Karlsruher Institut für Technologie

IPQ

Vorlesung 03: Zeitharmonische ebene Wellen und Poynting-Vektor

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2022/23

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 24. November 2022

Vorlesungsinhalte

Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung
2. Zeitharmonische ebene Wellen
3. Der Poynting-Vektor
4. Polarisation
5. Was Sie gelernt haben sollten

Komplexe Zeigerschreibweise

- Bei zeitharmonischer Anregung mit der Frequenz $\omega = 2\pi/T$ lässt sich beispielsweise das Vektorfeld der elektrischen Feldstärke separieren in

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi)$$

  wobei der Vektor $\mathbf{r}$ den Ortsvektor in einem gegebenen Koordinatensystem darstellt.
- Es ist in vielen Fällen hilfreich, den obigen Ausdruck mittels des *komplexen Zeigers* darzustellen als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp\left(\mathrm{j}\left[\omega t + \varphi\right]\right)$$

- Dabei zeigt der Unterstrich an, dass es sich um eine komplexe Größe handelt.
- Der reellwertige Feldvektor ergibt sich als Realteil des komplexen Zeigers zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)\right\} = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{E}}^{*}(\mathbf{r}, t)\right]$$

  wobei der hochgestellte Asterisk * für die komplexe Konjugation steht.

Komplexe Amplitudenschreibweise

- Bei harmonischer Zeitabängigkeit ergibt sich die Ableitung des komplexen Zeigers nach t zu

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp\left(\mathrm{j}\left[\omega t + \varphi\right]\right)}{\partial t} = \mathrm{j}\,\omega \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$$

- Die komplexe Zeigerschreibweise für zeitharmonische Größen lässt sich noch weiter vereinfachen, indem die Zeitabhängigkeit nur noch durch die gegebene Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ impliziert wird.
- Wir können den komplexen Zeiger dann schreiben als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{j}[\omega t + \varphi]) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{j}\,\varphi) \exp(\mathrm{j}\,\omega t) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{j}\,\omega t)$$

wobei $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{j}\,\varphi)$ die komplexe Amplitude implizit bezogen auf die Kreisfrequenz ω angibt.

Maxwellsche Gleichungen

- Die Maxwellschen Gleichungen für homogene Medien mit $\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon \underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}}$ gelten also, bei harmonischer Anregung mit der Kreisfrequenz ω, entsprechend auch für die komplexen Amplituden:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= \kappa \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \mathrm{j}\,\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathrm{j}\,\omega\varepsilon \left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) && \text{(I)} \quad \textit{Durchflutungsgesetz} \\
\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= -\mathrm{j}\,\omega\mu \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) && \text{(II)} \quad \textit{Induktionsgesetz} \\
\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon}\,\underline{\rho}(\mathbf{r}) && \text{(III)} \quad \textit{Gaußsches Gesetz} \\
\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0 && \text{(IV)}
\end{aligned}$$

- Bei der Verwendung der komplexen Amplitude entfällt also die explizite Zeitabhängigkeit.

Die Helmholtz-Gleichung

- Die Wellengleichungen ergeben sich auch für komplexe Amplituden aus den Maxwellschen Gleichungen.
- Dafür wird analog zu den zuvor betrachteten reellwertigen Vektorfeldern die Rotation über das Induktions- bzw. das Durchflutungsgesetz gebildet, wobei $\kappa = 0$ angenommen wird:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}) - \Delta \underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\,\omega\mu\,(\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) = -\mathrm{j}\,\omega\mu\,(\mathrm{j}\,\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}}) = \omega^2\mu\varepsilon\underline{\mathbf{E}} = k^2\underline{\mathbf{E}}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}) - \Delta \underline{\mathbf{H}} = \mathrm{j}\,\omega\varepsilon\,(\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) = \mathrm{j}\,\omega\varepsilon\,(-\mathrm{j}\,\omega\mu\underline{\mathbf{H}}) = \omega^2\mu\varepsilon\underline{\mathbf{H}} = k^2\underline{\mathbf{H}}$$

- Dabei wird die Wellenzahl mit $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ zu

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c}$$

- Ist das Medium ferner raumladungsfrei, sodass neben $\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}} = 0$ auch $\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0$ gilt, ergibt sich

$$\Delta\underline{\mathbf{E}} + k^2\underline{\mathbf{E}} = 0$$
$$\Delta\underline{\mathbf{H}} + k^2\underline{\mathbf{H}} = 0$$

- In dieser Form wird die Wellengleichung auch *Helmholtz-Gleichung* genannt.

