

# Vorlesung 06: Ebene Wellen an Grenzflächen

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2022/23

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 30. November 2022



# Vorlesungsinhalte

1. Rand- und Stetigkeitsbedingungen
2. Reflexion und Brechung ebener Wellen
3. Fresnelsche Formeln
4. Was Sie gelernt haben sollten

# Vorlesungsinhalte

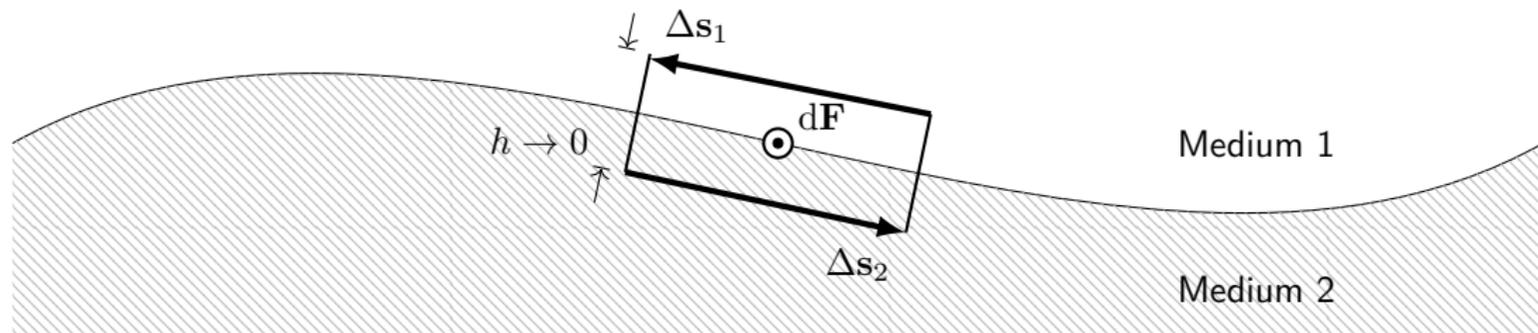
1. Rand- und Stetigkeitsbedingungen
2. Reflexion und Brechung ebener Wellen
3. Fresnelsche Formeln
4. Was Sie gelernt haben sollten

# Einführung

- Bislang haben wir die Ausbreitung und Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen in homogenen Medien betrachtet.
- Allerdings ist es etwa für die Datenübertragung von großem Interesse, die Ausbreitungsrichtung elektromagnetischer Wellen vorzugeben.
- In diesem Fall verwenden wir anwendungsspezifisch entworfene inhomogene Medien, sogenannte Wellenleiter.
- Möchten wir verstehen wie und weshalb die Führung von Wellen durch solche Wellenleiter möglich ist, müssen wir zunächst ihr Verhalten an Materialgrenzflächen (welche in inhomogenen Medien unvermeidlich sind) untersuchen.

# Stetigkeit der tangentialen Feldkomponenten (I)

- Zur Herleitung der Stetigkeitsbedingungen der Tangentialkomponenten an einem Grenzübergang zwischen zwei Medien betrachten wir zunächst eine Fläche  $F$ , deren Normalenvektor parallel zur Grenzfläche ist.
- Senkrecht zur Grenzfläche betrage die Seitenlänge  $h$ , parallel zur Grenzfläche betrage die Ausdehnung  $\Delta s$ . Im Folgenden betrachten wir den Fall  $h \rightarrow 0$ .



## Stetigkeit der tangentialen Feldkomponenten (II)

- Gemäß obiger Abbildung folgt aus dem Durchflutungs- bzw. dem Induktionsgesetz in Integralform sowie dem Stokeschem Integralsatz, dass

$$\oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = \int_F \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{F} = \int_F \mathbf{J} \cdot d\mathbf{F} + \int_F \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{F} = \int_F \mathbf{J} \cdot d\mathbf{F} = i' \Delta s$$

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = - \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{F} = 0$$

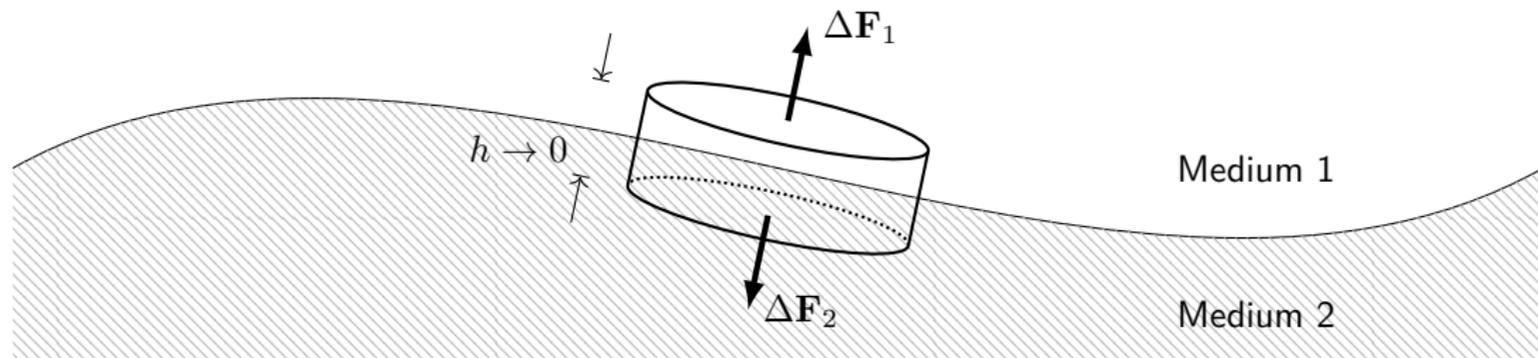
- Die Verschiebungsstromdichte  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  und die zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  müssen stets endlich sein. Wegen  $h \rightarrow 0$  verschwinden somit ihre Flächenintegrale.
- Das Flächenintegral über die Stromdichte  $\mathbf{J}$  kann jedoch auch für infinitesimal kleines  $h$  einen endlichen Wert annehmen. D.h. es kann ein Oberflächenstrom  $i' \Delta s$  mit dem Strombelag  $i'$  (Einheit  $\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ) fließen.
- Dies hat zur Folge, dass

$$H_{t,1} - H_{t,2} = i' \quad \text{und} \quad E_{t,1} - E_{t,2} = 0$$

wobei  $H_{t,1}$ ,  $E_{t,1}$ ,  $H_{t,2}$  und  $E_{t,2}$  die tangentialen Feldkomponenten an der Grenzfläche sind.

