

Vorlesung 04: Elektromagnetische Wellen in dispersiven Medien

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2022/23

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 24. November 2022



Vorlesungsinhalte

1. Einleitung
2. Elektrische Polarisierung bei schnell veränderlichen Feldern
3. Komplexe Permittivität und komplexe Brechzahl
4. Dielektrische und leitende Medien
5. Ebene Wellen in dispersiven Medien
6. Was Sie gelernt haben sollten
7. Anhang

Vorlesungsinhalte

1. Einleitung

2. Elektrische Polarisation bei schnell veränderlichen Feldern

3. Komplexe Permittivität und komplexe Brechzahl

4. Dielektrische und leitende Medien

5. Ebene Wellen in dispersiven Medien

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Einleitung

- Reale Medien weisen unter dem Einfluss elektromagnetischer Felder dispersives Verhalten auf, d.h. die Reaktion des Mediums auf das Feld hängt von dessen Schwingungsfrequenz ab.
- Dieses dispersive Verhalten entsteht durch die Masse (Trägheit) der Elementarteilchen, Ionen oder Moleküle, welche die Reaktion auf angelegte zeitvariable Felder verzögert.
- Auch braucht das Medium wieder eine gewisse Zeit nach dem Ausschalten des externen Feldes, bis es wieder in Ruhe ist.
- Wie wir sehen werden, werden in Folge der Dispersion sich im Medium in Form von elektromagnetischen Wellen ausbreitende Signale verzerrt.
- Da die Abhängigkeit eines Mediums von zeitvariablen magnetischen Feldern meist viel kleiner ist als die Abhängigkeit von elektrischen Feldern, beschränken wir uns in dieser Vorlesung auf letztere.

Vorlesungsinhalte

1. Einleitung
- 2. Elektrische Polarisierung bei schnell veränderlichen Feldern**
3. Komplexe Permittivität und komplexe Brechzahl
4. Dielektrische und leitende Medien
5. Ebene Wellen in dispersiven Medien
6. Was Sie gelernt haben sollten
7. Anhang

Elektrische Polarisation

- In Vorlesung 1 haben wir bereits diskutiert, dass die elektrische Polarisation makroskopisch die Wechselwirkung eines (dielektrischen) Mediums mit einem externen elektrischen Feld beschreibt.
- Im Fall eines linearen, isotropen und näherungsweise gedächtnisfreien Mediums haben wir die elektrische Polarisation dabei mittels der elektrischen Suszeptibilität definiert als

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}.$$

- Zwar können wir in vielen Anwendungsfällen vereinfachend annehmen, dass die Reaktionszeit des Mediums deutlich kürzer ist als die Änderungszeit des elektrischen Feldes (Gedächtnisfreiheit); bei schnell-veränderlichen Feldern gilt diese Näherung jedoch oftmals nicht.
- Um die Reaktionszeit des Mediums zu berücksichtigen, definieren wir nun mit der zeitabhängigen elektrischen Suszeptibilität $\hat{\chi}_e(t)$ die elektrische Polarisation gemäß

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau.$$

Frequenzabhängige elektrische Suszeptibilität (I)

- Da jedes reale Medium erst ab dem Moment auf ein elektrisches Feld reagieren kann, ab dem besagtes Feld tatsächlich anliegt, muss $\hat{\chi}_e(t) = 0 \forall t < 0$ gelten; $\hat{\chi}_e$ ist also eine *kausale Funktion*.
- Definieren wir nun die Frequenzantwort des Mediums zu

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \mathcal{F}\{\underline{\chi}_e(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(t) \exp(-j\omega t) dt$$

erhalten wir für diese aufgrund der Kausalität

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \int_0^{\infty} \hat{\chi}_e(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

- Diesen Ausdruck können wir mithilfe der Heaviside-Funktion (auch Einheitssprung) $\Theta(t)$ formulieren als

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(t) \Theta(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Frequenzabhängige elektrische Suszeptibilität (II)

- Dabei fällt auf, dass die rechte Seite gerade der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{\hat{\chi}_e(t) \cdot \Theta(t)\}$ entspricht.
- Vergleichen wir nun die linke und rechte Seite der Gleichung und verwenden das Faltungstheorem, erkennen wir, dass die Frequenzantwort $\underline{\chi}_e(\omega)$ invariant gegenüber einer Faltung mit der Fouriertransformierten der Heaviside-Distribution sein muss:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(t) \Theta(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$\mathcal{F}\{\hat{\chi}_e(t)\} = \mathcal{F}\{\hat{\chi}_e(t) \cdot \Theta(t)\} = \mathcal{F}\{\hat{\chi}_e(t)\} * \mathcal{F}\{\Theta(t)\}.$$

- Setzen wir die Fouriertransformierte der Heaviside-Funktion (3) in die Gleichung ein, erhalten wir mit der Dirac-Impuls $\delta(\omega)$ und dem Faltungstheorem (4)

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \mathcal{F}\{\hat{\chi}_e(t) \cdot \Theta(t)\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{\hat{\chi}_e(t)\} * \mathcal{F}\{\Theta(t)\} = \underline{\chi}_e(\omega) * \left(\frac{\delta(\omega)}{2} - \frac{j}{2\pi\omega} \right).$$

Herleitung der Kramers-Kronig-Beziehungen (I)

