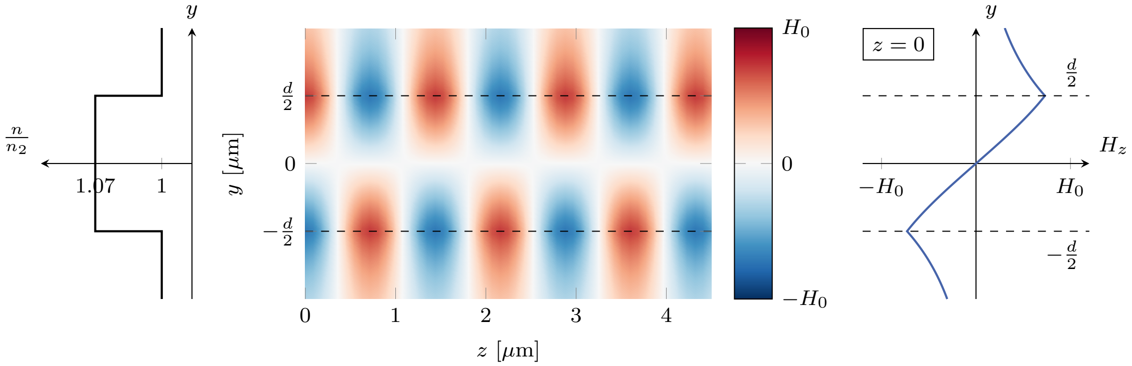
- Da wir für alle $\psi = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ das gleiche Modenfeld erhalten, können wir stets $\psi = -m\frac{\pi}{2}$ wählen.
- Abschließend führen wir $\gamma^2 = \xi^2 + \eta^2 = \frac{d^2}{4} k_0^2 \left(n_1^2 - n_2^2\right)$ ein. Dann können wir die Gleichung mit dem Arkustangens so umformen, dass wir gerade das Ergebnis von Folie 12 erhalten

$$\tan\left(\xi - m\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \xi^2}}{\xi} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi \tan\left(\xi - m\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\gamma^2 - \xi^2}\,.$$

- Lösen wir die Eigenwertgleichung, erhalten wir aus dem Resultat für ξ die transversalen Wellenzahlen $\underline{k}_{y,1}$ sowie $\underline{k}_{y,2}$ und wiederum daraus die Ausbreitungskonstante $\underline{k}_z$.
- Mit $\psi = -m\frac{\pi}{2}$ können wir schließlich alle elektrischen und magnetischen Feldkomponenten der H-Welle erhalten.

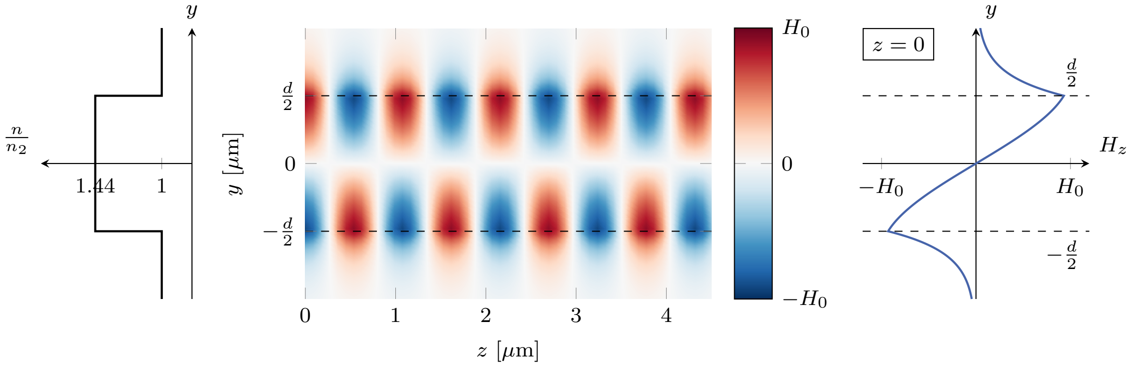
Amplitudenverteilung von H_z für $m = 0$ (I)

- Die Abbildung in der Mitte zeigt die z-Komponente $H_z = \Re\{\underline{H}_z\}$ der TE_0 Mode zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ebene $x = 0$. Rechts ist zusätzlich die Verteilung bei $z = 0$ abgebildet.
- Die Abbildung links stellt das normierte Brechzahlprofil entlang y dar. Es gilt $n_1 = 1.07 n_2$.