# Stetigkeit der normalen Feldkomponenten (I)

- Zur Herleitung der Stetigkeitsbedingungen der Normalkomponenten an einem Grenzübergang zwischen zwei Medien betrachten wir zunächst einen Zylinder mit Volumen  $V$  dessen Stirnflächennormalen parallel zur Grenzflächennormalen sind.
- Die Höhe des Zylinders sei  $h$  und die beiden Stirnflächen haben jeweils einen Flächeninhalt  $\Delta F$ .
- Im Folgenden betrachten wir den Fall  $h \rightarrow 0$ .



## Stetigkeit der normalen Feldkomponenten (II)

- Gemäß der Abbildung folgt aus dem Gaußschen Gesetz sowie der Quellenfreiheit des Magnetfeldes, dass

$$\oint_O \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} = \mathbf{D}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = \int_V \rho dV = \sigma \Delta F$$

$$\oint_O \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = \mathbf{B}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = 0,$$

wobei  $\sigma$  die Flächenladungsdichte (Einheit  $\frac{As}{m^2}$ ) ist.

- Dies hat zur Folge, dass

$$D_{n,1} - D_{n,2} = \sigma \quad \text{und} \quad B_{n,1} - B_{n,2} = 0$$

wobei  $D_{n,1}$ ,  $B_{n,1}$ ,  $D_{n,2}$  und  $B_{n,2}$  die normalen Feldkomponenten an der Grenzfläche sind.

# Randbedingungen

- Ist Medium 2 ideal leitend (d.h. Leitfähigkeit  $\kappa \rightarrow \infty$ , so verschwinden darin die Felder und die zuvor beschriebenen Stetigkeitsbedingungen werden zu

$$H_{t,1} = i' , \quad E_{t,1} = 0 , \quad D_{n,1} = \sigma , \quad B_{n,1} = 0$$

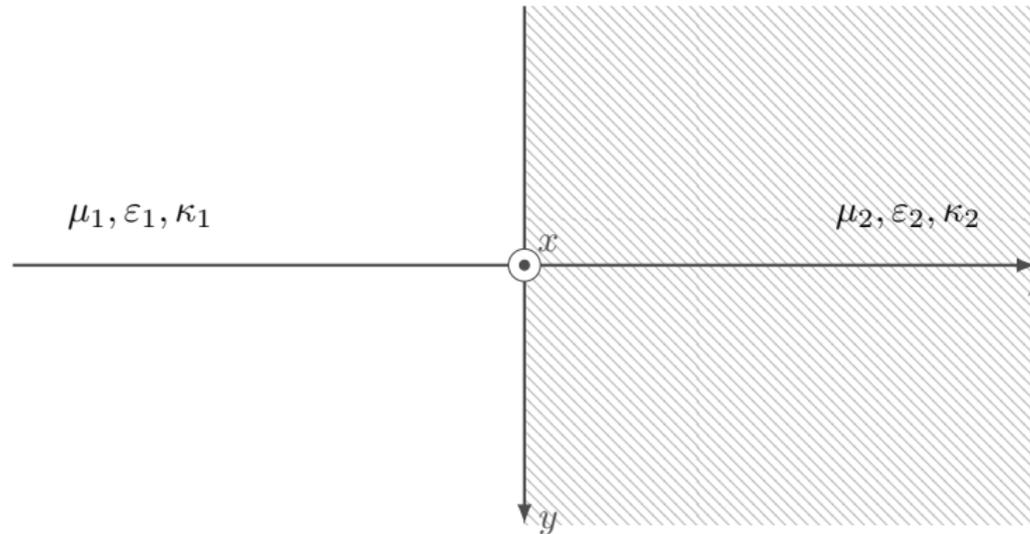
- In diesem Fall werden die Stetigkeitsbedingungen auch als Randbedingungen bezeichnet.

# Vorlesungsinhalte

1. Rand- und Stetigkeitsbedingungen
- 2. Reflexion und Brechung ebener Wellen**
3. Fresnelsche Formeln
4. Was Sie gelernt haben sollten

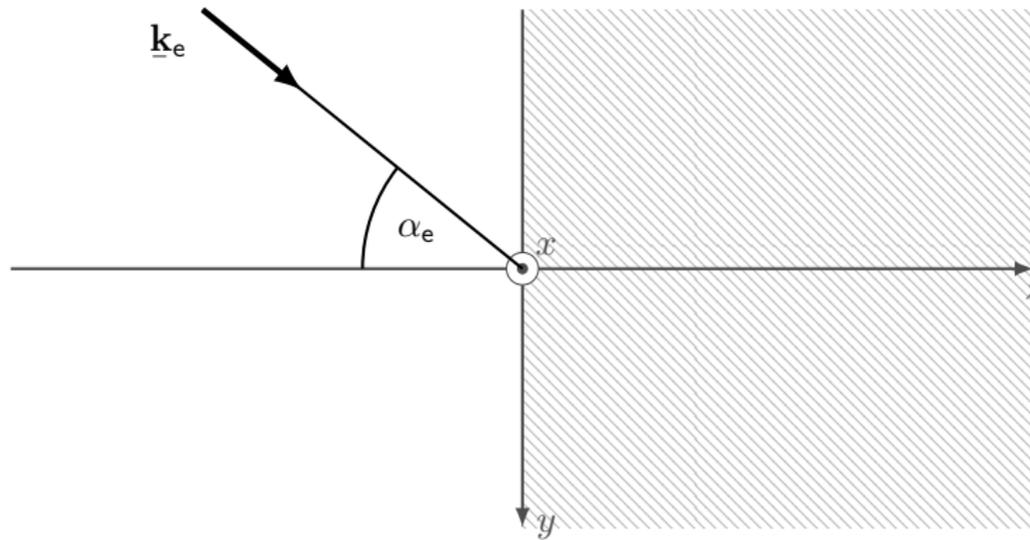
# Reflexion und Brechung

- Betrachtet werde eine einfallende Welle (e), welche sich an einer in der  $xy$ -Ebene liegenden Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien in eine reflektierte Welle (r) und eine transmittierte Welle (t) aufteilt.



