

Vorlesung 05: Hertzscher Dipol

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2022/23

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 24. November 2022



Vorlesungsinhalte

1. Einführung
2. Kugelkoordinaten
3. Hertzscher Dipol
4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten
5. Was Sie gelernt haben sollten
6. Anhang

Vorlesungsinhalte

1. Einführung

2. Kugelkoordinaten

3. Hertzscher Dipol

4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten

5. Was Sie gelernt haben sollten

6. Anhang

Einführung

- Bislang haben wir lediglich die Ausbreitung ebener Wellen in homogenen Medien betrachtet.
- In ihrer idealisierten Form existieren ebene Wellen allerdings nicht.
- In dieser Vorlesung möchten wir uns ansehen, wie wir elektromagnetische Wellen „erzeugen“ können.
- Bei der Diskussion der Maxwell'schen Gleichungen haben wir festgestellt, dass beschleunigte Ladungen Strahlung hervorrufen, d.h. elektromagnetische Wellen erzeugen, die sich von der Quelle lösen und so irreversibel Energie ins Unendliche wegtransportieren.
- Dieser Effekt bildet die Grundlage für Antennen, die elektromagnetisch Wellen senden oder empfangen können.

Vorlesungsinhalte

1. Einführung

2. Kugelkoordinaten

3. Hertzscher Dipol

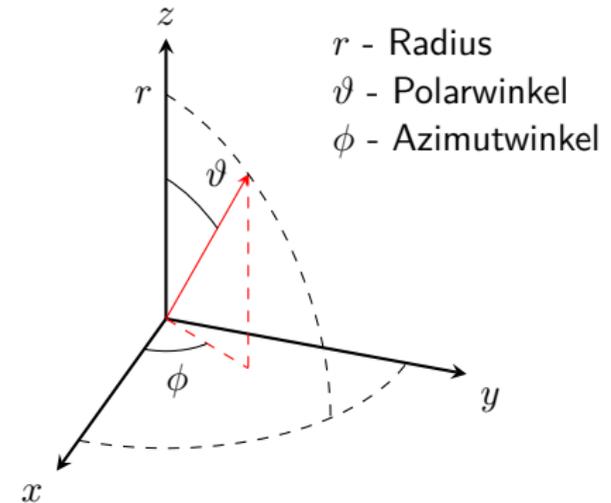
4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten

5. Was Sie gelernt haben sollten

6. Anhang

Kugelkoordinaten

- In Kugelkoordinaten wird ein Punkt im Raum durch seinen Abstand vom Ursprung sowie zwei Winkel definiert.
- Damit sind sie die optimale Wahl zur Beschreibung von *Kugelwellen*, d.h. Wellen, die sich ausgehend von einem Punkt gleichmäßig in alle Raumrichtungen ausbreiten.
- Jede ihrer Feldkomponenten ist zu einem gegebenen Zeitpunkt auf Kugelschalen um den Ausgangspunkt konstant.
- In Kugelkoordinaten gibt es - im Gegensatz zu den Zylinderkoordinaten - *keine* kartesische Koordinate.



Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten (I)

- In Kugelkoordinaten nehmen die Differentialoperatoren der Vektoranalysis für ein beliebiges Skalarfeld ψ bzw. ein beliebiges Vektorfeld $\underline{\mathbf{A}}$ die folgende Form an:

- Gradient:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi$$

- Divergenz:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \underline{A}_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial \sin(\vartheta) \underline{A}_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial \underline{A}_\phi}{\partial \phi}$$

- Rotation:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial \sin \vartheta \underline{A}_\phi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \underline{A}_\vartheta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \phi} - \frac{\partial r \underline{A}_\phi}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \underline{A}_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\phi$$

Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten (II)

- Skalarer Laplace-Operator:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

- Vektorieller Laplace-Operator:

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2 \cot\vartheta}{r^2} A_\vartheta \\ \Delta A_\vartheta - \frac{2 \cot\vartheta}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} A_\vartheta \\ \Delta A_\phi + \frac{2}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2 \cot\vartheta}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\phi} - \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} A_\phi \end{pmatrix}$$

- Bei der Betrachtung des vektoriellen Laplace-Operators fällt auf, dass alle drei Komponenten jeweils von A_r , A_ϑ , und A_ϕ abhängen.