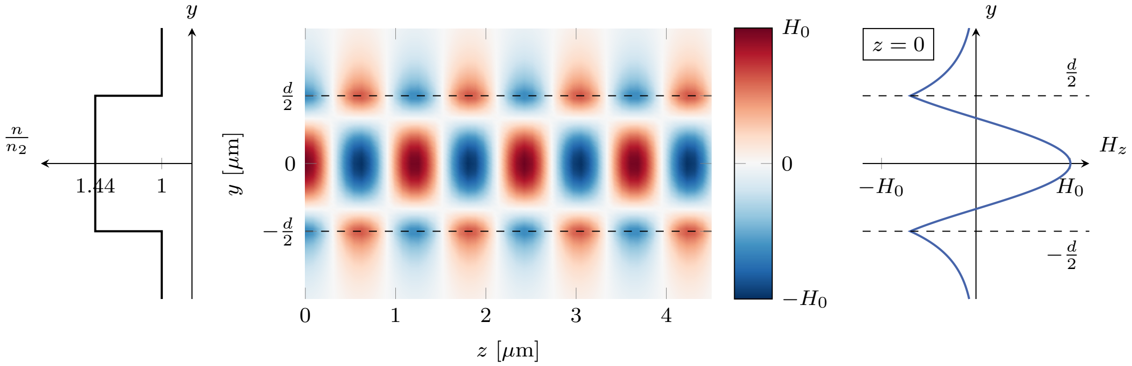
Amplitudenverteilung von H_z für $m = 0$ (II)

- Die Abbildung in der Mitte zeigt die z-Komponente $H_z = \Re\{\underline{H}_z\}$ der TE_0 Mode zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ebene $x = 0$. Rechts ist zusätzlich die Verteilung bei $z = 0$ abgebildet.
- Die Abbildung links stellt das normierte Brechzahlprofil entlang y dar. Es gilt $n_1 = 1.44 n_2$.



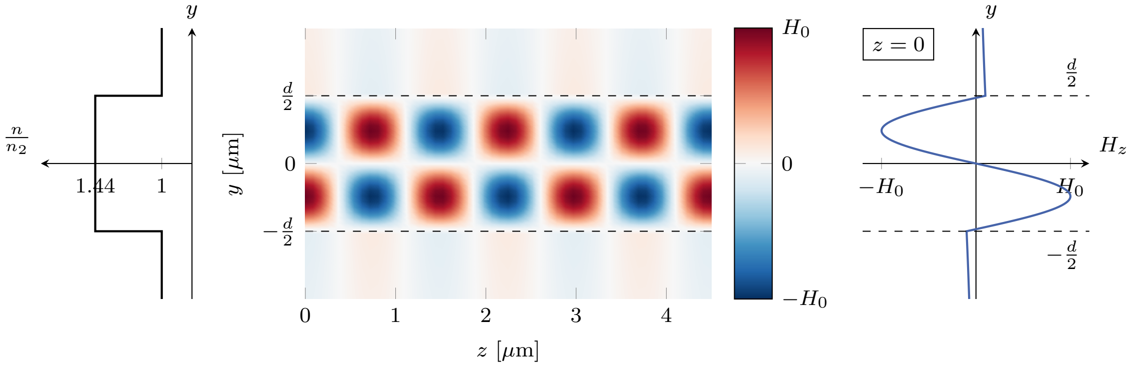
Amplitudenverteilung von H_z für $m = 1$

- Die Abbildung in der Mitte zeigt die z-Komponente $H_z = \Re\{\underline{H}_z\}$ der TE$_1$ Mode zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ebene $x = 0$. Rechts ist zusätzlich die Verteilung bei $z = 0$ abgebildet.
- Die Abbildung links stellt das normierte Brechzahlprofil entlang y dar. Es gilt $n_1 = 1.44 n_2$.