Vorlesungsinhalte

Zeitharmonische ebene Wellen: Helmholtzgleichungen

- Analog zu Vorlesung 2 betrachten wir nun ebene Wellen, die sich in z-Richtung ausbreiten, jedoch zusätzlich zeitharmonisch sind.
- Die komplexen Zeiger des E- und H-Feldes sind folglich von der Form

$$\underline{\mathbf{E}}(z,t) = \underline{\mathbf{E}}(z) \exp\left(\mathrm{j}\,\omega t\right) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}(z,t) = \underline{\mathbf{H}}(z) \exp\left(\mathrm{j}\,\omega t\right) \ .$$

- Einsetzen der komplexen Zeiger in die Helmholtz-Gleichungen führt somit auf

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial z^2} + k^2 \underline{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial z^2} + k^2 \underline{\mathbf{H}} = 0\,.$$

- Diese beiden gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung haben die Lösungen

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}(z,t) &= \underline{\mathbf{E}}_0^+ \exp(\mathrm{j}[\omega t - kz]) + \underline{\mathbf{E}}_0^- \exp(\mathrm{j}[\omega t + kz]) \\ \underline{\mathbf{H}}(z,t) &= \underline{\mathbf{H}}_0^+ \exp(\mathrm{j}[\omega t - kz]) + \underline{\mathbf{H}}_0^- \exp(\mathrm{j}[\omega t + kz])\,, \end{aligned}$$

  wobei $\underline{\mathbf{E}}_0$ und $\underline{\mathbf{H}}_0$ die Zeiger zu den Feldvektoren zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ebene $z = 0$ sind.
- Die Superskripte $+$ bzw. $-$ stehen dabei für die sich in $+z$- bzw. $-z$-Richtung ausbreitende Welle.

Zeitharmonische ebene Wellen: Maxwellsche Gleichungen

- Neben den Helmholtz-Gleichungen müssen zeitharmonische ebene Wellen weiterhin das Durchflutungs- und das Induktionsgesetz erfüllen, also

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(z,t) = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}} - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{j}\,\omega\varepsilon \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{pmatrix} = \mathrm{j}\,\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}}(z,t)$$

und

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(z,t) = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{j}\,\omega\mu \begin{pmatrix} \underline{H}_x \\ \underline{H}_y \\ \underline{H}_z \end{pmatrix} = -\mathrm{j}\,\omega\mu\underline{\mathbf{H}}(z,t)\,.$$

Zeitharmonische ebene Wellen: Feldkomponenten

- Setzen wir nun die Lösungsansätze der Helmholtz-Gleichung in die Maxwellschen Gleichungen ein, so erhalten wir mit dem Wellenwiderstand $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon} = k/(\omega\varepsilon)$...

- ...für die in $+z$-Richtung laufende Welle

$$\begin{aligned}
\underline{E}_x^+ &= -\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\varepsilon}\frac{\partial \underline{H}_y^+}{\partial z} = \frac{k}{\omega\varepsilon}\underline{H}_y^+ = Z\underline{H}_y^+ \\
\underline{E}_y^+ &= \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\varepsilon}\frac{\partial \underline{H}_x^+}{\partial z} = -\frac{k}{\omega\varepsilon}\underline{H}_x^+ = -Z\underline{H}_x^+ \\
\underline{E}_z^+ &= 0 \\
\underline{H}_z^+ &= 0
\end{aligned}$$

- ...für die in $-z$-Richtung laufende Welle

$$\begin{aligned}
\underline{E}_x^- &= -\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\varepsilon}\frac{\partial \underline{H}_y^-}{\partial z} = -\frac{k}{\omega\varepsilon}\underline{H}_y^- = -Z\underline{H}_y^- \\
\underline{E}_y^- &= \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\varepsilon}\frac{\partial \underline{H}_x^+}{\partial z} = \frac{k}{\omega\varepsilon}\underline{H}_x^+ = Z\underline{H}_x^- \\
\underline{E}_z^- &= 0 \\
\underline{H}_z^- &= 0
\end{aligned}$$

- Da jeweils lediglich $\underline{E}_x$ und $\underline{H}_y$ bzw. $\underline{E}_y$ und $\underline{H}_x$ miteinander gekoppelt sind, lässt sich auch jede zeitharmonische ebene Welle als Überlagerung zweier, voneinander unabhängiger Wellen darstellen.