Vorlesungsinhalte

1. Einführung

2. Kugelkoordinaten

3. Hertzscher Dipol

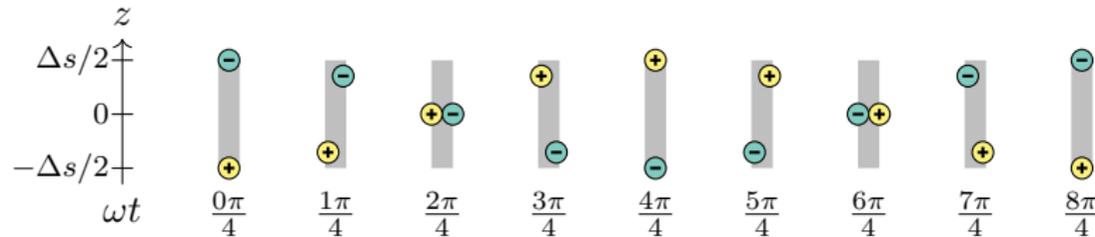
4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten

5. Was Sie gelernt haben sollten

6. Anhang

Hertzscher Dipol (I)

- Eine einzelne, sich zeitlich ändernde Punktladung ist auf Grund der Ladungserhaltung nicht möglich.
- Nimmt die Ladung an einer Stelle zu, muss sie an einer anderen Stelle abnehmen.
- Die einfachste Anordnung, die diese Anforderung erfüllt, besteht aus zwei entgegengesetzt geladenen Punktladungen und einem Strom, der zwischen den beiden fließt.
- Wir nehmen nun an, dass diese zwei Ladungen $\mp q$ entlang der z -Achse um den Nullpunkt oszillieren.
- Aufgrund ihrer ungleichförmigen Bewegung, erzeugen diese Ladungen nun eine elektromagnetische Welle bzw. Strahlung.



Hertzscher Dipol (II)

- Im Übergang von diskreten Ladungen auf einen kontinuierlichen Ladungsfluss, gilt bei $z = \Delta s/2$ für den komplexen Zeiger der negativen Ladung: $\underline{q}(t) = \underline{q}_0 \exp(j\omega t)$
- Dies lässt sich überführen in den zeitabhängigen Strom

$$\underline{I}(t) = \frac{dq}{dt} = \underline{I}_0 \exp(j\omega t) \quad \text{mit} \quad \underline{I}_0 = j\omega \underline{q}_0$$

- Der Hertzsche Dipol ist ein solches infinitesimal kleines Stromelement der Länge $\Delta s \rightarrow 0$ mit einer homogenen und harmonischen Stromverteilung.

Elektrostatisches Potential

- Betrachten wir den elektrische Feldvektor $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ am Punkt \mathbf{r} sehr nahe am Dipol, d.h. im Abstand $r \ll \lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$, so können wir diesen aus dem elektrostatischen Potential ableiten. Im kartesischen Koordinatensystem liegen die Ladungen auf der z -Achse bei $\pm\Delta s/2$.
- Das Potential des elektrostatischen Dipols am Ortsvektor \mathbf{r} ist

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q \Delta s \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon|\mathbf{r}|^3}$$

- In Kugelkoordinaten wird dies mit $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r} = r \cos(\vartheta)$ zu

$$\phi(r, \vartheta) = \frac{q \Delta s \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon r^2}$$

wobei r der Abstand vom Beobachtungspunkt zum Ursprung ist und ϑ der Polarwinkel.

- Aufgrund der Rotationssymmetrie ist das elektrostatische Potential unabhängig vom Azimutalwinkel ϕ .

Elektrisches Feld nahe am Dipol

- Den komplexen Zeiger des elektrischen Feldstärkevektors erhalten wir als negativen Gradienten des elektrostatischen Potentials zu

$$\underline{\mathbf{E}}(r, \vartheta) \Big|_{r \ll \lambda} = -\nabla \phi(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\underline{I}_0 \Delta s}{j 4 \pi \omega \epsilon r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_r \\ \underline{E}_\vartheta \\ \underline{E}_\phi \end{pmatrix}$$

- Die ϕ -Komponente des elektrischen Feldes verschwindet also.
- Da sich das elektromagnetische Feld mit endlicher Phasengeschwindigkeit ausbreitet, wird diese Feldverteilung nicht für beliebige Abstände vom Ursprung gültig sein!

