Karlsruher Institut für Technologie

Vorlesung 02: Die Wellengleichung

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2022/23

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 4. November 2022

Vorlesungsinhalte

Karlsruher Institut für Technologie

Vorlesungsinhalte

Definition des Laplace Operators

- Im Allgemeinen ist der Laplace Operator Δ mit dem Vektorfeld $\mathbf{A}$ durch folgende Beziehung definiert

$$\Delta\mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \left(\nabla\mathbf{A}^T\right) = \nabla^T \left(\nabla\mathbf{A}^T\right) \ ,$$

  wobei $\mathbf{A}^T$ ein Zeilenvektor und $\nabla\mathbf{A}^T$ eine Matrix ist. $\Delta\mathbf{A}$ ist also wie $\mathbf{A}$ ein Spaltenvektor.
- Für dreidimensionale Vektoren gilt für den Laplace Operator

$$\Delta\mathbf{A} \equiv \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A}\right) - \nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{A}\right)$$

- Betrachten wir anstelle eines Vektorfeldes eine Skalarfeld ψ, so kann der Laplace Operator als zweifache Anwendung des Nabla Operators verstanden werden

$$\Delta\psi \triangleq \nabla \cdot \left(\nabla\psi\right) = \left(\nabla \cdot \nabla\right)\psi = \nabla^2\psi \ .$$

- Im Unterschied zum Nabla Operator kann der Laplace Operator daher als skalare Rechengröße betrachtet werden.

Der Laplace Operator für Skalarfelder

Je nach Koordinatensystem gilt für ein Skalarfeld ψ in ...

- ... kartesischen Koordinaten:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

- ... Zylinderkoordinaten:

$$\Delta\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

- ... Kugelkoordinaten:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

Der Laplace Operator für Vektorfelder (I)

Karlsruher Institut für Technologie

Je nach Koordinatensystem gilt für ein Vektorfeld $\mathbf{A}$ in ...

- ... kartesischen Koordinaten mit $\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{e}_x + A_y\,\mathbf{e}_y + A_z\,\mathbf{e}_z$:

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

- ... Zylinderkoordinaten mit $\mathbf{A} = A_\rho\,\mathbf{e}_\rho + A_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + A_z\,\mathbf{e}_z$:

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{A_\rho}{\rho^2} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{\rho^2} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta A_\rho - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{A_\rho}{\rho^2} \\ \Delta A_\varphi + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{\rho^2} \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

Der Laplace Operator für Vektorfelder (II)

Je nach Koordinatensystem gilt für ein Vektorfeld $\mathbf{A}$ in ...

- ... Kugelkoordinaten $\mathbf{A} = A_r\,\mathbf{e}_r + A_\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta + A_\phi\,\mathbf{e}_\phi$:

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rA_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2\cot\vartheta}{r^2}A_\vartheta \\ \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rA_\vartheta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A_\vartheta}{\partial\phi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\cot\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}A_\vartheta \\ \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rA_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A_\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\phi^2} + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\cot\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\phi} - \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}A_\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2\cot\vartheta}{r^2}A_\vartheta \\ \Delta A_\vartheta - \frac{2}{r^2}\frac{\cot\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}A_\vartheta \\ \Delta A_\phi + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\cot\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\phi} - \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}A_\phi \end{pmatrix}.$$

Der Laplace Operator für Vektorfelder (III)

- Infolgedessen tragen im Allgemeinen alle Feldkomponenten eines Vektorfelds $\mathbf{A}$ zu den einzelnen Komponenten von $\Delta\mathbf{A}$ bei.
- Die Ausnahme bilden das kartesische Koordinatensystem, bei dem der vektorielle Laplace Operator auf jede Komponente von $\mathbf{A}$ wie der skalare Laplace Operator wirkt.
- In Zylinderkoordinaten entspricht ausschließlich die z-Komponente des vektoriellen Laplace Operators dem skalaren Laplace Operator.