Zeitharmonische ebene Wellen: Wellenvektor

- Bisher haben wir ausschließlich ebene Wellen betrachtet, welche sich entlang der z-Achse ausgebreiten.
- Die Ausbreitung in Richtung des Einheitsvektors $\mathbf{e}_\mathrm{a}$ kann beschrieben werden durch den Wellenvektor

$$\mathbf{k} = k\,\mathbf{e}_\mathrm{a}$$

- Mit dem gegebenen H-Feldvektor $\underline{\mathbf{H}}_0$ bei $t = 0$ und $z = 0$ erhalten wir

$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}_0 \exp(\mathrm{j}(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))$$

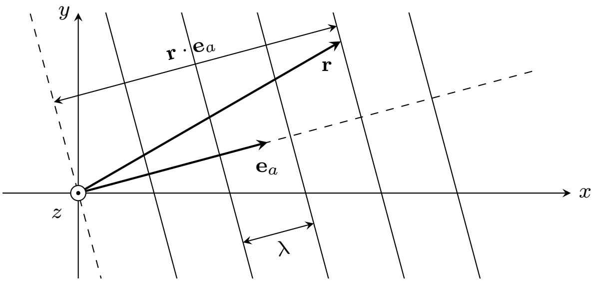
- Den E-Feldvektor erhalten wir daraus gemäß

$$\underline{\mathbf{E}} = Z\,(\underline{\mathbf{H}} \times \mathbf{e}_\mathrm{a})$$

- Die Vektoren $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{H}}$ und $\mathbf{e}_\mathrm{a}$ bilden dabei ein Rechtsschraubensystem.

Zeitharmonische ebene Wellen: Phasenfronten

- Für eine harmonische ebene Welle mit der Kreisfrequenz ω erhalten wir senkrecht zur Ausbreitungsrichtung zu einem gegebenen Zeitpunkt $t = t_0$ für $\omega t_0 \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \phi_0 \pm n2\pi, n \in \mathbb{Z}$ im Abstand $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ Ebenen konstanter Phase, welche auch als Phasen- oder Wellenfronten bezeichnet werden.



Vorlesungsinhalte

Elektromagnetische Feldenergie

- Elektrische und magnetische Felder speichern Energie (vgl. Plattenkondensator bzw. Spule).
- Die in einem Volumen V gespeicherte elektrische bzw. magnetische Energie kann bestimmt werden aus

$$W_\mathrm{e} = \int_V w_\mathrm{e} \, \mathrm{d}V \qquad \text{und} \qquad W_\mathrm{m} = \int_V w_\mathrm{m} \, \mathrm{d}V$$

- Dabei sind w_e und w_m auf das Volumen bezogene *Energiedichten*, die bestimmt werden können aus

$$w_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \qquad \text{und} \qquad w_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

- Die gesamte elektromagnetische Feldenergie ergibt sich als Summe der elektrischen und der magnetischen Feldenergie zu $W_\mathrm{em} = W_\mathrm{e} + W_\mathrm{m}$ und $w_\mathrm{em} = w_\mathrm{e} + w_\mathrm{m}$

Der Satz von Poynting (I)

- Der *Satz von Poynting* besagt, dass jede Änderung $\mathrm{d}W_{\mathsf{em}}$ der in einem Volumen V gespeicherten elektromagnetischen Feldenergie in einem Zeitintervall $\mathrm{d}t$ beschrieben werden kann als

$$\mathrm{d}W_{\mathsf{em}} = -\underbrace{\int_O \mathbf{S}\,\mathrm{d}\mathbf{O}\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{durch die Hüllfläche } O \\ \text{abgestrahlte Feldenergie}}} - \underbrace{\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{in Wärmeenergie} \\ \text{umgewandelte Feldenergie} \\ \text{(d.h. Ohmsche Verluste)}}}$$

- Der Vektor $\mathbf{S}$ wird hierbei als *Poynting-Vektor* bezeichnet. Er beschreibt Betrag und Richtung der pro Flächenelement und Zeiteinheit abgestrahlten elektromagnetischen Feldenergie. Er hat somit die Einheit W/m^2.