- Mithilfe des Cauchyschen Hauptwerts

$$\mathcal{P} \int_a^b \frac{1}{x - x_0} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0 - \epsilon} \frac{1}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \epsilon}^b \frac{1}{x - x_0} dx \right)$$

können wir die Faltung trotz der Singularität bei $\omega = \omega'$ in Integralform darstellen

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\chi}_e(\omega') \delta(\omega - \omega') d\omega' - j \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' = \frac{1}{2} \underline{\chi}_e(\omega) - j \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'.$$

- Umstellen, d.h. multiplizieren mit 2 und subtrahieren von $\underline{\chi}_e(\omega)$, führt schließlich auf die Beziehung

$$\underline{\chi}_e(\omega) = -j \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'. \quad (1)$$

Herleitung der Kramers-Kronig-Beziehungen (II)

- Da $\hat{\chi}_e(t)$ reell ist, weist $\underline{\chi}_e(\omega)$ hermitesche Symmetrie auf, d.h. es gilt $\underline{\chi}_e(-\omega) = \underline{\chi}_e^*(\omega)$.
- Mithilfe dieser Eigenschaft können wir (1) vereinfachen: Aufteilen in zwei Integrale, Substituieren mit $\omega' = -\omega'$, Vertauschen der Integrationsgrenzen und erneutes Zusammenführen liefert

$$\begin{aligned} \underline{\chi}_e(\omega) &= \frac{-j}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' = \frac{-j}{\pi} \mathcal{P} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' + \int_0^{\infty} \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \right) \\ &= \frac{-j}{\pi} \mathcal{P} \left(- \int_{\infty}^0 \frac{\underline{\chi}_e(-\omega')}{\omega + \omega'} d\omega' + \int_0^{\infty} \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \right) = \frac{-j}{\pi} \mathcal{P} \left(\int_0^{\infty} \frac{\underline{\chi}_e^*(\omega')}{\omega + \omega'} + \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \right). \end{aligned}$$

- Bringen wir die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner, ergibt sich für den Integranden bzw. $\underline{\chi}_e$

$$\begin{aligned} \frac{\underline{\chi}_e^*(\omega')}{\omega + \omega'} + \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} &= \frac{\underline{\chi}_e^*(\omega') (\omega - \omega') + \underline{\chi}_e(\omega') (\omega + \omega')}{\omega^2 - \omega'^2} = 2 \frac{\omega \Re\{\underline{\chi}_e(\omega')\} + \omega' j \Im\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2}, \\ \implies \underline{\chi}_e(\omega) &= \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \left(\int_0^{\infty} \frac{\omega' \Im\{\underline{\chi}_e(\omega')\} - j \omega \Re\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' \right). \end{aligned}$$

Die Kramers-Kronig-Beziehungen

- Vergleichen wir nun den Real- und Imaginärteil auf der linken und rechten Seite der Gleichung erhalten wir die sogenannten Kramers-Kronig-Beziehungen

$$\Re\{\underline{\chi}_e(\omega)\} = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega' \Im\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$

$$\Im\{\underline{\chi}_e(\omega)\} = -\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega \Re\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$

- Wie wir später sehen werden, beschreibt der Real- bzw. Imaginärteil von $\underline{\chi}_e$ die relative Permittivität bzw. die Absorption im Medium.
- Folglich stellen die Kramers-Kronig-Relationen eine direkte Beziehung zwischen Brechung und Absorption her.
- So folgt insbesondere, dass jedes Medium mit $\Re\{\underline{\chi}_e \neq 0\}$ auch automatisch eine nicht-verschwindende Absorption aufweist, also verlustbehaftet ist.

Vorlesungsinhalte

1. Einleitung
2. Elektrische Polarisation bei schnell veränderlichen Feldern
- 3. Komplexe Permittivität und komplexe Brechzahl**
4. Dielektrische und leitende Medien
5. Ebene Wellen in dispersiven Medien
6. Was Sie gelernt haben sollten
7. Anhang

Komplexe Permittivität und komplexe Brechzahl

- Für ein zeitharmonisches elektrisches Feld bei der Kreisfrequenz ω erhalten wir somit für die dielektrische Verschiebungsdichte

$$\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 (1 + \underline{\chi}_e) \underline{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \underline{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \underline{n}^2 \underline{\mathbf{E}}$$

wobei $\underline{\varepsilon}_r$ die komplexe relative Permittivität und $\underline{n} = n_{re} + j n_{im} = \sqrt{1 + \underline{\chi}_e}$ die komplexe Brechzahl bezeichnet.