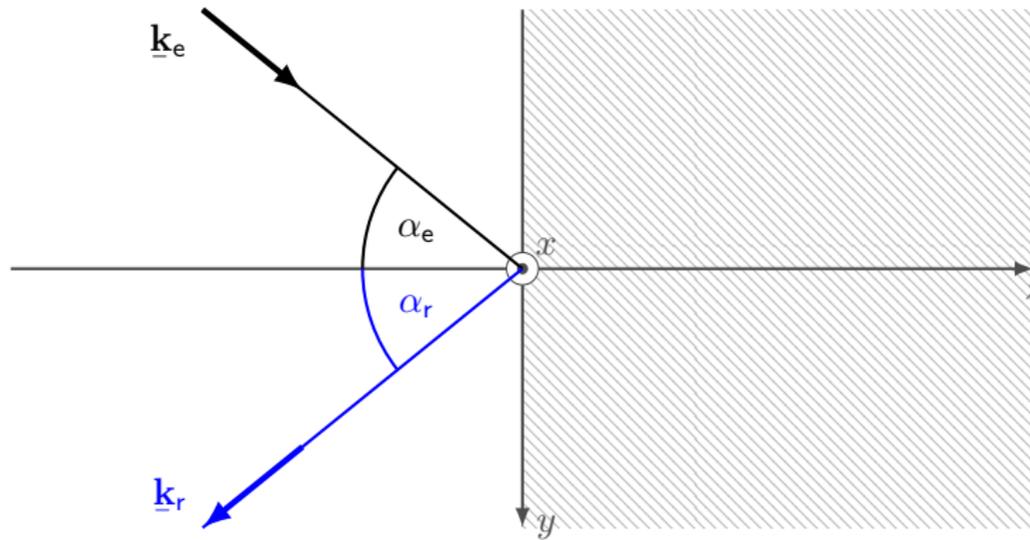
# Reflexion und Brechung

- Betrachtet werde eine einfallende Welle (e), welche sich an einer in der  $xy$ -Ebene liegenden Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien in eine reflektierte Welle (r) und eine transmittierte Welle (t) aufteilt.



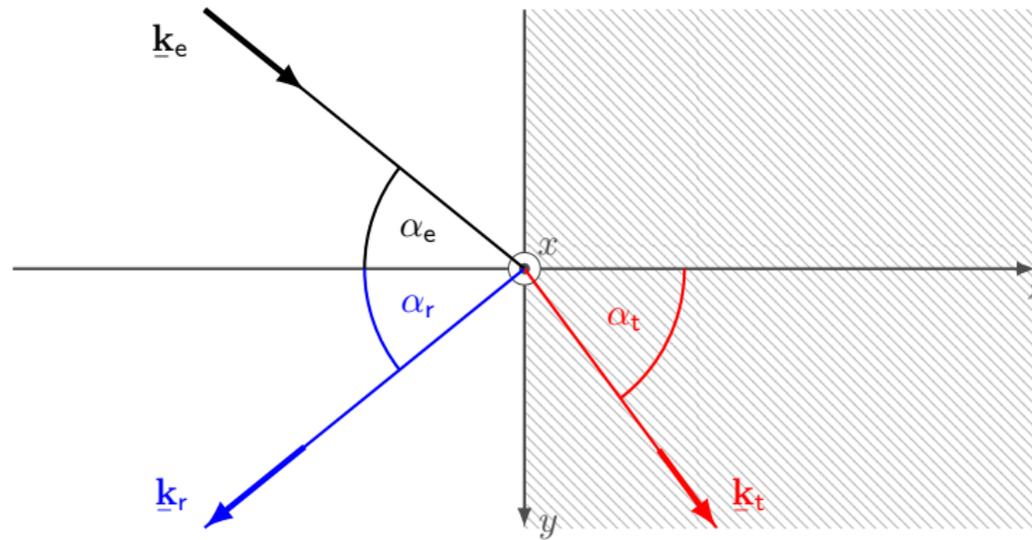
# Reflexion und Brechung

- Betrachtet werde eine einfallende Welle (e), welche sich an einer in der  $xy$ -Ebene liegenden Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien in eine reflektierte Welle (r) und eine transmittierte Welle (t) aufteilt.



# Reflexion und Brechung

- Betrachtet werde eine einfallende Welle ( $e$ ), welche sich an einer in der  $xy$ -Ebene liegenden Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien in eine reflektierte Welle ( $r$ ) und eine transmittierte Welle ( $t$ ) aufteilt.



# Ebene Wellen

- Wir nehmen an, dass beide Medien frei von Raumladungen sind ( $\rho = 0$ ) und dass es sich bei allen drei Wellen um ebene Wellen handelt. In komplexer Zeigerschreibweise haben diese somit die Form

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t) &= \underline{\mathbf{E}}_{0,e} e^{j(\omega_e t - \underline{\mathbf{k}}_e \mathbf{r})} & \underline{\mathbf{H}}_e(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{Z_1} [\mathbf{e}_{k,e} \times \underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t)] \\ \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t) &= \underline{\mathbf{E}}_{0,r} e^{j(\omega_r t - \underline{\mathbf{k}}_r \mathbf{r})} & \underline{\mathbf{H}}_r(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{Z_1} [\mathbf{e}_{k,r} \times \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t)] \\ \underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}, t) &= \underline{\mathbf{E}}_{0,t} e^{j(\omega_t t - \underline{\mathbf{k}}_t \mathbf{r})} & \underline{\mathbf{H}}_t(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{Z_2} [\mathbf{e}_{k,t} \times \underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}, t)] \end{aligned}$$

- Dabei ist die einfallende Welle durch ihren Amplitudenvektor  $\underline{\mathbf{E}}_{0,e}$ , ihre Kreisfrequenz  $\omega_e$  und ihren Wellenvektor  $\underline{\mathbf{k}}_e = k_1 \mathbf{e}_{k,e}$  mit Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{e}_{k,e}$  gegeben.
- Im Folgenden wollen wir die entsprechenden Größen der reflektierten und der transmittierten Welle herleiten.