Vorlesungsinhalte

Die Maxwellschen Gleichungen

- In linearen, homogenen, isotropen und näherungsweise gedächtnisfreien Medien können die Maxwellschen Gleichungen durch die Vektorfelder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ ausgedrückt werden als

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H} &= \kappa \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && \text{(I)} && \textit{Durchflutungsgesetz} \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} && \text{(II)} && \textit{Induktionsgesetz} \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} && \text{(III)} && \textit{Gaußsches Gesetz} \\
\nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 && \text{(IV)} &&
\end{aligned}$$

- Die Maxwellschen Gleichungen bilden das Grundgerüst der klassischen Elektrodynamik. Aus ihnen lassen sich vielfältige Beziehungen, z.B. zur Wellenausbreitung, ableiten.

Die Wellengleichung der elektrischen Feldstärke

- Bilden wir die Rotation über das Induktionsgesetz, so erhalten wir mit dem Durchflutungsgesetz

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\kappa \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

- Nehmen wir ferner an, dass das Medium eine konstante Raumladungsdichte ρ aufweist, d.h. $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{0}$, erhalten wir mit

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

  die vektorielle *Telegraphengleichung* für die elektrische Feldstärke.
- Für den Fall eines nichtleitenden Mediums mit $\kappa = 0$, vereinfacht sich diese zur vektoriellen *Wellengleichung* für die elektrische Feldstärke

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0\,.$$

Die Wellengleichung der magnetischen Feldstärke

- Bilden wir nun die Rotation über das Durchflutungsgesetz, so erhalten wir mit Hilfe des Induktionsgesetzes

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \Delta \mathbf{H} = \kappa (\nabla \times \mathbf{E}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \kappa \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)$$

- Daraus resultiert mit

$$\Delta \mathbf{H} - \mu\kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

  die vektorielle *Telegraphengleichung* für die magnetische Feldstärke.
- Für den Fall eines nichtleitenden Mediums mit $\kappa = 0$, vereinfacht sich diese zur vektoriellen *Wellengleichung* für die magnetische Feldstärke

$$\Delta \mathbf{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0\,.$$

Vorlesungsinhalte

Karlsruher Institut für Technologie

Ebene Wellen

- Eine mathematisch einfache und anschauliche, jedoch experimentell nicht realisierbare, Lösung der Wellengleichungen in homogenen Medien stellt die *ebene Welle* dar.
- Ebene Wellen sind Wellen, bei denen alle sechs Feldkomponenten in jeder Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung zu einem gegebenen Zeitpunkt konstant sind.
- Bei Ausbreitung in z-Richtung erhalten wir beispielsweise im kartesischen Koordinatensystem

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z,t) = E_x(z,t)\,\mathbf{e}_x + E_y(z,t)\,\mathbf{e}_y + E_z(z,t)\,\mathbf{e}_z$$
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(z,t) = H_x(z,t)\,\mathbf{e}_x + H_y(z,t)\,\mathbf{e}_y + H_z(z,t)\,\mathbf{e}_z\,,$$

d.h. bei gegebenem z und t sind alle Feldkomponenten in x- und y-Richtung konstant.

Die Wellengleichungen für ebene Wellen

- Wie zuvor diskutiert, können wir in kartesischen Koordinaten die zwei vektoriellen Wellengleichungen in sechs skalare Wellengleichungen aufteilen.
- Dabei muss jede Komponente einer ebenen Welle die entsprechende Wellengleichung erfüllen.
- Nehmen wir erneut Ausbreitung in z-Richtung an, gilt etwa für die x-Komponente des E-Feldes

$$\Delta E_x - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0\,,$$

da die Ableitungen nach x und y verschwinden.

Lösungsansatz nach d'Alembert (I)

- Der französische Mathematiker d'Alembert wählte den folgenden Ansatz zur Lösung der obigen Wellengleichung[1], z.B. für E_x

$$E_x = f(z - c\,t) + g(z + c\,t)$$

  wobei f und g zwei beliebige zweifach differenzierbare Funktionen sind und c eine konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit.
- Leiten wir diesen Ansatz nun jeweils zweifach nach z und t ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = f' + g' \quad \text{und} \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -cf' + cg' \text{ sowie}$$
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = f'' + g'' \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 f'' + c^2 g''\,.$$

[1] Diese Wellengleichung beschreibt z.B. auch die Schwingung einer Violinensaite.