- Insbesondere in der Optik wird üblicherweise anstelle der (komplexen) relativen Permittivität die (komplexe) Brechzahl verwendet, welche gegeben ist als

$$\underline{n} = \sqrt{\underline{\varepsilon}_r}.$$

- Umgekehrt erhalten wir bei gegebener Brechzahl die Permittivität gemäß

$$\underline{\varepsilon}_r = \underline{n}^2 = \underbrace{n_{re}^2 - n_{im}^2}_{=\underline{\varepsilon}_{r,re}} + j \underbrace{2n_{re}n_{im}}_{=\underline{\varepsilon}_{r,im}}.$$

Lorentz-Drude-Resonatormodel (I)

- Die Wechselwirkung zwischen elektromagnetischen Feldern und Materie ist im Detail sehr komplex und nur mit Hilfe der Quantenphysik exakt zu beschreiben.
- Mithilfe des klassischen Modells von Lorentz und Drude können wir jedoch zumindest ein prinzipielles Verständnis gewinnen. Es geht von einem polarisierbaren linearen Medium aus, in welchem Ladungen schwingungsfähige Systeme darstellen.
- Die räumliche Verschiebung Δs einer Ladung q mit der Masse m wird beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$\underbrace{m \frac{d^2 \Delta s}{dt^2}}_{\text{Beschleunigungskraft}} = \underbrace{q \mathbf{E}}_{\text{Lorentzkraft}} - \underbrace{\frac{m}{\tau} \frac{d \Delta s}{dt}}_{\text{Reibungskraft}} - \underbrace{m \omega_0^2 \Delta s}_{\text{Federkraft}} .$$

- Diese folgt direkt aus dem zweiten Newtonschen Gesetz und besagt, dass die Kraft, mit der die Ladung beschleunigt wird, sich ergibt aus der Lorentzkraft als Folge des elektrischen Feldes \mathbf{E} abzüglich einer Reibungskraft, welche proportional zur Geschwindigkeit ist und durch die Zeitkonstante τ , und einer Federkraft, proportional zum Quadrat der Resonanzfrequenz ω_0 .

Lorentz-Drude-Resonatormodel (II)

- Betrachten wir ein Volumenelement mit N Dipolen und dem mittleren Dipolmoment $\bar{\mathbf{p}}_{\text{el}} = q\Delta\mathbf{s}$, so ergibt sich das Polarisationsfeld zu

$$\mathbf{P} = N\bar{\mathbf{p}}_{\text{el}} = Nq\Delta\mathbf{s}$$

- Setzen wir diese Gleichung in die Bewegungsgleichung ein, so können wir diese schreiben als

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{P} = \varepsilon_0 \omega_{\text{P}}^2 \mathbf{E}$$

wobei wir mit

$$\omega_{\text{P}} = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}}$$

die Plasmafrequenz als weitere Eigenschaft des Materials eingeführt haben.

Komplexe Permittivität des Lorentz-Oszillators (I)

- Für ein zeitharmonisches Feld mit der Kreisfrequenz ω und den komplexen Amplituden $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{P}}$ (beachte: $d/dt \rightarrow j\omega$) lässt sich diese Differentialgleichung folgendermaßen vereinfachen

$$-\omega^2 \underline{\mathbf{P}} + j \frac{\omega}{\tau} \underline{\mathbf{P}} + \omega_0^2 \underline{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \omega_p^2 \underline{\mathbf{E}}$$

- Diese Gleichung können wir überführen in die bekannte Form $\underline{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 (\underline{\varepsilon}_r(\omega) - 1) \underline{\mathbf{E}}$ mit der frequenzabhängigen und komplexen relativen Permittivität

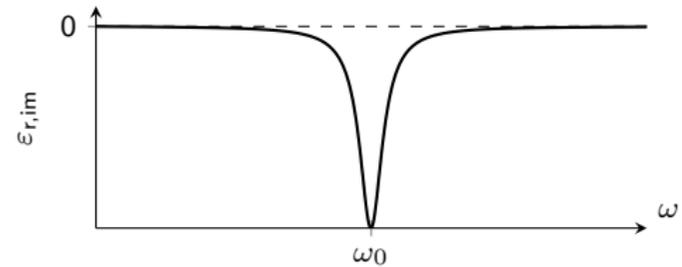
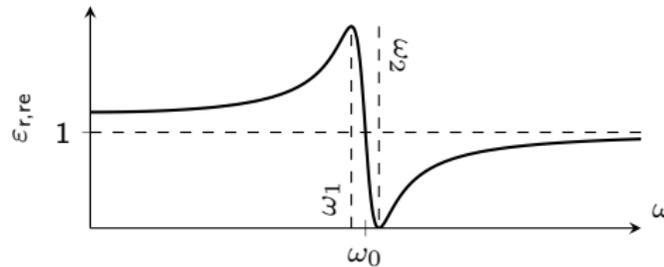
$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \underline{\chi}_e(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega/\tau} = \varepsilon_{r,\text{re}}(\omega) + j \varepsilon_{r,\text{im}}(\omega).$$

- Für deren Real- und Imaginärteil erhalten wir

$$\varepsilon_{r,\text{re}}(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{r,\text{im}}(\omega) = -\frac{\omega_p^2 \omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \quad (2)$$

Komplexe Permittivität des Lorentz-Oszillators (II)

- Gemäß der Bewegungsgleichung tritt bei $\omega = \omega_0$ eine Resonanz auf, wodurch elektrische Feldenergie an das schwingungsfähige System übertragen wird.
- Der Imaginärteil der relativen Permittivität erreicht dementsprechend ein Minimum.
- Den Verlauf des Realteils können wir in drei Bereiche aufteilen: Für $\omega < \omega_1$ und $\omega > \omega_2$ ist die Steigung von $\varepsilon_{r, \text{re}}$ positiv, im Intervall $\omega_1 < \omega < \omega_2$ ist die Steigung hingegen negativ.
- Wie wir im Folgenden noch diskutieren, spielt die Steigung des Realteils der relativen Permittivität eine wichtige Rolle bei der Übertragung von Informationssignalen mit elektromagnetischen Wellen.