Amplitudenverteilung von H_z für $m = 2$

- Die Abbildung in der Mitte zeigt die z-Komponente $H_z = \Re\{\underline{H}_z\}$ der TE$_2$ Mode zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ebene $x = 0$. Rechts ist zusätzlich die Verteilung bei $z = 0$ abgebildet.
- Die Abbildung links stellt das normierte Brechzahlprofil entlang y dar. Es gilt $n_1 = 1.44 n_2$.



Vorlesungsinhalte

Was Sie gelernt haben sollten

- Welche Bedingungen für die Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter erfüllt sein müssen.
- Wie sich die Totalreflexion an einer Grenzfläche auf elektromagnetische Wellen auswirkt.
- Wieso nur für diskrete Winkel gegenüber der Grenzflächen Wellenausbreitung möglich ist.
- Wie die Eigenwertgleichung für senkrechte bzw. parallele Polarisation graphisch gelöst werden und wie daraus auf die Anzahl ausbreitungsfähiger Moden geschlossen werden kann.
- Welche Parameter des Wellenleiters bzw. der Welle die Zahl der ausbreitungsfähigen Moden bestimmen.
- Dass die Ausbreitungskonstanten bei paralleler Polarisation i.A. kleiner sind als bei senkrechter Polarisation.
- Wie sich elektromagnetische Wellen an der Grenzfläche zweier Dielektrika verhalten.
- Wie wir die Wellengleichung im Schichtwellenleiter lösen können und welche Bedingungen die Lösungen erfüllen müssen.
- Welchen Einfluss das Brechzahlprofil auf die Feldbilder der Wellenleitermoden hat.

Vorlesungsinhalte

Karlsruher Institut für Technologie

1. Dielektrischer Schichtwellenleiter

2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter

3. Geführte E-Wellen und H-Wellen

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. **Anhang**
   - Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion
   - Lösungsansatz für E-Wellen

Fresnelsche Beziehungen und Totalreflexion (I)

- Die Fresnelschen Beziehungen hatten wir zuvor hergeleitet als

$$\underline{r}_\mathsf{s} = \frac{n_1\cos(\alpha_1) - n_2\cos(\alpha_2)}{n_1\cos(\alpha_1) + n_2\cos(\alpha_2)} \qquad \underline{r}_\mathsf{p} = \frac{n_2\cos(\alpha_1) - n_1\cos(\alpha_2)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{t}_\mathsf{s} = \frac{2n_1\cos(\alpha_1)}{n_1\cos(\alpha_1) + n_2\cos(\alpha_2)} \qquad \underline{t}_\mathsf{p} = \frac{2n_1\cos(\alpha_1)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)}$$

- Im Fall $n_1 \leq n_2$ gilt für alle Einfallswinkel $\alpha_1 \in [0, \pi/2]$ nach dem Brechungsgesetz $\sin(\alpha_2) = \frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha_1) \leq 1$ und somit $\cos(\alpha_2) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha_2)} \leq 1$. Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sind reellwertig, also gilt

$$\arg(\underline{r}) = \arg(\underline{t}) = 0$$

- Letzteres gilt auch im Fall $n_1 > n_2$ für Einfallswinkel kleiner dem Grenzwinkel der Totalreflexion $\alpha_1 \leq \alpha_{1,\mathsf{G}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$.