# Wellenvektoren in der Einfallsebene

- Bei gegebener Kreisfrequenz  $\omega$  sind die Medien charakterisiert durch ihre komplexe Wellenzahl  $\underline{k}$  bzw. den komplexen Wellenwiderstand  $\underline{Z}$
- Die jeweilige Ausbreitungsrichtung ist gegeben durch die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_{k,e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_e) \\ \cos(\alpha_e) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{k,r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_r) \\ -\cos(\alpha_r) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{k,t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_t) \\ \cos(\alpha_t) \end{pmatrix}.$$

- Die Wellenvektoren ergeben sich somit zu

$$\underline{\mathbf{k}}_e = \underline{k}_1 \mathbf{e}_{k,e}, \quad \underline{\mathbf{k}}_r = \underline{k}_1 \mathbf{e}_{k,r} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{k}}_t = \underline{k}_2 \mathbf{e}_{k,t}$$

- Die *Einfallsebene* ist die Ebene, in der die drei Wellenvektoren  $\underline{\mathbf{k}}_e$ ,  $\underline{\mathbf{k}}_r$  und  $\underline{\mathbf{k}}_t$  liegen (hier  $yz$ -Ebene).

# Stetigkeitsbedingungen

- An allen Punkten  $\mathbf{r}_0 = (x, y, 0)$  auf der Grenzfläche in der  $xy$ -Ebene müssen die Stetigkeitsbedingungen zu jeder Zeit erfüllt sein.
- Für die tangentialen Feldkomponenten ergeben sich somit *in Abwesenheit von Oberflächenströmen* (d.h.  $i' = 0$ ) die Beziehungen

$$[\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}_0, t)] \times \mathbf{e}_z = \underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}_0, t) \times \mathbf{e}_z$$

$$[\underline{\mathbf{H}}_e(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{H}}_r(\mathbf{r}_0, t)] \times \mathbf{e}_z = \underline{\mathbf{H}}_t(\mathbf{r}_0, t) \times \mathbf{e}_z$$

- Für die normalen Feldkomponenten folgt *für den Fall verschwindender Oberflächenladungsdichten* (d.h.  $\sigma = 0$ ), dass

$$\varepsilon_1 [\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}_0, t)] \cdot \mathbf{e}_z = \varepsilon_2 \underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{e}_z$$

$$\mu_1 [\underline{\mathbf{H}}_e(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{H}}_r(\mathbf{r}_0, t)] \cdot \mathbf{e}_z = \mu_2 \underline{\mathbf{H}}_t(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{e}_z$$

# Reflexionsgesetz

- Damit diese Stetigkeitsbedingungen zu jeder Zeit und an jedem Punkt auf der Grenzfläche erfüllt sein können, müssen zunächst einmal alle drei Exponentialterme identisch sein.
- Dies bedeutet einerseits, dass

$$\omega_e = \omega_r = \omega_t = \omega,$$

und andererseits, dass

$$\underline{k}_e \cdot \mathbf{r}_0 = \underline{k}_r \cdot \mathbf{r}_0 = \underline{k}_t \cdot \mathbf{r}_0.$$

- Aus der Bedingung  $\underline{k}_e \cdot \mathbf{r}_0 = \underline{k}_r \cdot \mathbf{r}_0$  folgt

$$\underline{k}_1 \sin(\alpha_e)y = \underline{k}_1 \sin(\alpha_r)y$$

und somit das *Reflexionsgesetz* („Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“)

$$\alpha_e = \alpha_r$$

# Snelliussches Brechungsgesetz

- Aus der Bedingung  $\underline{k}_r \cdot \mathbf{r}_0 = \underline{k}_t \cdot \mathbf{r}_0$  und mit  $\alpha_1 = \alpha_e = \alpha_r$  und  $\alpha_2 = \alpha_t$  folgt  $\underline{k}_1 \sin(\alpha_1)y = \underline{k}_2 \sin(\alpha_2)y$  bzw. das *Snelliussche Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}$$

- Sofern  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  reellwertige Winkel aus dem Intervall  $[0, \pi/2]$  sind, lässt sich das *Brechungsgesetz* nur anwenden, wenn das Verhältnis  $\underline{k}_2/\underline{k}_1$  reellwertig ist.
- Ferner muss in diesem Fall gelten, dass

$$\sin(\alpha_1) = \frac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1} \sin(\alpha_2) \in [-1, 1] \quad \text{und} \quad \sin(\alpha_2) = \frac{\underline{k}_1}{\underline{k}_2} \sin(\alpha_1) \in [-1, 1]$$

- Wird allerdings die Definition der Sinusfunktion auf komplexwertige Argumente  $\underline{\gamma} = \gamma_{re} + j\gamma_{im}$  erweitert, gemäß  $\sin(\underline{\gamma}) = \frac{1}{j^2} (e^{j\underline{\gamma}} - e^{-j\underline{\gamma}}) = \sin(\gamma_{re}) \cosh(\gamma_{im}) + j \cos(\gamma_{re}) \sinh(\gamma_{im})$ , so lässt sich das *Brechungsgesetz* auch auf den Fall beliebiger komplexer Wellenzahlen  $\underline{k}_1$  und  $\underline{k}_2$  anwenden.

# Senkrechte und parallele Polarisation (I)

- Um die Amplituden der reflektierten und der transmittierten Welle zu bestimmen, werden diese zunächst in zwei orthogonale Polarisationskomponenten aufgeteilt

$$\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t) = \left[ \underline{E}_{0,e}^{(s)} \mathbf{e}_{s,e} + \underline{E}_{0,e}^{(p)} \mathbf{e}_{p,e} \right] e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \mathbf{r})}$$

$$\underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t) = \left[ \underline{E}_{0,r}^{(s)} \mathbf{e}_{s,r} + \underline{E}_{0,r}^{(p)} \mathbf{e}_{p,r} \right] e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \mathbf{r})}$$