Komplexe Permittivität des Lorentz-Oszillators (III)

- Auf Folie 11 haben wir gezeigt, dass die Kramers-Kronig-Beziehungen den Real- und Imaginärteil der elektrischen Suszeptibilität $\underline{\chi}_e$ verknüpfen.
- Mit $\underline{\varepsilon}_r = 1 + \underline{\chi}_e$ erhalten wir folgende Beziehungen zwischen Real- und Imaginärteil von $\underline{\varepsilon}_r$

$$\varepsilon_{r,\text{re}}(\omega) = 1 + \Re\{\underline{\chi}_e(\omega)\} = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega' \Im\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega' \varepsilon_{r,\text{im}}(\omega')}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$

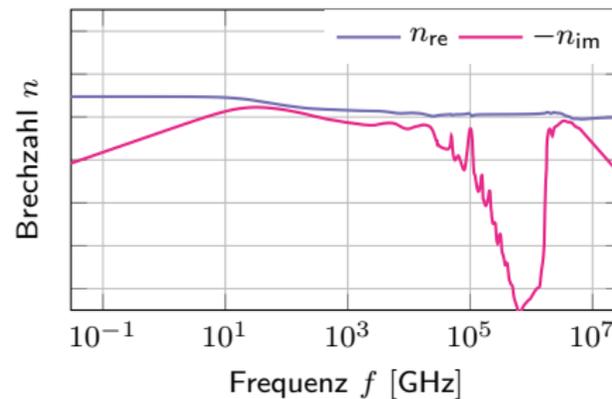
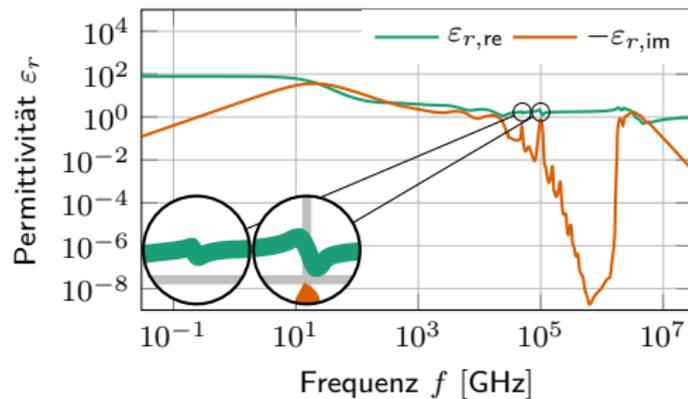
$$\varepsilon_{r,\text{im}}(\omega) = \Im\{\underline{\chi}_e(\omega)\} = -\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega \Re\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' = -\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega (\varepsilon_{r,\text{re}}(\omega') - 1)}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$

- Erwartungsgemäß lässt sich zeigen, dass auch $\varepsilon_{r,\text{re}}(\omega)$ und $\varepsilon_{r,\text{im}}(\omega)$ aus (2) gerade durch die obigen Beziehungen verknüpft sind.

Komplexe Permittivität von Wasser

- Im Allgemeinen weisen Medien, wie die Permittivität bzw. Brechzahl von Wasser unten zeigt, vielzählige Resonanzen mit unterschiedlichen Plasma- und Resonanzfrequenzen sowie Zeitkonstanten auf.
- Für die relative Permittivität bzw. die Brechzahl ergeben sich entsprechend Ausdrücke der Form

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \sum_i \frac{\omega_{P,i}^2}{\omega_{0,i}^2 - \omega^2 - j\omega/\tau_i}$$



Daten aus Segelstein 1981; können [hier](#) gesammelt heruntergeladen werden.

Vorlesungsinhalte

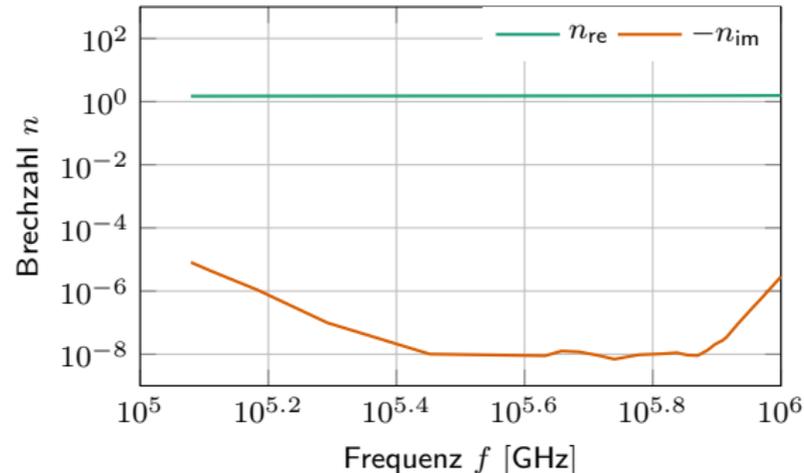
1. Einleitung
2. Elektrische Polarisierung bei schnell veränderlichen Feldern
3. Komplexe Permittivität und komplexe Brechzahl
- 4. Dielektrische und leitende Medien**
5. Ebene Wellen in dispersiven Medien
6. Was Sie gelernt haben sollten
7. Anhang