Fresnelsche Beziehungen und Totalreflexion (II)

- Für den Fall $n_1 > n_2$ und $\alpha_1 > \alpha_{1,\mathsf{G}}$ kommt es jedoch zur Totalreflexion und wir erhalten $\sin(\alpha_2) > 1$. Daraus folgt, dass

$$\cos(\alpha_2) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha_2)} = \mathrm{j}\sqrt{\sin^2(\alpha_2) - 1} = \mathrm{j}\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2(\alpha_1) - 1}$$

  rein imaginär wird.
- Mit $a = n_1 \cos(\alpha_1)$ und $b = -\mathrm{j}\, n_2 \cos(\alpha_2) = \sqrt{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}$ erhalten wir für senkrechte Polarisation

$$\underline{r}_\mathsf{s} = \frac{a - \mathrm{j}\, b}{a + \mathrm{j}\, b} \quad \text{und} \quad \underline{t}_\mathsf{s} = \frac{2a}{a + \mathrm{j}\, b}$$

- und somit nach kurzer Nebenrechnung $\arg(\underline{t}_\mathsf{s}) = \frac{1}{2}\arg(\underline{r}_\mathsf{s})$ und

$$\arg(\underline{r}_\mathsf{s}) = -2\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -2\arctan\left(\sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_1^2 \cos^2(\alpha_1)}}\right)$$

Fresnelsche Beziehungen und Totalreflexion (III)

- Führen wir zudem $c = n_2 \cos(\alpha_1)$ und $d = -\mathrm{j}\, n_1 \cos(\alpha_2) = n_1 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2(\alpha_1) - 1}$ ein, so erhalten wir für parallele Polarisation

$$\underline{r}_\mathsf{p} = \frac{c - \mathrm{j}\, d}{c + \mathrm{j}\, d} \quad \text{und} \quad \underline{t}_\mathsf{p} = \frac{2a}{c + \mathrm{j}\, d}$$

- und somit nach kurzer Nebenrechnung $\arg(\underline{t}_\mathsf{p}) = \frac{1}{2} \arg(\underline{r}_\mathsf{p})$ und

$$\arg(\underline{r}_\mathsf{p}) = -2 \arctan\left(\frac{d}{c}\right) = -2 \arctan\left(\frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_2^2 \cos^2(\alpha_1)}}\right)$$

Lösungsansatz für E-Wellen

- Nun betrachten wir elektromagnetische E-Wellen innerhalb des dielektrischen Schichtwellenleiters.
- Damit wir eine geführte Welle mit räumlich konstanter transversaler Verteilung beobachten können, muss die Ausbreitungskonstante $\underline{k}_z$ in allen Medien identisch sein, d.h. $\underline{k}_z = \underline{k}_{z,1} = \underline{k}_{z,2}$.
- Außerdem muss für die Führung innerhalb des Wellenleiters Totalreflexion an den Grenzflächen auftreten und daher $k_2 < k_z < k_1$ gelten.
- Wegen $k_2^2 = \underline{k}_{y,2}^2 + k_z^2$ ist die transversale Wellenzahlen $\underline{k}_{y,2}$ also rein imaginär.
- Damit erhalten wir für E-Wellen Lösungen der Form

$$\underline{E}_z = \underline{E}_0 \begin{cases} \sin(\underline{k}_{y,1} y + \psi) & |y| \leq \frac{d}{2} \\ A \exp\left(-\mathrm{j}\, \underline{k}_{y,2}(y - d/2)\right) & y > +\frac{d}{2} \\ B \exp\left(\mathrm{j}\, \underline{k}_{y,2}(y + d/2)\right) & y < -\frac{d}{2} \end{cases} .$$

Stetigkeitsbedingungen für E-Wellen (I)

- Um die Stetigkeitsbedingungen für das elektrische Feld an den Grenzfläche $y = \pm d/2$ zu erfüllen, muss auch $\underline{E}_z$ in $y = \pm\frac{d}{2}$ stetig sein.
- Wir erhalten daher $A = \sin(\underline{k}_{y,1} d/2 + \psi)$ bzw. $B = \sin(-\underline{k}_{y,1} d/2 + \psi)$ und entsprechend

$$\underline{E}_z = \underline{E}_0 \begin{cases} \sin(\underline{k}_{y,1} y + \psi) & |y| \le \frac{d}{2} \\ \sin(\underline{k}_{y,1} d/2 + \psi) \exp\left(-\mathrm{j}\, \underline{k}_{y,2}(y - d/2)\right) & y > +\frac{d}{2} \\ -\sin(\underline{k}_{y,1} d/2 - \psi) \exp\left(\mathrm{j}\, \underline{k}_{y,2}(y + d/2)\right) & y < -\frac{d}{2} \end{cases} .$$