Magnetisches Vektorpotential

- Fassen wir den Hertzschen Dipol als stromdurchflossenen Leiter auf, so wird dieser gemäß dem Durchflutungsgesetz von einer magnetischen Feldstärke $\underline{\mathbf{H}}$ umgeben.
- Dieses H-Feld lässt sich aus dem magnetischen Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \underline{A}_z \mathbf{e}_z$ in Stromrichtung ableiten gemäß

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \underline{\mathbf{A}})$$

- Transformiert in Kugelkoordinaten ergibt sich das Vektorpotential zu

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \underline{A}_z \cos(\vartheta) \mathbf{e}_r - \underline{A}_z \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\vartheta$$

- Da die Divergenz eines Wirbelfeldes verschwindet, gilt stets

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{\mathbf{A}}) \equiv 0$$

- Über die Divergenz des Vektorpotentials kann frei verfügt werden (Eichung).

Feldkomponenten und Wellengleichung

- Den elektrischen Feldstärkevektor erhalten wir aus Induktionsgesetz zu

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}} = -j\omega(\nabla \times \underline{\mathbf{A}}) \quad \implies \quad \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\underline{\mathbf{A}} - \nabla\phi$$

- Aus dem Durchflutungsgesetz folgt mit $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} [\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{A}})] \equiv \frac{1}{\mu} [\nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}) - \Delta\underline{\mathbf{A}}] = j\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}} = \frac{k^2}{\mu}\underline{\mathbf{A}} - j\omega\varepsilon\nabla\phi$$

- Mit der sogenannten Lorenz-Eichung

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = -j\omega\varepsilon\mu\phi$$

erhalten wir für das magnetische Vektorpotential die Wellengleichung in Form der Helmholtzgleichung

$$\Delta\underline{\mathbf{A}} + k^2\underline{\mathbf{A}} = 0$$

Vorlesungsinhalte

1. Einführung
2. Kugelkoordinaten
3. Hertzscher Dipol
- 4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten**
5. Was Sie gelernt haben sollten
6. Anhang

Kugelwellen

- Ausgehend vom Hertzchen Dipol im Koordinatenursprung breiten sich elektromagnetische Kugelwellen aus, welche im Folgenden beschrieben werden sollen.
- Mit dem skalaren Laplace-Operator in Kugelkoordinaten und mit $\underline{\mathbf{A}}(r, \vartheta, \phi) = \underline{A}_z(r, \vartheta, \phi)\mathbf{e}_z$ erhalten wir die skalare Helmholtzgleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \underline{A}_z}{\partial \phi^2} + \underline{k}^2 \underline{A}_z = 0$$

- Als Lösungsweg wählen wir den Produktansatz von Bernoulli und setzen an, dass

$$\underline{A}_z(r, \vartheta, \phi) = \underline{A}_0 \underline{R}(r) \underline{Y}(\vartheta, \phi)$$

- Aus der Helmholtzgleichung erhalten wir dann nach wenigen Schritten

$$\frac{1}{\underline{R}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \underline{R}}{\partial r} \right) + \frac{1}{\underline{Y}} \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \underline{Y}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\underline{Y}} \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \underline{Y}}{\partial \phi^2} + \underline{k}^2 r^2 = 0.$$

Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten

- Mit der Separationskonstanten λ können wir diese Gleichung separieren in die Winkelgleichung

$$\frac{1}{Y} \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{Y} \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda = 0$$

- und in die Radialgleichung

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \underline{k}^2 r^2 - \lambda = 0.$$

- Die Addition dieser beiden gekoppelten Differentialgleichungen ergibt wieder die Helmholtzgleichung.

Winkelabhängigkeit

- Die Winkelgleichung können wir schreiben als

$$\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \underline{Y}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \underline{Y}}{\partial \phi^2} + \lambda \underline{Y} = 0$$

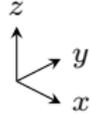
- Diese Gleichung ist im Fall $\lambda = \ell(\ell + 1)$ für ganzzahlige ℓ lösbar. Ihre Lösungen werden als *Kugelflächenfunktionen* $\underline{Y}_{\ell,m}(\vartheta, \phi)$ bezeichnet mit den Indizes ℓ und $m \in \{-\ell, -\ell + 1, \dots, \ell\}$.