Dielektrische Medien

- In dielektrischen Medien (auch Dielektrika genannt) sind die vorhandenen Ladungsträger nicht frei beweglich, weshalb die Stromdichte \mathbf{J} und die Raumladungsdichte $\rho = 0$ verschwinden.
- Dementsprechend haben Dielektrika auch eine sehr geringe elektrische Leitfähigkeit, etwa $\kappa < 1 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\Omega \text{ m}}$, welche häufig als $\kappa \approx 0$ angenähert wird.
- Wird ein äußeres elektrisches Feld angelegt, so können sich allerdings gebundene Ladungsträger (Moleküle, Ionen oder Elektronen) ausrichten. Ist das elektrische Feld zeitlich veränderlich, führt dies zu einem Verschiebungsstrom.
- Auch in dielektrischen Medien können aufgrund von Reibung gebundener beschleunigter Ladungsträger Verluste auftreten.
- Der Imaginärteil der Permittivität bzw. der Brechzahl kann jedoch häufig gegenüber dem Realteil vernachlässigt werden.
- Dielektrika können dabei gasförmig, flüssig und fest sein. Beispiele für dielektrische Medien sind Gläser, Polymere, Keramiken sowie Gase.

Beispiel: Komplexe Brechzahl von Glas

- Eine Übersicht der komplexen Brechzahl von verschiedenen Medien findet sich z.B. unter <https://refractiveindex.info/>.



Komplexe Brechzahl des Glases Schott N-BK7 gemäß Polyanskiy 2022

Leitende Medien

- In leitenden Materialien, insbesondere in Metallen, gibt es frei bewegliche Elektronen.
- Auch das Verhalten der freien Elektronen können wir mithilfe des Lorentz-Drude-Modells beschreiben.
- Da die Elektronen frei sind, verschwindet die Federkraft und für die Resonanzfrequenz gilt $\omega_0 = 0$.
- Für die komplexe Permittivität erhalten wir dann

$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\omega\tau^{-1}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}} - j \frac{\omega_p^2(\omega\tau)^{-1}}{\omega^2 + \tau^{-2}}$$

- Da sich in Metallen freie Ladungsträger bewegen, lässt sich ein Zusammenhang mit der komplexen Leitfähigkeit herstellen. Es gilt

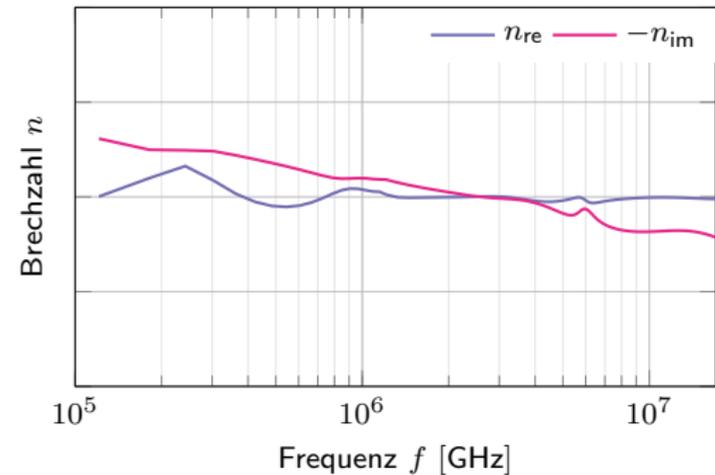
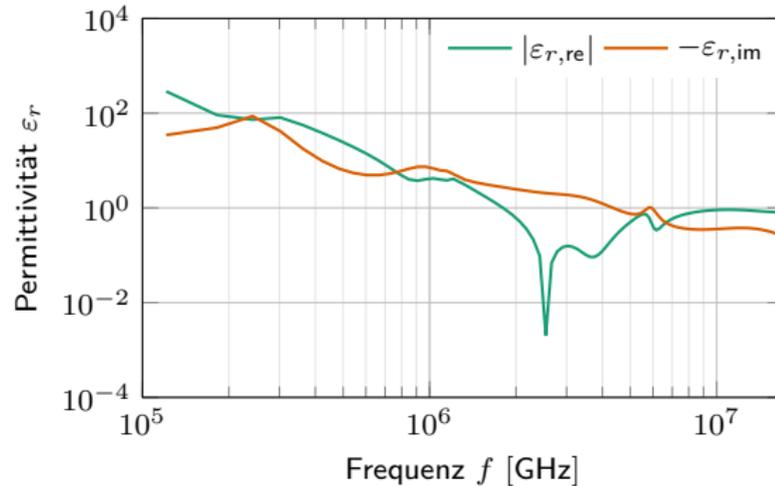
$$\underline{\mathbf{J}} = j\omega\underline{\mathbf{P}} = j\omega\varepsilon_0(\underline{\varepsilon}_r - 1)\underline{\mathbf{E}} = \underline{\kappa}\underline{\mathbf{E}}$$

- Daraus folgt für die im Allgemeinen komplexe Leitfähigkeit

$$\underline{\kappa} = \frac{\kappa_0}{1 + j\omega\tau} \quad \text{mit} \quad \kappa_0 = \varepsilon_0\omega_p^2\tau = \frac{Ne^2}{m_e}\tau$$

Beispiel: Komplexe Brechzahl von Kupfer

- In Metallen kann es vorkommen, dass der Imaginärteil der Brechzahl betragsmäßig größer wird als ihr Realteil. Das bedeutet, dass der Realteil der Permittivität negativ werden kann.