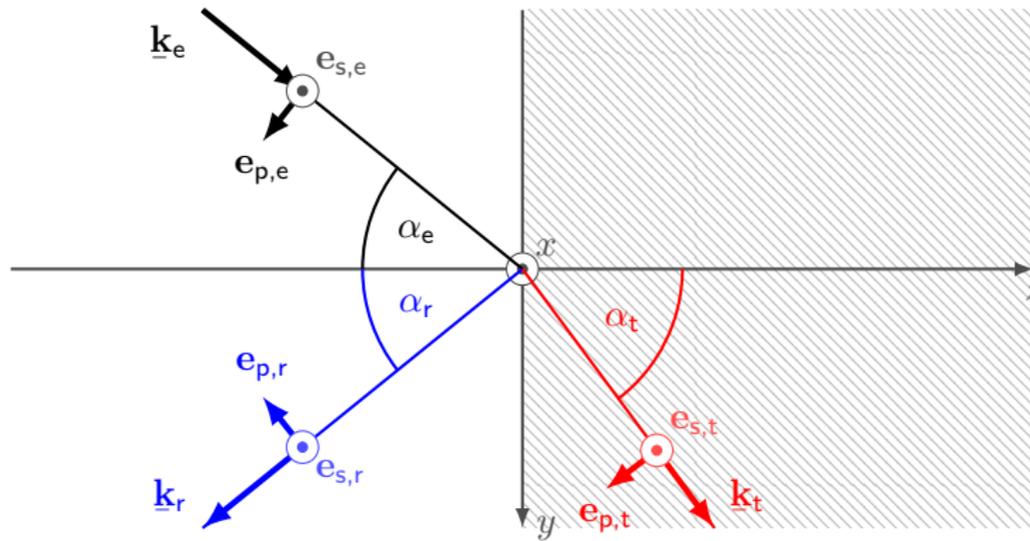
$$\underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}, t) = \left[ \underline{E}_{0,t}^{(s)} \mathbf{e}_{s,t} + \underline{E}_{0,t}^{(p)} \mathbf{e}_{p,t} \right] e^{j(\omega t - \mathbf{k}_t \mathbf{r})}$$

- Dies ist zum einen die *senkrechte* (s) Polarisationskomponente in  $x$ -Richtung ( $\mathbf{e}_{s,i} = \mathbf{e}_x$ ) und zum anderen die *parallele* (p) Polarisationskomponente in Richtung der Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_{p,i}$  wobei  $i \in \{e, r, t\}$ . Diese beiden ergeben mit der Richtung des Wellenvektors ein Rechtsschraubensystem, d.h.

$$\mathbf{e}_{k,i} \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_{p,i}$$

## Senkrechte und parallele Polarisation (II)

- Die drei Vektoren lassen sich stets - relativ zur Einfallsebene - in senkrechte (s) und parallele (p) Polarisationsanteile aufspalten.



## Senkrechte und parallele Polarisation (III)

- Für die hier betrachteten ebenen Wellen erhalten wir somit

$$\mathbf{e}_{p,e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha_1) \\ -\sin(\alpha_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{p,r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha_1) \\ -\sin(\alpha_1) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{p,t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha_2) \\ -\sin(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

- Die magnetischen Felder ergeben sich zu

$$\underline{\mathbf{H}}_e(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{Z_1} \left[ \underline{E}_{0,e}^{(s)} \mathbf{e}_{p,e} - \underline{E}_{0,e}^{(p)} \mathbf{e}_{s,e} \right] e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \mathbf{r})}$$

$$\underline{\mathbf{H}}_r(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{Z_1} \left[ \underline{E}_{0,r}^{(s)} \mathbf{e}_{p,r} - \underline{E}_{0,r}^{(p)} \mathbf{e}_{s,r} \right] e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \mathbf{r})}$$

$$\underline{\mathbf{H}}_t(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{Z_2} \left[ \underline{E}_{0,t}^{(s)} \mathbf{e}_{p,t} - \underline{E}_{0,t}^{(p)} \mathbf{e}_{s,t} \right] e^{j(\omega t - \mathbf{k}_t \mathbf{r})}$$

# Vorlesungsinhalte

1. Rand- und Stetigkeitsbedingungen
2. Reflexion und Brechung ebener Wellen
- 3. Fresnelsche Formeln**
4. Was Sie gelernt haben sollten

# Senkrechte Polarisation (I)

- Durch das Reflexionsgesetz und das Snelliussche Brechungsgesetz ist bereits sichergestellt, dass die zeitliche und die räumliche Abhängigkeit der drei ebenen Wellen auf der Grenzfläche identisch ist.
- Betrachten wir zunächst die senkrechte Polarisation, so muss gelten

$$\underline{E}_{x,0,e} + \underline{E}_{x,0,r} = \underline{E}_{x,0,t}, \quad \text{und} \quad \underline{H}_{y,0,e} + \underline{H}_{y,0,r} = \underline{H}_{y,0,t}$$

- Da das senkrecht polarisierte elektrische Feld nur eine  $x$ -Komponente hat gilt also

$$\underline{E}_{0,e}^{(s)} + \underline{E}_{0,r}^{(s)} = \underline{E}_{0,t}^{(s)}$$

## Senkrechte Polarisation (II)

- Die tangentialen Komponenten des mit dem senkrecht polarisierten elektrischen Feld verkoppelten magnetischen Feldes ergeben sich aus der Projektion

$$\underline{H}_{y,0,e} = \frac{1}{\underline{Z}_1} \underline{E}_{0,e}^{(s)} \mathbf{e}_{p,e} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{1}{\underline{Z}_1} \cos(\alpha_1) \underline{E}_{0,e}^{(s)}$$

$$\underline{H}_{y,0,r} = \frac{1}{\underline{Z}_1} \underline{E}_{0,r}^{(s)} \mathbf{e}_{p,r} \cdot \mathbf{e}_y = -\frac{1}{\underline{Z}_1} \cos(\alpha_1) \underline{E}_{0,r}^{(s)}$$

$$\underline{H}_{y,0,t} = \frac{1}{\underline{Z}_2} \underline{E}_{0,t}^{(s)} \mathbf{e}_{p,t} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{1}{\underline{Z}_2} \cos(\alpha_2) \underline{E}_{0,t}^{(s)}$$

- Aus der Stetigkeitsbedingung erhalten wir also

$$\frac{1}{\underline{Z}_1} \cos(\alpha_1) \underline{E}_{0,e}^{(s)} - \frac{1}{\underline{Z}_1} \cos(\alpha_1) \underline{E}_{0,r}^{(s)} = \frac{1}{\underline{Z}_2} \cos(\alpha_2) \underline{E}_{0,t}^{(s)}$$