$\underline{Y}_{\ell,m}$	$m = -2$	$m = -1$	$m = 0$	$m = +1$	$m = +2$
$\ell = 0$			$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$		
$\ell = 1$		$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{-j\phi}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{j\phi}$	
$\ell = 2$	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{-j2\phi}$	$\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{-j\phi}$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{j\phi}$	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{j2\phi}$

Kugelflächenfunktionen

- Der Radius der im Koordinatenursprung zentrierten Körper stellt den Betrag des Realteils der Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell,m}(\vartheta, \phi)$ dar. Die Farbe steht für das Vorzeichen: + bzw. -.

$\Re\{Y_{\ell,m}\}$	$m = -2$	$m = -1$	$m = 0$	$m = +1$	$m = +2$
$\ell = 0$					
$\ell = 1$					
$\ell = 2$					



Radiale Abhängigkeit

- Die Radialgleichung können wir mit $\lambda = \ell(\ell + 1)$ umformen in

$$r^2 \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \underline{R}}{\partial r} + [k^2 r^2 - \ell(\ell + 1)] \underline{R} = 0.$$

- Substituieren wir $\underline{R}(r) = \sqrt{\frac{1}{kr}} f(kr)$, $x = kr$ und $\nu = \ell + \frac{1}{2}$, so erhalten wir

$$x^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + (x^2 - \nu^2) f(x) = 0$$

- Diese Gleichung ist die *Besselsche Differentialgleichung*, deren Lösungen die Zylinderfunktionen $f(x) = \underline{Z}_\nu(x)$ der Ordnung ν sind.
- Wir erhalten also für die radiale Abhängigkeit

$$\underline{R}(r) = \sqrt{\frac{1}{kr}} \underline{Z}_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)$$

Sphärische Hankelfunktionen (I)

- Zylinderfunktionen halbzahliger Ordnung lassen sich als Linearkombination der sphärischen Hankelfunktionen erster und zweiter Gattung ausdrücken

$$\underline{Z}_{\ell+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{h}_{\ell}^{(1)}(x) \\ \underline{h}_{\ell}^{(2)}(x) \end{Bmatrix}$$

- Für die ersten drei Ordnungen lassen sich diese schreiben als:

$$\underline{h}_0^{(1)}(x) = \left[-\frac{j}{x} \right] \exp(jx)$$

$$\underline{h}_0^{(2)}(x) = \left[+\frac{j}{x} \right] \exp(-jx)$$

$$\underline{h}_1^{(1)}(x) = \left[-\frac{1}{x} - \frac{j}{x^2} \right] \exp(jx)$$

$$\underline{h}_1^{(2)}(x) = \left[-\frac{1}{x} + \frac{j}{x^2} \right] \exp(-jx)$$

$$\underline{h}_2^{(1)}(x) = \left[+\frac{j}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{3j}{x^3} \right] \exp(jx)$$

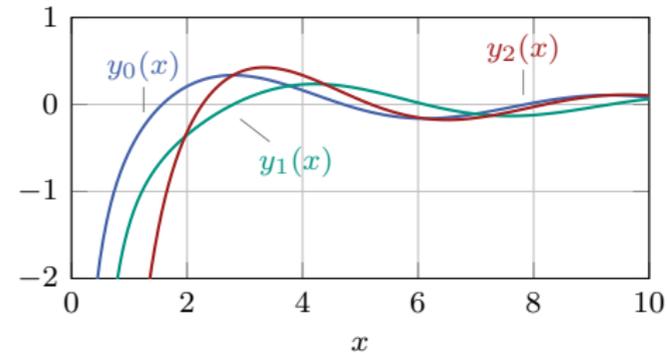
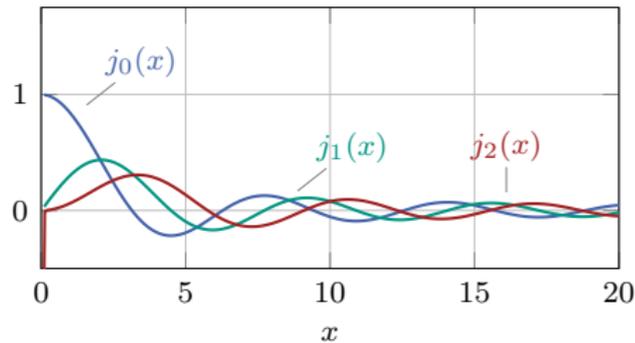
$$\underline{h}_2^{(2)}(x) = \left[-\frac{j}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{3j}{x^3} \right] \exp(-jx) .$$