Der Satz von Poynting (II)

- Bezogen auf das Zeitintervall $\mathrm{d}t$ lässt sich der *Satz von Poynting* auch als Leistungsbilanz ausdrücken:

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathsf{em}}}{\mathrm{d}t} = -\int_O \mathbf{S}\,\mathrm{d}\mathbf{O} - \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V$$

- Mit Hilfe des Gaußschen Satzes und mittels der Energiedichte ergibt sich daraus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V w_{\mathsf{em}}\,\mathrm{d}V = -\int_V \nabla\cdot\mathbf{S}\,\mathrm{d}V - \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V$$

- Dies lässt sich mit den Energiedichten für das elektrische und das magnetische Feld schreiben als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right) = -\nabla\cdot\mathbf{S} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} \tag{1}$$

Der Satz von Poynting (III)

- Mit $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ sowie unter der Annahme, dass ε und μ nicht von der Zeit abhängen, lässt sich zeigen, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right) = \mathbf{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{2}$$

  wobei wir uns zunutze gemacht haben, dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) = \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}}{\mathrm{d}t}\right) = 2\mathbf{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t} \quad \text{und analog dazu} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}) = 2\mathbf{H}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}\,.$$

- Aus (1) und (2) ergibt sich somit

$$\nabla\cdot\mathbf{S} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} - \mathbf{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t} - \mathbf{H}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{E}\cdot\left(\mathbf{J} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t}\right) - \mathbf{H}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}$$

- Und schließlich mit den Maxwellschen Gleichungen für die Rotation von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$

$$\nabla\cdot\mathbf{S} = \mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) = \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

Der Poynting-Vektor

- Wird nun die Divergenz auf beiden Seiten der Gleichung weggelassen, so ergibt sich für den *Poynting-Vektor*

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

- Merke: Der *Poynting-Vektor* $\mathbf{S}$ beschreibt Betrag und Richtung der pro Flächenelement und Zeiteinheit abgestrahlten Feldenergie. Er hat die Einheit $\mathrm{J/s/m^2}$ bzw. $\mathrm{W/m^2}$.

Poynting-Vektor bei harmonischer Zeitabhängigkeit (I)

- Bei harmonischer Zeitabhängigkeit mit Kreisfrequenz ω und den reellen Feldvektoren

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\cos(\omega t) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})\cos(\omega t + \phi)$$

ergibt sich der Poynting-Vektor zu

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})]\cos(\omega t)\cos(\omega t + \phi)$$

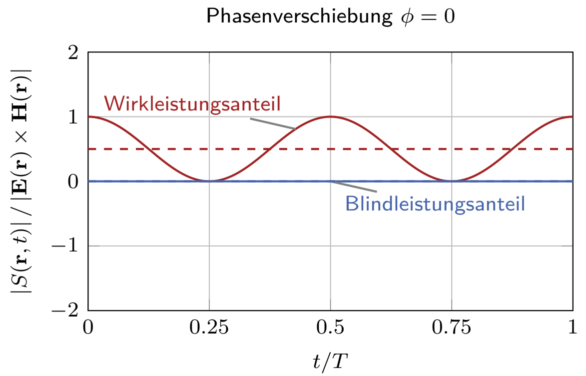
- Mit den Rechenregeln der Trigonometrie lässt sich dies auch schreiben als

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})]\left[\underbrace{(1+\cos(2\omega t))\cos(\phi)}_{\text{Wirkleistungsanteil}} - \underbrace{\sin(2\omega t)\sin(\phi)}_{\text{Blindleistungsanteil}}\right]$$

- Abhängig von der Phasenverschiebung ϕ ergibt sich ein Wirkleistungs- und ein Blindleistungsanteil.