Lösungsansatz nach d'Alembert (II)

- Ein Vergleich der zweiten Ableitungen nach z und nach t ergibt

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0\,.$$

- Dies ist gerade die Wellengleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$.
- Für Punkte konstanten Arguments von f, d.h. für $z - ct =$ const, liefert Ableiten nach der Zeit

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z = +c\,,$$

die ebene Welle breitet sich also mit der Geschwindigkeit c in $+z$-Richtung aus.
- Für Punkte konstanten Arguments von g ergibt sich entsprechend

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z = -c\,,$$

diese ebene Welle breitet sich also mit der Geschwindigkeit c in $-z$-Richtung aus.

Lösungsansatz nach d'Alembert (III)

- Wir bezeichnen dementsprechend Lösungen der Form f bzw. g als hin- bzw. rücklaufende Wellen.
- Im Allgemeinen lässt sich jede Lösung der Wellengleichungen also als lineare Überlagerung einer hin- und einer rücklaufenden Welle ausdrücken.
- Im Falle von E_x können wir die Funktion f auch als E_x^+ bezeichnen und die Funktion g als E_x^-. Dementsprechend erhalten wir

$$E_x = E_x^+(z - ct) + E_x^-(z + ct)\,.$$

- Für die fünf weiteren Feldkomponenten können wir die skalare Wellengleichung analog lösen und erhalten äquivalente Ausdrücke.

Maxwellsche Gleichungen für ebene Wellen

- Neben den Wellengleichungen müssen ebene Wellen weiterhin das Durchflutungs- und das Induktionsgesetz erfüllen, also

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{pmatrix} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

und

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{pmatrix} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Transversale Feldkomponenten ebener Wellen (I)

- Die Feldkomponenten E_x, E_y, H_x und H_y, welche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (hier $\pm z$) orientiert sind, bezeichnen wir als *transversale Feldkomponenten*.
- Aus den Maxwellschen Gleichungen für ebene Wellen erhalten wir folgende Beziehungen zwischen den Feldkomponenten E_x und H_y

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}\,.$$

- Betrachten wir zunächst eine sich in $+z$-Richtung ausbreitende Welle und integrieren etwa die erste Gleichung über z, dann erhalten wir mit der Kettenregel

$$H_y^+(z-ct) = -\varepsilon \int (-c)\, E_x'^+(z-ct)\,\mathrm{d}z = \varepsilon c\, E_x^+(z-ct) = \frac{1}{Z} E_x^+(z-ct)\,,$$

wobei wir mit $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ den *Wellenwiderstand* eingeführt haben.

Transversale Feldkomponenten ebener Wellen (II)

- Betrachten wir nun eine sich in $-z$-Richtung ausbreitende Welle an und integrieren erneut die erste Gleichung über z, ergibt sich

$$H_y^-(z+ct) = -\varepsilon \int c\, E_x'^-(z+ct)\,\mathrm{d}z = -\varepsilon c\, E_x^-(z+ct) = -\frac{1}{Z} E_x^-(z+ct)\,.$$

- Analog ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen E_y und H_x

$$H_x^+(z-ct) = -\frac{1}{Z} E_y^+(z-ct) \qquad \text{und} \qquad H_x^-(z+ct) = \frac{1}{Z} E_y^-(z+ct)\,.$$

Longitudinale Feldkomponenten ebener Wellen

- Die Feldkomponenten E_z und H_z, welche parallel zur Ausbreitungsrichtung (hier $\pm z$) orientiert sind, bezeichnen wir als *longitudinale Feldkomponenten*.
- Aus den Maxwellschen Gleichungen folgt

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0\,.$$

- Diese Gleichungen besagen, dass E_z und H_z zeitlich konstant sein müssen.
- Zudem folgt aus den Gaußschen Gesetzen für elektrische und magnetische Felder, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0\,,$$

  und damit auch eine räumliche Invarianz der z-Komponenten.
- Allerdings ist für zeitlich und räumlich konstante Felder keine Wellenausbreitung möglich, weshalb bei ebenen Wellen keine longitudinalen Feldkomponenten existieren.