Sphärische Hankelfunktionen (II)

- Die sphärischen Hankelfunktionen $h_\ell^{(1)}(x)$ bzw. $h_\ell^{(2)}(x)$ können wir alternativ gemäß folgender Beziehung durch die sphärischen Besselfunktionen $j_\ell(x)$ und $y_\ell(x)$ ausdrücken

$$h_\ell^{(1)}(x) = j_\ell(x) + j y_\ell(x) \quad \text{bzw.} \quad h_\ell^{(2)}(x) = j_\ell(x) - j y_\ell(x).$$

- Ihr Real- und Imaginärteil ist also gerade durch $j_\ell(x)$ und $y_\ell(x)$ gegeben.



Vektorpotential des Hertzschen Dipols (I)

- Das Vektorpotential eines allgemeinen Dipols kann stets als Linearkombination der durch ℓ und m unterschiedenen Lösungen der Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten ausgedrückt werden, d.h.

$$\underline{\mathbf{A}}(r, \vartheta, \phi, t) = \sum_{m, \ell} a_{m, \ell} \sqrt{\frac{1}{kr}} Z_{\ell+1/2}(kr) \underline{Y}_{\ell, m}(\vartheta, \phi) \exp(j \omega t) \mathbf{e}_z$$

- Am Vorzeichen im Exponenten erkennen wir, dass die Hankelfunktion erster bzw. zweiter Gattung in den Koordinatenursprung einlaufende bzw. vom Koordinatenursprung weglaufende Wellen beschreiben.
- Im Folgenden betrachten wir vom Dipol abgestrahlte Wellen, weshalb wir für die Radialabhängigkeit die Hankelfunktionen zweiter Gattung verwenden und den folgenden Ausdruck erhalten

$$\underline{R}(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{\ell+1/2}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} h_{\ell}^{(2)}(kr).$$

Vektorpotential des Hertzschen Dipols (II)

- Sehr nah am Dipol, d.h. für $r \ll \lambda$, muss das elektrische Feld dem des elektrostatischen Dipols entsprechen. Daraus folgt für das Vektorpotential des Hertzschen Dipols dass $m = 0$ und $\ell = 0$ sein muss und

$$\underline{Y}(\vartheta, \phi) = \underline{Y}_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \text{sowie} \quad \underline{R}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} h_0^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{j}{kr} \exp(-jkr) .$$

- Vergleichen wir nun das elektrische Skalarpotential $\phi = \frac{j}{\omega\epsilon\mu} \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Potential des elektrostatischen Dipols, ergibt sich (Nachweis im Anhang)

$$a_{0,0} = -j \frac{\mu \Delta s I_0 k}{2\sqrt{2}} .$$

- Daraus erhalten wir bei harmonischer Anregung mit dem Strom $\underline{I}(t) = \underline{I}_0 \exp(j\omega t)$ mit $\mathbf{e}_z = [\cos(\vartheta)\mathbf{e}_r - \sin(\vartheta)\mathbf{e}_\vartheta]$ für den komplexen Zeiger des magnetischen Vektorpotentials

$$\underline{\mathbf{A}}(r, \vartheta, t) = \frac{\mu \Delta s I_0 k}{4\pi} \frac{1}{kr} \exp(j(\omega t - kr)) [\cos(\vartheta) \mathbf{e}_r - \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\vartheta]$$

Feldkomponenten des Hertzschen Dipols (I)

- Für das H-Feld erhalten wir gemäß der Definition des magnetischen Vektorpotentials

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \underline{\mathbf{A}}) = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r\underline{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial\underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\phi = \underline{H}_\phi \mathbf{e}_\phi$$

- Für das E-Feld folgt aus dem Durchflutungsgesetz

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} (\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta \underline{H}_\phi)}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial(r \underline{H}_\phi)}{\partial r} \mathbf{e}_\vartheta \right)$$