## Senkrechte Polarisation (III)

- Wir definieren den *Reflexionsfaktor*  $\underline{r}_s$  und den *Transmissionsfaktor*  $\underline{t}_s$  (für senkrechte Polarisation) als

$$\underline{r}_s = \frac{\underline{E}_{0,r}^{(s)}}{\underline{E}_{0,e}^{(s)}} \quad \text{und} \quad \underline{t}_s = \frac{\underline{E}_{0,t}^{(s)}}{\underline{E}_{0,e}^{(s)}}$$

- So erhalten wir aus den obigen Gleichungen

$$1 + \underline{r}_s = \underline{t}_s \quad \text{und} \quad \underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)(1 - \underline{r}_s) = \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)\underline{t}_s$$

- Nach gegenseitigem Einsetzen wird daraus

$$\underline{r}_s = \frac{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) - \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)} \quad \text{und} \quad \underline{t}_s = \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)}$$

# Parallele Polarisation (I)

- Betrachten wir parallele Polarisation, so lauten die Stetigkeitsbedingungen

$$\underline{E}_{y,0,e} + \underline{E}_{y,0,r} = \underline{E}_{y,0,t} \quad \text{und} \quad \underline{H}_{x,0,e} + \underline{H}_{x,0,r} = \underline{H}_{x,0,t}$$

- Hierfür müssen wir nun das elektrische Feld auf die Grenzfläche projizieren, gemäß

$$\underline{E}_{y,0,e} = \underline{E}_{0,e}^{(p)} \mathbf{e}_{p,e} \cdot \mathbf{e}_y = \underline{E}_{0,e}^{(p)} \cos(\alpha_1)$$

$$\underline{E}_{y,0,r} = \underline{E}_{0,r}^{(p)} \mathbf{e}_{p,r} \cdot \mathbf{e}_y = -\underline{E}_{0,r}^{(p)} \cos(\alpha_1)$$

$$\underline{E}_{y,0,t} = \underline{E}_{0,t}^{(p)} \mathbf{e}_{p,t} \cdot \mathbf{e}_y = \underline{E}_{0,t}^{(p)} \cos(\alpha_2)$$

- Es folgt also

$$\underline{E}_{0,e}^{(p)} \cos(\alpha_1) - \underline{E}_{0,r}^{(p)} \cos(\alpha_1) = \underline{E}_{0,t}^{(p)} \cos(\alpha_2)$$

## Parallele Polarisation (II)

- Für die entsprechenden Komponenten des magnetischen Feldes gilt

$$\underline{H}_{x,0,e} = -\frac{1}{\underline{Z}_1} \underline{E}_{0,e}^{(p)}$$

$$\underline{H}_{x,0,r} = -\frac{1}{\underline{Z}_1} \underline{E}_{0,r}^{(p)}$$

$$\underline{H}_{x,0,t} = -\frac{1}{\underline{Z}_2} \underline{E}_{0,t}^{(p)}$$

- Es folgt also

$$\frac{1}{\underline{Z}_1} \underline{E}_{0,e}^{(p)} + \frac{1}{\underline{Z}_1} \underline{E}_{0,r}^{(p)} = \frac{1}{\underline{Z}_2} \underline{E}_{0,t}^{(p)}$$

## Parallele Polarisation (III)

- Wir definieren den *Reflexionsfaktor*  $\underline{r}_p$  und den *Transmissionsfaktor*  $\underline{t}_p$  (für parallele Polarisation) als

$$\underline{r}_p = \frac{\underline{E}_{0,r}^{(p)}}{\underline{E}_{0,e}^{(p)}} \quad \text{und} \quad \underline{t}_p = \frac{\underline{E}_{0,t}^{(p)}}{\underline{E}_{0,e}^{(p)}}$$

- Damit erhalten wir aus den obigen Gleichungen

$$(1 - \underline{r}_p) \cos(\alpha_1) = \underline{t}_p \cos(\alpha_2) \quad \text{und} \quad (1 + \underline{r}_p) = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \underline{t}_p$$

- Nach gegenseitigem Einsetzen folgt daraus

$$\underline{r}_p = \frac{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) - \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)} \quad \text{und} \quad \underline{t}_p = \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)} .$$

# Fresnelsche Formeln

- Nichtleitende Medien ( $\kappa = 0$ ) werden häufig durch ihren Brechungsindex  $n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$  charakterisiert. Es gilt

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = \frac{Z_0 \mu_r}{n}$$

- Sind nun beide Medien nichtleitend und gelte ferner  $\mu_1 = \mu_2$ , so lassen sich die Reflexions- und Transmissionsfaktoren schreiben als

$$\underline{r}_s = \frac{n_1 \cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)}$$

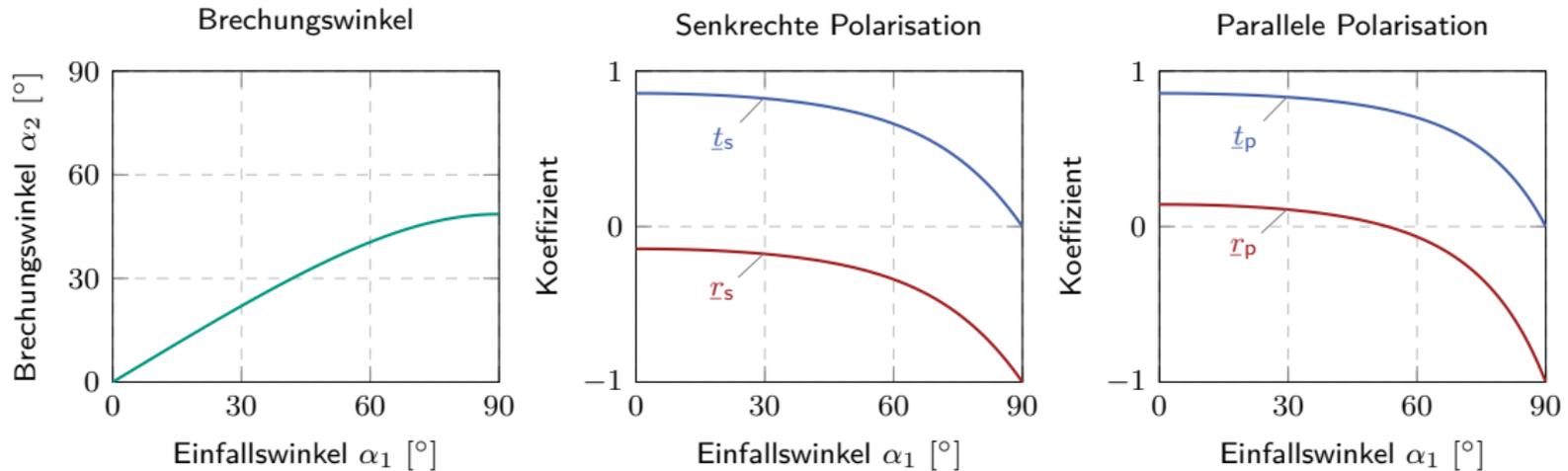
$$\underline{t}_s = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{r}_p = \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - n_1 \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{t}_p = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)}$$