Ausbreitung ebener Wellen

- Im Allgemeinen lässt sich somit jede ebene Welle, die in $\pm z$-Richtung propagiert, jeweils als Überlagerung zweier, voneinander unabhängiger Wellen darstellen.
- Bei der einen Welle verschwinden dabei alle Feldkomponenten außer E_x und H_y, bei der anderen Welle alle Komponenten außer E_y und H_x.
- Abhängig von der nicht-verschwindenden elektrischen Feldkomponente bezeichnen wir die Welle als linear in x- bzw. y-Richtung polarisiert (auf das Thema Polarisation von Wellen werden wir in einer späteren Vorlesung noch näher eingehen).
- Da bei ebenen Wellen weder das elektrische noch das magnetische Feld in Ausbreitungsrichtung schwingt, handelt es sich um transversalelektromagnetische Wellen (*TEM-Wellen*).
- Aus der Betrachtung der transversalen Feldkomponenten folgern wir, dass für eine sich in $\pm z$-Richtung ausbreitende Welle gilt $\mathbf{E}^+ = Z(\mathbf{H}^+ \times \mathbf{e}_z)$ bzw. $\mathbf{E}^- = -Z(\mathbf{H}^- \times \mathbf{e}_z)$
- Allgemein bilden $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ und der Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung also ein Rechtsschraubensystem.

Lichtgeschwindigkeit und Wellenwiderstand

- Im Vakuum werden die Permittivität und die Permeabilität zu

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}854\,187\,812\,8(13) \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathsf{A\,s}}{\mathsf{V\,m}} \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathsf{A\,s}}{\mathsf{V\,m}}$$

$$\mu = \mu_0 = 1{,}256\,637\,062\,12(19) \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathsf{V\,s}}{\mathsf{A\,m}} \approx 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathsf{V\,s}}{\mathsf{A\,m}}$$

- Für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum gilt

$$c = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx \left(\frac{4\pi}{36\pi} \cdot 10^{-16}\,\frac{\mathsf{s}^2}{\mathsf{m}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$$

- und für den Wellenwiderstand im Vakuum

$$Z = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx \left(4\pi \cdot 36\pi \cdot 1 \cdot 10^{2}\,\frac{\mathsf{V}^2}{\mathsf{A}^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 120\pi\,\Omega \approx 377\,\Omega$$

Vorlesungsinhalte

Karlsruher Institut für Technologie

Exkurs: Fourierreihe

Karlsruher Institut für Technologie

- Jede periodische reellwertige Funktion $f(t)$ mit der Periode T kann angenähert werden durch die Fourierreihe

$$f(t) \approx f_N(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos\left(2\pi n t/T - \varphi_n\right)$$

wobei $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ and $\varphi_n = \arctan\left(b_n/a_n\right)$ und

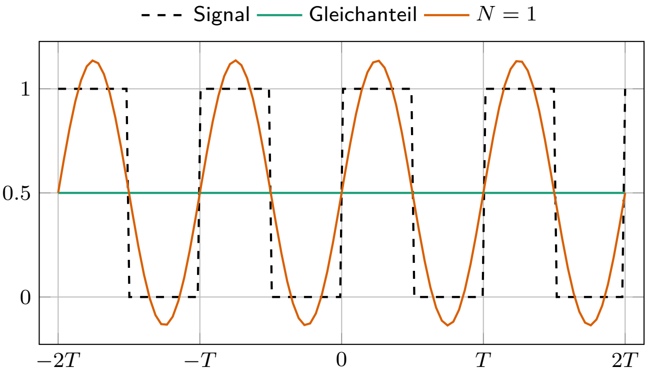
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(2\pi n t/T\right)\mathrm{d}\,t$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(2\pi n t/T\right)\mathrm{d}\,t$$

- Die Funktion $f(t)$ kann also als Überlagerung von N gewichteten zeitharmonischen Schwingungen und ihrem Mittelwert angenähert werden.
- Bei nicht periodischen Funktionen kann anstelle der Fourierreihe die Fouriertransformation angewendet werden.