- Die nichtverschwindenden Feldkomponenten des Hertzschen Dipols werden also zu

$$\underline{E}_r = \frac{\underline{I}_0 \Delta s k^3}{4\pi\omega\varepsilon} 2 \left(\frac{1}{k^2 r^2} - j \frac{1}{k^3 r^3} \right) \cos(\vartheta) \exp(j(\omega t - kr))$$

$$\underline{E}_\vartheta = \frac{\underline{I}_0 \Delta s k^3}{4\pi\omega\varepsilon} \left(j \frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} - j \frac{1}{k^3 r^3} \right) \sin(\vartheta) \exp(j(\omega t - kr))$$

$$\underline{H}_\phi = \frac{\underline{I}_0 \Delta s k^3}{4\pi\omega\varepsilon} \frac{1}{Z} \left(j \frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) \sin(\vartheta) \exp(j(\omega t - kr))$$

Feldkomponenten des Hertzschen Dipols (II)

- Die Abbildungen¹ zeigen die normierten nichtverschwindenden Feldkomponenten (den Realteil des komplexen Zeigers $\underline{\mathbf{E}}$ bzw. $\underline{\mathbf{H}}$) in einer Ebene $y = 0$ bzw. $\phi = \text{const}$ für $t = \frac{n\pi}{4\omega}$, $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$. Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.

¹Die Animation funktioniert im Acrobat Reader (nicht auf Mobilgeräten), KDE Okular, PDF-XChange und Foxit Reader.

Nahfeld des Hertzschen Dipols

- Sehr nah am Hertzschen Dipol, d.h. für $r \ll 2\pi/k = \lambda$ spielen in der Klammer jeweils nur die Terme mit dem höchsten Exponenten im Nenner eine Rolle und $\exp(-jkr) \approx 1$ und wir erhalten

$$\underline{E}_r \approx -j 2 \frac{1}{\omega \epsilon} \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{1}{r^3} \cos(\vartheta) \exp(j\omega t)$$

$$\underline{E}_\vartheta \approx -j \frac{1}{\omega \epsilon} \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{1}{r^3} \sin(\vartheta) \exp(j\omega t)$$

$$\underline{H}_\phi \approx \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{1}{r^2} \sin(\vartheta) \exp(j\omega t)$$

- Dabei entspricht das E-Feld dem des elektrostatischen Dipols bei harmonischer Zeitabhängigkeit.
- Für größere Abstände r ändert sich die Feldverteilung aufgrund der endlichen Phasengeschwindigkeit.
- Das E-Feld und das H-Feld haben einen Phasenunterschied von 90° ; es wird also primär Blindleistung transportiert.

Fernfeld des Hertzschen Dipols

- Weit weg vom Hertzschen Dipol, d.h. für $r \gg 2\pi/k = \lambda$ spielen in der Klammer jeweils nur die Terme proportional $1/r$ eine Rolle und wir erhalten

$$\underline{E}_r \approx 0$$

$$\underline{E}_\vartheta \approx j \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{k^2}{r} \sin(\vartheta) \exp(j(\omega t - kr))$$

$$\underline{H}_\phi \approx j \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{k}{r} \sin(\vartheta) \exp(j(\omega t - kr))$$

- Das Fernfeld hat den Charakter einer ebenen Welle in r -Richtung. Es gilt $\frac{E_\vartheta}{H_\phi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z$.
- Dies resultiert in dem komplexen Poynting Vektor

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) = \frac{1}{2} \underline{E}_\vartheta \underline{H}_\phi^* \mathbf{e}_r = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \varepsilon} \left(\frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \right)^2 \frac{k^3}{r^2} \sin^2(\vartheta) \mathbf{e}_r$$

- Dieser ist rein reell; es findet somit ein reiner Wirkleistungstransport statt.

Vorlesungsinhalte

1. Einführung
2. Kugelkoordinaten
3. Hertzscher Dipol
4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten
- 5. Was Sie gelernt haben sollten**
6. Anhang

Was Sie gelernt haben sollten

- Welches physikalische Modell dem Hertzschen Dipol zugrunde liegt und dessen Bedeutung für die Erzeugung elektromagnetischer Wellen.
- Weshalb wir das magnetische Vektorpotential verwenden, um die Maxwell'schen Gleichungen zu entkoppeln.
- Welche Bedeutung Kugelwellen für die Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten haben.
- Welche Rolle die durch ℓ bzw. m unterschiedenen Lösungen der Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten für die Darstellung des Vektorpotentials eines allgemeinen Dipols spielen.
- Weshalb im Nah- bzw. Fernfeld des Hertzschen Dipols primär ein Blind- bzw. Wirkleistungstransport stattfindet.