# Fresnelsche Formeln: Beispiel A

- Für den Übergang von Vakuum  $n_1 = 1$  zu Wasser  $n_2 = 1,333$  ergibt sich aus dem Brechungsgesetz und den Fresnelschen Formeln das unten dargestellte Verhalten.

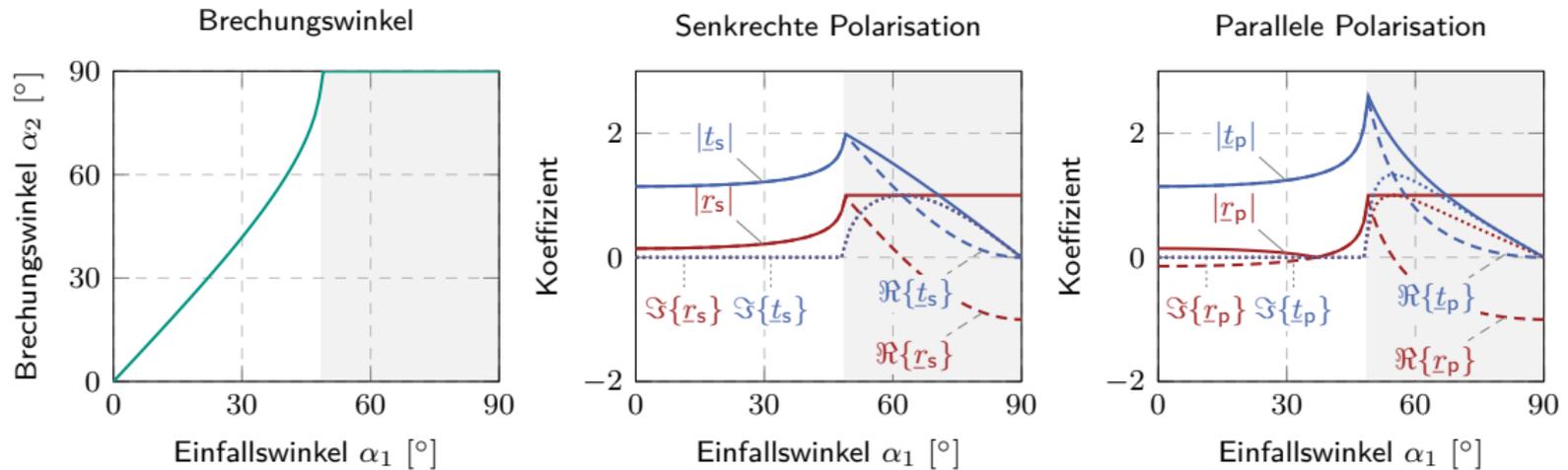


# Fresnelsche Formeln: Beispiel A - Diskussion

- Gemäß des Snelliusschen Brechungsgesetzes gilt wegen  $n_2 > n_1$  stets  $\alpha_2 < \alpha_1$ .
- Offenbar sind die Koeffizienten  $\underline{r}_{s,p}$  bzw.  $\underline{t}_{s,p}$  stets reellwertig; an der Grenzfläche können also nur Phasensprünge von  $0^\circ$  oder  $180^\circ$  auftreten.
- Für den Fall senkrechter Polarisation ist  $\underline{r}_s$  für alle  $\alpha_1$  kleiner null; das E-Feld der reflektierten Welle weist also eine Phasenverschiebung von  $180^\circ$  gegenüber dem der einlaufenden Welle auf.
- Im Fall paralleler Polarisation erkennen wir, dass  $\underline{r}_p$  eine Nullstelle aufweist. Demzufolge ändert sich das Vorzeichen des Reflexionsfaktors und damit die auch die Phasenverschiebung zwischen einlaufender und reflektierter Welle mit dem Einfallswinkel  $\alpha_1$ .
- Auf die erwähnte Nullstelle gehen wir auf Folie 35 näher ein.
- Auffällig ist, dass auch bei  $\underline{r}_p = 0$  der Transmissionskoeffizient  $\underline{t}_p < 1$  ist. Dies bedeutet nicht, dass Leistung an der Grenzfläche verloren geht!
- Begründung: Die parallel polarisierte Welle weist elektrische Feldkomponenten senkrecht zur Grenzfläche auf. Da die Normalkomponenten des E-Felds jedoch nicht stetig sind, ist wegen  $n_2 > n_1$  die E-Feldamplitude in Medium 2 geringer und damit  $\underline{t}_p < 1$ . Gleichzeitig nimmt aufgrund der Brechung zum Lot hin der transversale Anteil des E-Feldes zu.

# Fresnelsche Formeln: Beispiel B

- Für den Übergang von Wasser mit  $n_1 = 1,333$  zu Vakuum mit  $n_2 = 1$  ergibt sich:



# Fresnelsche Formeln: Beispiel B - Diskussion

- Gemäß des Snelliusschen Brechungsgesetzes gilt wegen  $n_1 > n_2$  stets  $\alpha_2 > \alpha_1$ .
- Offenbar verläuft ab einem gewissen Grenzwinkel die transmittierte Welle parallel zu der Grenzschicht.
- Ab diesem Grenzwinkel werden zudem die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten komplexwertig.
- Den Abbildungen auf Folie 30 können wir entnehmen, dass der Betrag des Reflexionsfaktors ab einem kritischen Einfallswinkel gegenüber der Grenzflächennormalen  $\alpha_1 = \alpha_{\text{krit}}$  (innerhalb des grau hervorgehobenen Bereichs) gleich eins ist.
- Demzufolge wird für diese Winkel die einfallende Welle vollständig reflektiert.
- Der Imaginärteil des Reflexionsfaktors mündet in einer Phasenverschiebung der reflektierten Welle, die vom Einfallswinkel abhängt.
- Aufgrund der Grenzflächenbeziehungen darf auch im Falle der Totalreflexion das Feld hinter der Grenzschicht nicht verschwinden, weshalb der Transmissionskoeffizient  $\underline{t}_{s,p}$  Werte größer eins annehmen kann.
- Auf diese Eigenschaft gehen wir auf Folie 33 näher ein.