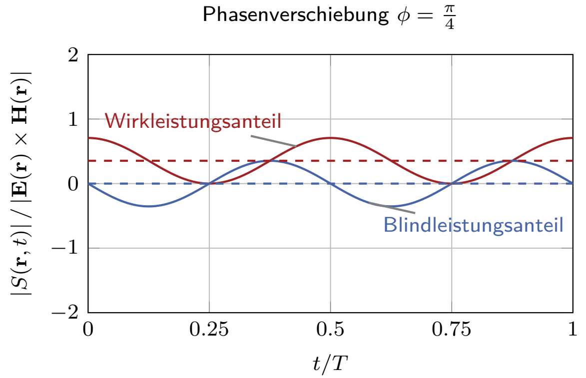
Visualisierung Wirk- & Blindleistungsanteil

- Normierte Darstellung des reellen instantanen Poynting-Vektors $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$ aufgeteilt in Wirkleistungs- und Blindleistungsanteil.
- Die gestrichelten Linien stellen die jeweiligen Mittelwerte dar.



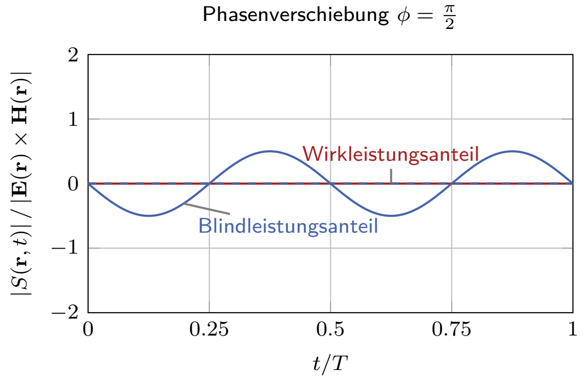
Visualisierung Wirk- & Blindleistungsanteil

- Normierte Darstellung des reellen instantanen Poynting-Vektors $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ aufgeteilt in Wirkleistungs- und Blindleistungsanteil.
- Die gestrichelten Linien stellen die jeweiligen Mittelwerte dar.



Visualisierung Wirk- & Blindleistungsanteil

- Normierte Darstellung des reellen instantanen Poynting-Vektors $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ aufgeteilt in Wirkleistungs- und Blindleistungsanteil.
- Die gestrichelten Linien stellen die jeweiligen Mittelwerte dar.



Poynting-Vektor bei harmonischer Zeitabhängigkeit (II)

- Sowohl die Wirkleistung als auch die Blindleistung oszillieren mit der Kreisfrequenz 2ω.
- Im zeitlichen Mittel über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ bleibt allein die Wirkleistung

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})\right]$$

Komplexer Poynting-Vektor (I)

- Bei Feldern mit harmonischer Zeitabhängigkeit und somit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t} + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t}\right]$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t} + \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t}\right]$$

ergibt sich der Poynting Vektor zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \\
&= \frac{1}{4}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t} + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t}\right] \times \left[\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t} + \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\omega t} + \left(\underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\omega t}\right] \\
&= \frac{1}{2}\Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) + \left(\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\omega t}\right\}
\end{aligned}$$

Komplexer Poynting-Vektor (II)

- Im zeitlichen Mittel ergibt sich

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\Re\left\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\right\}$$

- Somit ist der komplexe Poynting-Vektor definiert als

$$\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\right]$$

- Real- und Imaginärteil des komplexen Poynting-Vektors geben dabei den Wirk- und den Blindleistungsanteil an.
- Man beachte, dass bei der obigen Herleitung zwei komplexe Zeiger auf nichtlineare Weise verknüpft werden. Es kann daher nicht direkt mit den komplexen Amplituden gerechnet werden!

Vorlesungsinhalte

Polarisation elektromagnetischer Wellen

- Die *Polarisation* einer elektromagnetischen Welle beschreibt die Schwingungsrichtung ihres elektrischen Feldvektors und deren zeitliche bzw. räumliche Entwicklung.
- Im Rahmen der Vorlesung gehen wir stets davon aus, dass elektromagnetische Wellen vollständig polarisiert sind - eine Annahme, die für zeitharmonische ebene Wellen stets gerechtfertigt ist.
- Vereinfacht ausgedrückt bedeutet vollständig polarisiert, dass die beiden transversalen E-Feldkomponenten stets eine feste Amplituden- und Phasenbeziehung aufweisen.
- *Wichtig:* Die Polarisation einer Welle ist nicht zu verwechseln mit dem elektrischen Polarisationsfeld in einem Medium, das die Wechselwirkung dieses Mediums mit einem elektrischen Feld beschreibt.