Vorlesungsinhalte

1. Einführung
2. Kugelkoordinaten
3. Hertzscher Dipol
4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten
5. Was Sie gelernt haben sollten
- 6. Anhang**

Definition der Kugelflächenfunktionen

- Die Kugelflächenfunktionen $\underline{Y}_{\ell,m}(\vartheta, \phi)$ sind definiert durch

$$\underline{Y}_{\ell,m}(\vartheta, \phi) = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^{\ell}\ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} e^{jm\phi} \sin^m(\vartheta) \frac{d^{\ell+m}(\sin^{2\ell}(\vartheta))}{d\cos^{\ell+m}(\vartheta)}.$$

- Weitere Details zu den Kugelflächenfunktionen finden Sie z.B. in Kapitel 14 der NIST Digital Library of Mathematical Functions <https://dlmf.nist.gov/>.

Vektorpotential Hertzscher Dipol - Koeffizient $\underline{a}_{0,0}$ (I)

- Der Ansatz für das magnetische Vektorpotential des Hertzschen Dipols liefert zum Zeitpunkt $t = 0$

$$\underline{A}_z = \underline{a}_{0,0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{j}{kr} \exp(-jkr) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{\underline{a}_{0,0}}{\sqrt{2\pi}} \frac{j}{kr} \exp(-jkr) .$$

- Ermitteln wir das elektrische Potential des Hertzschen Dipols im Nahfeld können wir durch Vergleich mit dem elektrostatischen Potential auf Folie 12 den Koeffizienten $\underline{a}_{0,0}$ bestimmen. Mithilfe der Darstellung von \underline{e}_z in Kugelkoordinaten erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{j}{\omega\epsilon\mu} \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = \frac{j}{\omega\epsilon\mu} \left(\frac{\cos\vartheta}{r^2} \frac{\partial(r^2 \underline{A}_z)}{\partial r} - \frac{\underline{A}_z}{r \sin\vartheta} \frac{\partial \sin^2\vartheta}{\partial\vartheta} \right) \\ &= \frac{j}{\omega\epsilon\mu} \left(\frac{\cos\vartheta}{r^2} \frac{\partial(r^2 \underline{A}_z)}{\partial r} - \frac{2 \cos\vartheta}{r} \underline{A}_z \right) . \end{aligned}$$

Vektorpotential Hertzscher Dipol - Koeffizient $\underline{a}_{0,0}$ (II)

- Für die radiale Ableitung gilt dabei

$$\frac{\partial(r^2 \underline{A}_z)}{\partial r} = j \frac{\underline{a}_{0,0}}{\sqrt{2\pi k}} \frac{\partial(r \exp(-j kr))}{\partial r} = \frac{\underline{a}_{0,0}}{\sqrt{2\pi k}} (j + kr) \exp(-j kr) .$$

- Setzen wir wieder in den Ausdruck für das elektrische Potential ein, sehen wir, dass

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{j k}{\omega \varepsilon \mu} \frac{\underline{a}_{0,0}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-j kr) \left(\cos \vartheta \left(\frac{j}{k^2 r^2} + \frac{1}{kr} \right) - 2 \cos \vartheta \frac{j}{k^2 r^2} \right) \\ &= \frac{j k}{\omega \varepsilon \mu} \frac{\underline{a}_{0,0}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-j kr) \cos \vartheta \left(\frac{1}{kr} - \frac{j}{k^2 r^2} \right) . \end{aligned}$$

- Der Vergleich mit dem elektrostatischen Dipol ist nur im Nahfeld sinnvoll. Dort gilt

$$\phi \approx \frac{k}{\omega \varepsilon \mu} \frac{\underline{a}_{0,0}}{\sqrt{2\pi}} \cos \vartheta \frac{1}{k^2 r^2} .$$

Vektorpotential Hertzscher Dipol - Koeffizient $\underline{a}_{0,0}$ (III)

- Diesen Ausdruck vergleichen wir nun mit dem Potential auf Folie 12

$$\frac{q \Delta s \cos \vartheta}{4\pi\epsilon r^2} \stackrel{!}{=} \phi_{\text{stat}}(r, \vartheta) = \frac{q \Delta s \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon r^2}.$$

- Mit $\underline{I}_0 = j\omega q$ folgt so für den gesuchten Koeffizienten $\underline{a}_{0,0}$

$$\underline{a}_{0,0} = -j \frac{\mu \Delta s \underline{I}_0 k}{2\sqrt{2}}.$$