Stetigkeitsbedingungen für E-Wellen (II)

- Aus der E_z-Komponente erhalten wir für die ebenfalls tangential zur Grenzfläche orientierte H_x-Komponente den Ausdruck

$$\underline{H}_x = \mathrm{j}\,\frac{\omega\varepsilon}{\underline{k}_\mathrm{t}^2}\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} = \mathrm{j}\,\omega\varepsilon_0 \underline{E}_0 \begin{cases} \frac{n_1^2}{\underline{k}_{y,1}} \cos(\underline{k}_{y,1} y + \psi) & |y| \leq \frac{d}{2} \\ \frac{-\mathrm{j}\,n_2^2}{\underline{k}_{y,2}} \sin(\underline{k}_{y,1} d/2 + \psi) \exp\left(-\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}(y - d/2)\right) & y > +\frac{d}{2} \\ \frac{-\mathrm{j}\,n_2^2}{\underline{k}_{y,2}} \sin(\underline{k}_{y,1} d/2 - \psi) \exp\left(\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}(y + d/2)\right) & y < -\frac{d}{2} \end{cases}.$$

- Auch diese muss an den Grenzflächen stetig sein, weshalb wir fordern, dass

$$\frac{n_1^2}{\underline{k}_{y,1}} \cos\left(\underline{k}_{y,1}\frac{d}{2} + \psi\right) = \frac{n_2^2}{\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}} \sin\left(\underline{k}_{y,1}\frac{d}{2} + \psi\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{n_2^2}{n_1^2} \tan\left(\underline{k}_{y,1}\frac{d}{2} + \psi\right) = \frac{\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}}{\underline{k}_{y,1}}$$

$$\frac{n_1^2}{\underline{k}_{y,1}} \cos\left(\underline{k}_{y,1}\frac{d}{2} - \psi\right) = \frac{n_2^2}{\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}} \sin\left(\underline{k}_{y,1}\frac{d}{2} - \psi\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{n_2^2}{n_1^2} \tan\left(\underline{k}_{y,1}\frac{d}{2} - \psi\right) = \frac{\mathrm{j}\,\underline{k}_{y,2}}{\underline{k}_{y,1}}$$

Eigenwertgleichung für E-Wellen

- Mithilfe der Variablen $\xi = \underline{k}_{y,1} d/2$, $\eta = \mathrm{j}\, \underline{k}_{y,2} d/2$ und $\gamma^2 = \xi^2 + \eta^2 = \frac{d^2}{4} k_0^2 \left(n_1^2 - n_2^2\right)$ erhalten wir analog zu den H-Wellen

$$\tan\left(\xi - m\frac{\pi}{2}\right) = \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\sqrt{\gamma^2 - \xi^2}}{\xi} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi \tan\left(\xi - m\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sqrt{\gamma^2 - \xi^2}\,.$$

- Erwartungsgemäß ist dieses Ergebnis identisch zu dem von Folie 13.
- Mit $\psi = -m\frac{\pi}{2}$ können wir schließlich aus der Lösung ξ alle elektrischen und magnetischen Feldkomponenten der E-Welle erhalten.

Amplitudenverteilung von E_y für $m = 0$

- Die Abbildung in der Mitte zeigt die normierte y-Komponente $\frac{k_{y,i}^2}{k_z} E_y = \Re\{\frac{k_{y,i}^2}{k_z} \underline{E}_y\}$ der TM_0 Mode zum Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{2\omega}$ in der Ebene $x = 0$. Rechts ist zusätzlich die Verteilung bei $z = 0$ abgebildet.
- Die Abbildung links stellt das normierte Brechzahlprofil entlang y dar. Es gilt $n_1 = 1.44 n_2$.