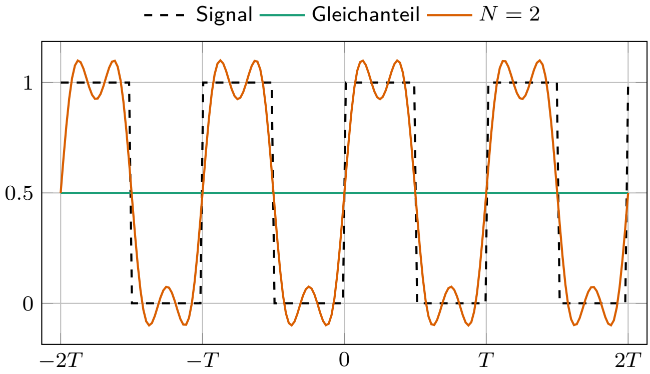
Beispiel: Fourierreihenentwicklung Rechtecksignal

- Mithilfe der Fourierreihe kann ein Rechtecksignal der Periode T durch Überlagerung seines Gleichanteils und gewichteter Sinusschwingungen angenähert werden



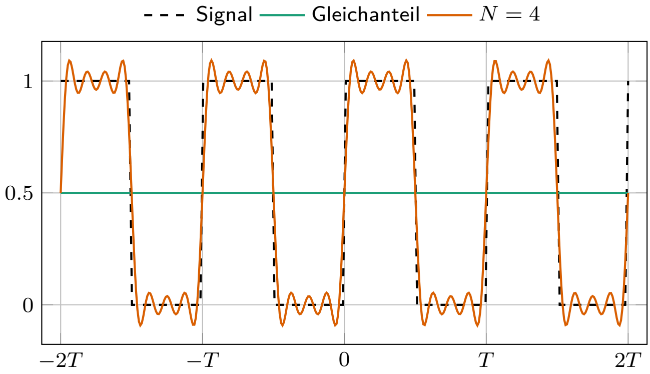
Beispiel: Fourierreihenentwicklung Rechtecksignal

- Mithilfe der Fourierreihe kann ein Rechtecksignal der Periode T durch Überlagerung seines Gleichanteils und gewichteter Sinusschwingungen angenähert werden



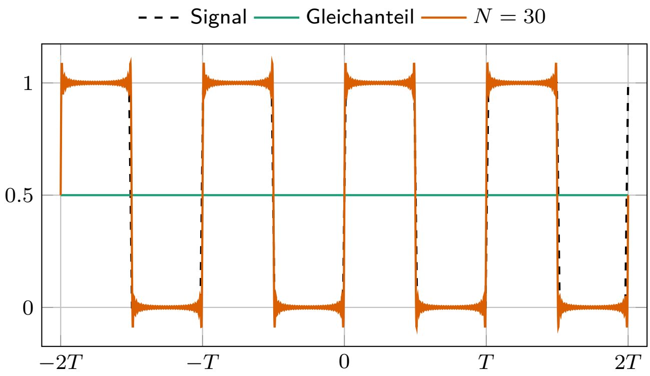
Beispiel: Fourierreihenentwicklung Rechtecksignal

- Mithilfe der Fourierreihe kann ein Rechtecksignal der Periode T durch Überlagerung seines Gleichanteils und gewichteter Sinusschwingungen angenähert werden



Beispiel: Fourierreihenentwicklung Rechtecksignal

- Mithilfe der Fourierreihe kann ein Rechtecksignal der Periode T durch Überlagerung seines Gleichanteils und gewichteter Sinusschwingungen angenähert werden



Superpositionsprinzip

- Bei einer Vielzahl von Problemstellungen soll die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen ausgehend von einem zeitabhängigen Quellenfeld mit den Feldvektoren $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r}_0, t)$ am Ort $\mathbf{r}_0$ berechnet werden.
- Sofern das Ausbreitungsmedium *linear* ist, kann dabei das Superpositionsprinzip verwendet werden.
- Hierbei kann das Quellensignal in eine beliebige Reihendarstellung überführt werden, z.B. in die Fourierreihendarstellung.
- Die Wellenausbreitung kann nun für einzeln jeden Summanden berechnet werden. Die Gesamtlösung ergibt sich dann als Überlagerung bzw. Superposition der Einzellösungen.
- Bei vielen Problemstellungen lässt sich die Berechnung auf diese Weise deutlich vereinfachen.
- Es gilt zu beachten, dass das Superpositionsprinzip nicht für *nichtlineare* Medien gilt!