Komplexe Brechzahl von Kupfer gemäß Polyanskiy 2022

Ideale Leiter

- Ein idealer Leiter bezeichnet ein idealisiertes Medium, in welchem freie Elektronen vorhanden sind, die verlust- und trägheitsfrei einem elektrischen Feld folgen.
- Im zuvor eingeführten Oszillatormodell entspricht diese Annahme dem Fall $\tau \rightarrow \infty$ und $\omega_p \rightarrow \infty$.
- Innerhalb des idealen Leiters kann kein elektrisches Feld existieren, weshalb gemäß der Maxwell'schen Gleichungen auch kein zeitabhängiges Magnetfeld existieren kann (ein statisches Magnetfeld ist jedoch zulässig).
- Demzufolge ist in einem idealen Leiter die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen nicht möglich.

Vorlesungsinhalte

1. Einleitung
2. Elektrische Polarisation bei schnell veränderlichen Feldern
3. Komplexe Permittivität und komplexe Brechzahl
4. Dielektrische und leitende Medien
- 5. Ebene Wellen in dispersiven Medien**
6. Was Sie gelernt haben sollten
7. Anhang

Gedämpfte ebene Wellen (I)

- In der vorherigen Vorlesung haben wir zeitharmonische ebene Wellen als Lösung der Helmholtzgleichungen kennengelernt.
- Für den komplexen Zeiger der x -Komponente des elektrischen Feldstärkevektors einer sich in $+z$ -Richtung ausbreitenden ebenen Welle gilt

$$\underline{E}_x(z, t) = \underline{E}_{x,0} \exp(j[\omega t - \underline{k}z])$$

mit der im Allgemeinen komplexen Wellenzahl

$$\underline{k} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r} = \frac{\omega}{c_0} \underline{n} = \frac{\omega}{c_0} (n_{\text{re}} + j n_{\text{im}}) = \beta - j \alpha$$

- Damit erhalten wir

$$\underline{E}_x(z, t) = \underline{E}_{x,0} \exp(-\alpha z) \exp(j[\omega t - \beta z])$$

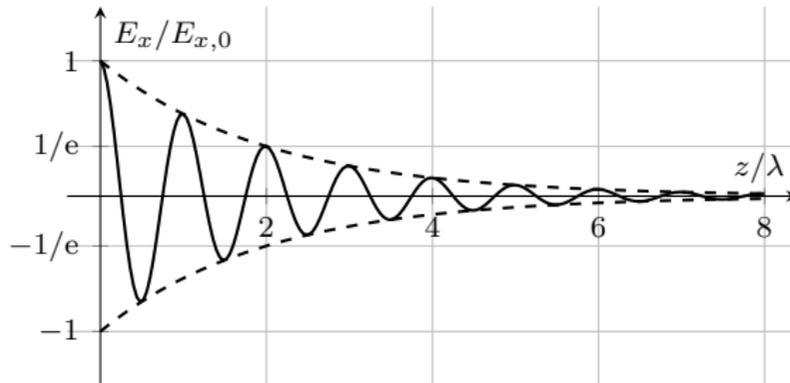
was einer gedämpften ebenen Welle mit der Dämpfungskonstante $\alpha = -\Im\{\underline{k}\} = -\frac{\omega n_{\text{im}}}{c_0}$ entspricht.

Gedämpfte ebene Wellen (II)

- Die zugehörige Feldkomponente bzw. der Realteil des komplexen Zeigers hat folglich für $\underline{E}_{x,0} = E_{x,0}$ die Form

$$E_x(z, t) = \Re\{\underline{E}_x(z, t)\} = E_{x,0} \exp(-\alpha z) \cos(\omega t - \beta z).$$

- Die Feldamplitude nimmt dann, wie in der Abbildung für $\alpha = 1/2$ beispielhaft dargestellt, exponentiell ab und fällt im Abstand $z = 1/\alpha$ auf $1/e$ ab.



Phasengeschwindigkeit

- Entsprechend bestimmt der Realteil der Brechzahl die Phasenkonstante $\beta = \Re\{\underline{k}\} = \frac{\omega n_{re}}{c_0}$.
- Betrachten wir nun einen Punkt konstanter Phase, d.h. $\omega t - \beta z = \phi_0$ so „bewegt“ sich dieser mit der sogenannten Phasengeschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung.
- Diese können wir bestimmen, indem wir ϕ_0 nach z umstellen und nach der Zeit ableiten, also

$$v_{ph}(\omega) = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta(\omega)}$$

Superposition zweier zeitharmonischer ebener Wellen

- Betrachten wir nun die Superposition zweier ungedämpfter zeitharmonischer Wellen mit den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 und der reellwertigen elektrischen Feldkomponente

$$E(z, t) = E_0 \cos \left(\omega_1 \left[t - \frac{z}{v_{\text{ph},1}} \right] \right) + E_0 \cos \left(\omega_2 \left[t - \frac{z}{v_{\text{ph},2}} \right] \right)$$