Polarisation zeitharmonischer ebener Wellen

- Betrachten wir eine sich in z-Richtung ausbreitende zeitharmonische ebene Welle an einem festen Ort, z.B. bei $z = 0$, wobei die transversalen Komponenten des reellwertigen elektrischen Feldes gegeben sind durch

$$E_x(t) = E_x \cos(\omega t + \varphi_x) = E_0\, a_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$
$$E_y(t) = E_y \cos(\omega t + \varphi_y) = E_0\, a_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

  mit den Amplituden E_x und E_y sowie den Phasen φ_x und φ_y.

- Mit der Normierung $E_0 = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ sowie den normierten Amplituden a_x und a_y mit $a_x^2 + a_y^2 = 1$ können wir die transversalen Feldkomponenten schreiben als

$$E_x(t) = E_0\, a_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$
$$E_y(t) = E_0\, a_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

Polarisationsellipsen (I)

- Definieren wir nun den transversalen elektrischen Feldvektor $\mathbf{E}^{\perp}$ mit

$$\mathbf{E}^{\perp}(t) = E_0 \begin{pmatrix} a_x \cos(\omega t + \varphi_x) \\ a_y \cos(\omega t + \varphi_y) \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} a_x \cos(\varphi_x) \cos(\omega t) - a_x \sin(\varphi_x) \sin(\omega t) \\ a_y \cos(\varphi_y) \cos(\omega t) - a_y \sin(\varphi_y) \sin(\omega t) \end{pmatrix} .$$

- Bei der Zerlegung in die gewichtete Summe von Sinus- und Cosinusschwingungen fällt auf, dass die Form von $\mathbf{E}^{\perp}$ gerade einer Ellipse mit den Halbachsen a und b entspricht, die um den Winkel α um den Koordinatenursprung gedreht wurde:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ b \sin(\omega t) \end{pmatrix}}_{\text{Ellipse}} = \begin{pmatrix} a \cos(\alpha) \cos(\omega t) - b \sin(\alpha) \sin(\omega t) \\ a \sin(\alpha) \cos(\omega t) + b \cos(\alpha) \sin(\omega t) \end{pmatrix} .$$

- Aus dieser Beobachtung schlussfolgern wir, dass die Spitze des E-Feldvektors im Allgemeinen entlang einer um den Koordinatenursprung rotierten Ellipse verläuft.

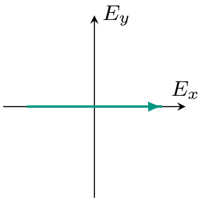
Polarisationsellipsen (II)

- Für bestimmte Werte von a_x und a_y bzw. $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ entartet die Ellipse.
- **1. Sonderfall**: Gilt $a_x = 0$, $a_y = 0$ oder schwingen die beiden transversalen Komponenten gleich- oder gegenphasig (d.h. $\Delta\varphi = m\pi, m \in \mathbb{N}$), verläuft die Feldvektorspitze entlang einer Geraden ($\implies$ lineare Polarisation).
- **2. Sonderfall**: Gilt $a_x = a_y$ und beträgt die Phasendifferenz $\Delta\varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2}$, verläuft die Feldvektorspitze entlang eines Kreises ($\implies$ zirkulare Polarisation).
- Der Polarisationszustand einer elektromagnetischen Welle wird nicht nur von der Bahn des Feldvektors, sondern auch dessen Drehrichtung bestimmt, welche wir stets aus der Perspektive eines Beobachters angeben, auf den die Welle zuläuft.
- In Abhängigkeit der relativen Phasenlage der transversalen Feldkomponenten, d.h. von $\Delta\varphi \in [-\pi, \pi)$, dreht sich der elektrische Feldvektor...
  - ...im Uhrzeigersinn (rechtsdrehend) für $\Delta\varphi > 0$
  - ...gegen den Uhrzeigersinn (linksdrehend) für $\Delta\varphi < 0$.