Komplexe Zeigerschreibweise

- Bei zeitharmonischer Anregung mit der Frequenz $\omega = 2\pi/T$ lässt sich beispielsweise das Vektorfeld der elektrischen Feldstärke separieren in

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi)$$

  wobei der Vektor $\mathbf{r}$ den Ortsvektor in einem gegebenen Koordinatensystem darstellt.
- Es ist in vielen Fällen hilfreich, den obigen Ausdruck mittels des *komplexen Zeigers* darzustellen als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp\left(\mathrm{j}\left[\omega t + \varphi\right]\right)$$

- Dabei zeigt der Unterstrich an, dass es sich um eine komplexe Größe handelt.
- Der reellwertige Feldvektor ergibt sich als Realteil des komplexen Zeigers zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)\right\} = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t)\right]$$

  wobei der hochgestellte Asterisk * für die komplexe Konjugation steht.

Komplexe Amplitudenschreibweise

- Bei harmonischer Zeitabängigkeit ergibt sich die Ableitung des komplexen Zeigers nach t zu

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp\left(\mathrm{j}\left[\omega t + \varphi\right]\right)}{\partial t} = \mathrm{j}\,\omega \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$$

- Die komplexe Zeigerschreibweise für zeitharmonische Größen lässt sich noch weiter vereinfachen, indem die Zeitabhängigkeit nur noch durch die gegebene Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ impliziert wird.
- Wir können den komplexen Zeiger dann schreiben als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{j}[\omega t + \varphi]) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{j}\,\varphi) \exp(\mathrm{j}\,\omega t) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{j}\,\omega t)$$

wobei $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{j}\,\varphi)$ die komplexe Amplitude implizit bezogen auf die Kreisfrequenz ω angibt.

Maxwellsche Gleichungen

- Die Maxwellschen Gleichungen für homogene Medien mit $\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon \underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}}$ gelten also, bei harmonischer Anregung mit der Kreisfrequenz ω, entsprechend auch für die komplexen Amplituden:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \kappa \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \mathrm{j}\,\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathrm{j}\,\omega\varepsilon \left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \qquad \text{(I)} \quad \textit{Durchflutungsgesetz}$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\mathrm{j}\,\omega\mu \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \qquad \text{(II)} \quad \textit{Induktionsgesetz}$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\,\underline{\rho}(\mathbf{r}) \qquad \text{(III)} \quad \textit{Gaußsches Gesetz}$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0 \qquad \text{(IV)}$$

- Bei der Verwendung der komplexen Amplitude entfällt also die explizite Zeitabhängigkeit.

Vorlesungsinhalte

Was Sie gelernt haben sollten

- Wie die vektoriellen Wellengleichungen für die elektrische und magnetische Feldstärke aus den Maxwellschen Gleichungen hergeleitet werden.
- Wieso die Wellengleichungen aus den Maxwellschen Gleichungen hergeleitet wurden.
- Warum der Lösungsansatz von d'Alembert vorhersagt, dass jede Welle als eine Überlagerung aus einer hin- und einer rücklaufenden Welle dargestellt werden kann.
- Wie eine periodische Funktion als Superposition von Cosinus- und Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz sowie einem Mittelwert dargestellt werden kann.
- Welchen mathematischen Vorteil die Beschreibung der Feldstärken durch die komplexe Zeigerdarstellung bietet.
- Wieso die Maxwellschen Gleichungen ohne explizite Zeitabhängigkeit und nur mit der komplexen Amplitude formuliert werden können.