- Gemäß des Additionstheorems für Cosinusfunktionen können wir diesen Ausdruck auch schreiben als Produkt einer Trägerwelle bei $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ mit der Phasengeschwindigkeit $v_{\text{ph},0}$ und einer Einhüllenden (Schwebung) mit der Kreisfrequenz $\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$

$$E(z, t) = \underbrace{2E_0 \cos \left(\omega_0 \left[t - \frac{z}{v_{\text{ph},0}} \right] \right)}_{\text{Trägerwelle}} \underbrace{\cos \left(\Delta\omega \left[t - \frac{z}{v_{\text{gr}}} \right] \right)}_{\text{Einhüllende}}$$

Gruppengeschwindigkeit

- Die Geschwindigkeit, mit der sich die Einhüllende in Ausbreitungsrichtung bewegt, wird als Gruppengeschwindigkeit v_{gr} bezeichnet und ergibt sich im Allgemeinen zu

$$v_{\text{gr}}(\omega) = \left(\frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega_0} \right)^{-1} = c_0 \left(\frac{d\omega n_{\text{re}}(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega_0} \right)^{-1} = c_0 \left(n_{\text{re}}(\omega_0) + \omega \frac{dn_{\text{re}}(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega_0} \right)^{-1} = \frac{c_0}{n_{\text{gr}}}$$

mit der sogenannten Gruppenbrechzahl n_{gr} .

- Um ein Informationssignal mittels einer elektromagnetischen Welle zu übertragen, wird üblicherweise eine Trägerwelle mit der Kreisfrequenz ω_0 mit einem Signal mit kontinuierlichem Frequenzspektrum mit einer gewissen Bandbreite moduliert $2\Delta\omega \ll \omega_0$.
- Die Einhüllende, und somit die Information, breitet sich mit der Gruppengeschwindigkeit aus. Es gilt dabei stets $n_{\text{gr}} \geq 1$ und somit $v_{\text{gr}} \leq c_0$.

Dispersion

- Oben haben wir gesehen, dass sich die komplexe Permittivität über einen breiten Frequenzbereich stark ändern kann. Daraus folgt, dass auch die Phasenkonstante frequenzabhängig ist.
- Ein besseres Verständnis für den Einfluss der Frequenzabhängigkeit der Phasenkonstante auf ein Informationssignal, welches als Einhüllende einer Trägerwelle bei ω_0 übertragen wird, gewinnen wir mittels der Taylorreihenentwicklung

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\beta_3}{6}(\omega - \omega_0)^3 + \dots$$

wobei

$$\beta_m = \left. \frac{d\beta(\omega)}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0} .$$

- Wir erhalten insbesondere $\beta_0 = v_{\text{ph}}^{-1}(\omega_0)$ und $\beta_1 = v_{\text{gr}}^{-1}(\omega_0)$.
- Die höheren Terme beschreiben die Frequenzabhängigkeit der Gruppengeschwindigkeit, welche auch als Dispersion bezeichnet wird und zu Signalverzerrungen führen kann.

Vorlesungsinhalte

1. Einleitung
2. Elektrische Polarisierung bei schnell veränderlichen Feldern
3. Komplexe Permittivität und komplexe Brechzahl
4. Dielektrische und leitende Medien
5. Ebene Wellen in dispersiven Medien
- 6. Was Sie gelernt haben sollten**
7. Anhang

Was Sie gelernt haben sollten

- Weshalb wir die zeitabhängige Suszeptibilität eingeführt haben und welche Eigenschaften diese aufweist.
- Welche Bedeutung die Kramers-Kronig-Beziehungen haben.
- Welche Aussagen das Lorentz-Drude-Resonatormodell über die komplexe Permittivität zulässt.
- Was ein Dielektrikum ist und welche Eigenschaften dessen relative elektrische Permittivität aufweist.
- Was ein (idealer) Leiter ist und welche Eigenschaften dessen relative elektrische Permittivität aufweist.
- Wie die komplexe Wellenzahl definiert ist und welche Bedeutung der Real- und Imaginärteil bei der Ausbreitung (ebener) Wellen haben.
- Welche Rolle die Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeit spielen und wie sich die Größen unterscheiden.
- Wie die höheren Terme der Taylorentwicklung der Phasenkonstante die Wellenausbreitung beeinflussen.

Vorlesungsinhalte

1. Einleitung
2. Elektrische Polarisierung bei schnell veränderlichen Feldern
3. Komplexe Permittivität und komplexe Brechzahl
4. Dielektrische und leitende Medien
5. Ebene Wellen in dispersiven Medien
6. Was Sie gelernt haben sollten
- 7. Anhang**

Fouriertransformation des Dirac-Impulses

- Der Dirac-Impuls $\delta(t)$ ist implizit definiert durch seine Abtasteigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0).$$

- Aus dieser Eigenschaft erhalten wir auch direkt seine Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = \exp(-j\omega \cdot 0) = 1.$$

- Wenden wir nun die inverse Fouriertransformation auf $\mathcal{F}\{\delta(t)\}$ an, erhalten wir

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\delta(t)\}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t) d\omega \stackrel{!}{=} \delta(t) \quad \iff \quad \mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega).$$

Fouriertransformation der Heaviside-Funktion (I)

- Für die folgende Herleitung beziehen wir uns auf Burrows und Colwell 1990. Die Heaviside-Funktion ist definiert als

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} .$$

- Im Folgenden, verwenden wir die Vorzeichenfunktion

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} ,$$

um die Heaviside-Funktion darstellen zu können als

$$\Theta(t) = \frac{1}{2} (1 + \text{sgn}(t)) .$$

Fouriertransformation der Heaviside-Funktion (II)