Polarisationsellipsen (III)

- Tragen wir die Spitze des E-Feldvektors in einer Ebene $z =$ const über der Zeit in einem E_x-E_y-Graphen auf, erhalten wir für gegebenes a_x, a_y, φ_x und φ_y die sogenannten Polarisationsellipsen.
- Die folgenden Graphen zeigen Beispiele, wobei die Spitze des Pfeils den Wert bei $t = 0$ angibt:

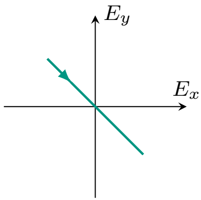
linear in x-Richtung



$a_x = 1 \quad \phi_x = 0$

$a_y = 0 \quad \phi_y = 0$

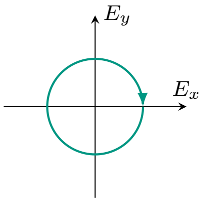
$-45°$ linear



$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \phi_x = \frac{4\pi}{3}$

$a_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \phi_y = \frac{\pi}{3}$

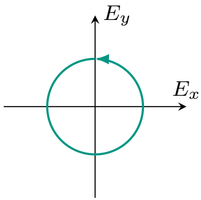
rechtszirkular



$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \phi_x = 0$

$a_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \phi_y = \frac{\pi}{2}$

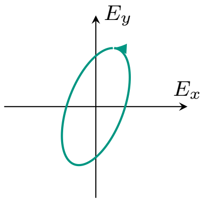
linkszirkular



$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \phi_x = \frac{\pi}{2}$

$a_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \phi_y = 0$

elliptisch



$a_x = \frac{1}{2} \quad \phi_x = \frac{\pi}{3}$

$a_y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \phi_y = 0$

Jones-Vektor Darstellung

Karlsruher Institut für Technologie

- In komplexer Zeigerschreibweise lassen sich die transversalen Feldkomponenten darstellen als

$$\underline{E}_x(t) = E_x \exp(\mathrm{j}\,\omega t + \mathrm{j}\,\varphi_x) = \underline{E}_x \exp(\mathrm{j}\,\omega t) = E_0\,\underline{a}_x \exp(\mathrm{j}\,\omega t)$$
$$\underline{E}_y(t) = E_y \exp(\mathrm{j}\,\omega t + \mathrm{j}\,\varphi_y) = \underline{E}_y \exp(\mathrm{j}\,\omega t) = E_0\,\underline{a}_y \exp(\mathrm{j}\,\omega t)$$

- Aus den normierten komplexen Amplituden $\underline{a}_x = a_x\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi_x}$ und $\underline{a}_y = a_y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi_y}$ ergibt sich der Jones Vektor

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \end{pmatrix},$$

  wobei aufgrund obiger Normierung $|\underline{a}_x|^2 + |\underline{a}_y|^2 = 1$ gilt.
- Mithilfe des Jones-Vektors können wir den Polarisationszustand einer vollständig polarisierten elektromagnetischen Welle beschreiben.
- So kann der Einfluss eines Systems, etwa ein Polarisationsfilter, auf die Polarisation einer elektromagnetischen Wellen mathematisch einfach mithilfe eines Matrix-Vektor-Produkts formulieren werden.

Vorlesungsinhalte

Was Sie gelernt haben sollten

- Wieso die Maxwellschen Gleichungen ohne explizite Zeitabhängigkeit und nur mit der komplexen Amplitude formuliert werden können.
- Was der Zusammenhang der allgemeinen Wellengleichungen und der Helmholtz-Gleichung unter Berücksichtigung der komplexen Zeigerschreibweise ist.
- Wie zeitharmonische ebene Wellen mit der komplexen Zeigerschreibweise und der Wellenzahl beschrieben werden können.
- Wie die abgestrahlte Feldenergie durch den Poynting-Vektor beschrieben wird.
- Wie der reelle und komplexe Poynting-Vektor zusammenhängen.
- Auf welche Weise Wirk- und Blindleistungstransport durch den Poynting-Vektor beschrieben werden.
- Welche Bedeutung die Polarisation einer Welle hat.
- Wie verschiedene Polarisationszustände zustande kommen und wie diese mathematisch beschrieben werden können.