# Grenzwinkel der Totalreflexion

- Beim Übergang von einem Medium mit höherem Brechungsindex (optisch dichter) zu einem Medium mit geringerem Brechungsindex (optisch dünner), kann folglich für alle Winkel  $\alpha_1 \geq \alpha_{\text{krit}}$  sogenannte *Totalreflexion* auftreten.
- Das Snelliussche Brechungsgesetz lässt sich für  $\alpha_1 = \alpha_{\text{krit}}$  schreiben als

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_{\text{krit}} = 1 .$$

- Aus dieser Beziehung können wir den kritischen Winkel  $\alpha_{\text{krit}}$  berechnen und erhalten für den Übergang von Wasser zu Luft

$$\alpha_{\text{krit}} = \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right) \approx 48,60^\circ .$$

# Die transmittierte Welle bei Totalreflexion

- Gemäß der Grenzflächenbeziehungen muss das tangentielle E-Feld an der Grenzfläche stetig sein, weshalb auch bei vollständiger Reflexion das transmittierte Feld nicht sprunghaft abfallen kann.
- Diesen Umstand spiegeln auch die Transmissionskoeffizienten wider, die auch bei Totalreflexion i.A. von null verschieden sind.
- Da der tangentielle Anteil des E-Feldes stetig ist, muss auch der tangentielle Anteil der Ausbreitungskonstante (hier  $\underline{k}_y$ ) in beiden Medien identisch sein.
- Es gilt jedoch  $n_2 < n_1$  weshalb die Wellenzahl in Medium 2 kleiner als in Medium 1 ist. Damit dennoch die Stetigkeitsbedingung erfüllt sein kann, muss also der senkrechte Anteil der Ausbreitungskonstante in Medium 2 rein imaginär werden.
- Senkrecht zur Grenzfläche klingt das Feld der transmittierten Welle also exponentiell ab.

# Visualisierung der Totalreflexion

- Für hinreichend große Winkel gegenüber der Grenzfläche von Wasser zu Luft wird das von der Quelle ausgehende Licht an dem Medienübergang reflektiert.

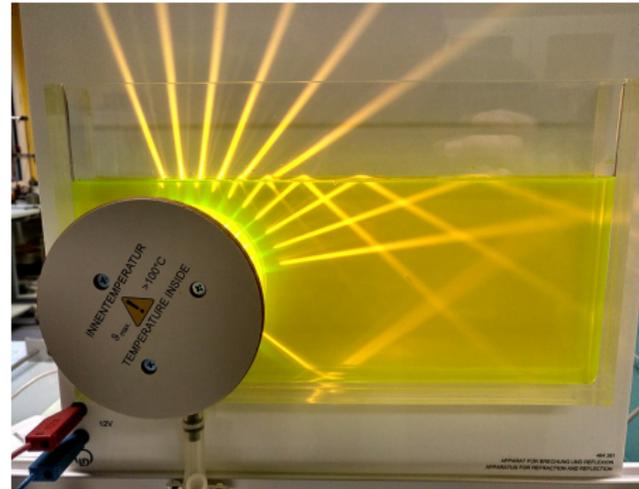


Abbildung: Michael J. Stahl, [CC BY-SA 4.0](#), via Wikimedia Commons

# Brewsterscher Polarisationswinkel

- Zusammen mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz erhalten wir für  $r_p = 0$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1)} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sin(\alpha_2) \cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1) \cos(\alpha_1)} = \frac{\sin(2\alpha_2)}{\sin(2\alpha_1)} = 1$$

- Diese Gleichung hat die triviale Lösung  $\alpha_2 = \alpha_1$ . Eine weitere Lösung ist  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ . Damit ergibt sich

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_1)} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} = \tan(\alpha_1) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \text{atan} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$$

- Dieser Winkel  $\alpha_1$  heißt *Brewsterscher Polarisationswinkel* und stellt eine Besonderheit *parallel polarisierter* Wellen dar.
- Von einer beliebig polarisierten Welle, die unter  $\alpha_1$  einfällt, wird also nur die Feldkomponente reflektiert, die senkrecht auf der Einfallsebene steht. Die reflektierte Welle ist senkrecht polarisiert.

# Anwendung in der Fotografie

- Während das einfallende Sonnenlicht unpolarisiert ist, ist das von der Wasseroberfläche unter dem Brewsterschen Polarisationswinkel reflektierte Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert.
- Wird der Polarisationsfilter so ausgerichtet, dass er nur die parallele Polarisation durchlässt, so verschwinden die Reflexionen vollständig.



# Vorlesungsinhalte

1. Rand- und Stetigkeitsbedingungen
2. Reflexion und Brechung ebener Wellen
3. Fresnelsche Formeln
- 4. Was Sie gelernt haben sollten**

# Was Sie gelernt haben sollten

- Welche tangentialen bzw. normalen Feldkomponenten (nicht) stetig sind und wie sich die zugrundeliegenden Beziehungen herleiten lassen.
- Dass wir elektromagnetische (ebene) Wellen an einer Grenzfläche in einen einfallenden, reflektierten und transmittierten Anteil zerlegen können.
- Welche Annahmen bei der Herleitung des Reflexions- und Brechungsgesetzes getroffen wurden.
- Nach welchem Kriterium zwischen senkrechter und paralleler Polarisation unterschieden wird.
- Wie die Polarisation (senkrecht bzw. parallel) den Reflexions- und Transmissionsfaktor beeinflusst.
- Unter welchen Bedingungen Totalreflexion auftreten kann und wie sich dieses Phänomen auf die Wellenausbreitung auswirkt.
- Welche Bedeutung der Brewsterwinkel hat.