- Aus der Beziehung

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sgn}(t) = 2\delta(t)$$

folgt mit den Eigenschaften der Fouriertransformation und der Definition des Dirac-Impulses

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d}{dt} \operatorname{sgn}(t) \right\} = 2\mathcal{F}\{\delta(t)\} \quad \Longleftrightarrow \quad j\omega \mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = 2.$$

- Sofern das Teilen durch ω zulässig ist, erhalten wir also

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = -j \frac{2}{\omega}$$

und damit

$$\mathcal{F}\{\Theta(t)\} = \frac{1}{2} (\mathcal{F}\{1\} + \mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\}) = \frac{1}{2} \left(2\pi\delta(\omega) - j \frac{2}{\omega} \right) = \pi\delta(\omega) - j \frac{1}{\omega}. \quad (3)$$

Das Faltungstheorem: Vorwärts (I)

- Im Folgenden möchten wir das Faltungstheorem herleiten. Wir betrachten dafür die Faltung zweier Funktionen f bzw. g mit den Fouriertransformierten \tilde{f} bzw. \tilde{g} :

$$\{f * g\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

- Drücken wir nun die beiden Funktionen mithilfe der inversen Fouriertransformation aus, erhalten wir

$$\begin{aligned} \{f * g\}(t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega_1) \exp(j\omega_1\tau) d\omega_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega_2) \exp(j\omega_2(t - \tau)) d\omega_2 \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega_1) \tilde{g}(\omega_2) \exp(j\omega_2 t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j(\omega_1 - \omega_2)\tau) d\tau d\omega_1 d\omega_2 . \end{aligned}$$

Das Faltungstheorem: Vorwärts (II)

- Vergleichen wir mit Folie 36 unten, erkennen wir, dass

$$\{f * g\}(t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega_1) \tilde{g}(\omega_2) \exp(j\omega_2 t) \delta(\omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 .$$

- Integrieren wir also über ω_2 , ergibt sich

$$\{f * g\}(t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega_1) \tilde{g}(\omega_1) \exp(j\omega_1 t) d\omega_1 ,$$

also gerade die inverse Fouriertransformation von $\tilde{f}(\omega_1) \tilde{g}(\omega_1)$.

- Folglich gilt die bekannte Beziehung

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f} \tilde{g}\} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{f} \tilde{g} = \mathcal{F}\{f * g\} .$$

Das Faltungstheorem: Rückwärts (I)

- Im Folgenden möchten wir das Faltungstheorem in umgekehrter Richtung herleiten. Wir betrachten dafür das Produkt $f g$.
- Drücken wir nun die beiden Funktionen mithilfe der inversen Fouriertransformation aus, erhalten wir

$$f(t) g(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega_1) \tilde{g}(\omega_2) \exp(j(\omega_1 + \omega_2)t) d\omega_1 d\omega_2.$$

- Mit den Substitutionen $\omega = \omega_1 + \omega_2$ und $\omega' = \omega_2$ ergibt sich daraus

$$f(t) g(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega - \omega') \tilde{g}(\omega') \exp(j\omega t) d\omega' d\omega.$$

Das Faltungstheorem: Rückwärts (II)

- An dieser Stelle erkennen wir, dass wir Integral als inverse Fouriertransformation einer Faltung darstellen können:

$$\begin{aligned}
 f(t) g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega - \omega') \tilde{g}(\omega') d\omega' \right] \exp(j\omega t) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \{\tilde{f} * \tilde{g}\}(\omega) \right] \exp(j\omega t) d\omega .
 \end{aligned}$$

- Demzufolge gilt die Beziehung

$$fg = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f} * \tilde{g}\} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{f} * \tilde{g} = 2\pi \mathcal{F}\{fg\} . \quad (4)$$

Literatur (I)

- [1] B.L. Burrows und D.J. Colwell. „The Fourier transform of the unit step function“. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 21.4 (Juli 1990), S. 629–635. ISSN: 0020-739X, 1464-5211. DOI: [10.1080/0020739900210418](https://doi.org/10.1080/0020739900210418). URL: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739900210418> (besucht am 18.11.2022).
- [2] Heino Henke. *Elektromagnetische Felder: Theorie und Anwendung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. ISBN: 978-3-662-62234-6 978-3-662-62235-3. DOI: [10.1007/978-3-662-62235-3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-62235-3). URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-62235-3>.
- [3] Ellen Ivers-Tiffée und Waldemar von Münch. *Werkstoffe der Elektrotechnik*. Wiesbaden: Teubner, 2007. ISBN: 9783835100527 9783835190887. DOI: [10.1007/978-3-8351-9088-7](https://doi.org/10.1007/978-3-8351-9088-7). URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-8351-9088-7> (besucht am 15.11.2022).
- [4] Mikhail N. Polyanskiy. *Refractive index database*. URL: <https://refractiveindex.info> (besucht am 15.11.2022).

Literatur (II)

- [5] David J. Segelstein. „The complex refractive index of water“. Englisch. Master's Thesis. University of Missouri–Kansas City, 1981. URL: <https://mospace.umsystem.edu/xmlui/handle/10355/11599> (besucht am 15. 11. 2022).