Karlsruher Institut für Technologie

IPQ

Vorlesung 07: Beugung

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2022/23

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 7. Dezember 2022

Vorlesungsinhalte

Vorlesungsinhalte

Einleitung

- In der vorherigen Vorlesung haben wir bereits die Interaktion von ebenen Wellen mit Materie am Beispiel ihres Verhaltens an einer Grenzschicht diskutiert.
- Im Allgemeinen können Grenzschichten sehr viel kompliziertere Form haben.
- Wir unterscheiden Streuung und Beugung. Dabei gibt es nur eine kleine Anzahl an kanonischen Problemen mit exakter Lösung, z.B. eine Kreislochblende im dünnen Schirm.
- Im Folgenden wird eine skalare Beugungstheorie entwickelt, die teils auf sehr groben Annahmen beruht, die aber dennoch die Effekte der Beugung und Streuung recht gut wiedergibt, wenn der Streukörper oder die beugende Apertur groß gegenüber der Wellenlänge sind, und wenn der Beobachtungspunkt mehrere Wellenlängen entfernt ist.

Vorlesungsinhalte

Gaußscher Satz

- Der Gaußsche Satz besagt, dass das Volumenintegral über die Quellen eines Vektorfeldes $\nabla \cdot \mathbf{A}$ innerhalb eines Volumens V mit der geschlossenen Oberfläche O in das Integral über den Fluss $-\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ durch O ausdrücken können. Dies haben wir ausgedrückt als

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \mathrm{d}V = \oint_O \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = -\oint_O \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}F \, .$$

dabei ist $\mathbf{n}$ der in das Volumen hinein zeigende Einheitsvektor in Richtung der Flächennormalen (Normalenvektor) des infinitesimalen Flächenelements $\mathrm{d}F$ und $\mathrm{d}\mathbf{F} = -\mathbf{n} \, \mathrm{d}F$.

Erste Greensche Identität

- Aus den zwei Skalarfeldern ϕ und ψ ergebe sich das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = \phi\,(\nabla\psi)$$

- Die Ableitung des Skalarfelds ψ in Richtung des Normalenvektors sei

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = (\nabla\psi)\cdot\mathbf{n}$$

- Eingesetzt in den Gaußschen Satz erhalten wir die erste Greensche Identität

$$-\oint_O \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,\mathrm{d}F = \int_V \phi\Delta\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}V\,.$$

Zweite Greensche Identität

- Aus den zwei Skalarfeldern ϕ und ψ ergebe sich das Vektorfeld nun als

$$\mathbf{A} = \phi\left(\nabla\psi\right) - \psi\left(\nabla\phi\right) \ .$$

- Eingesetzt in den Gaußschen Satz erhalten wir die zweite Greensche Identität

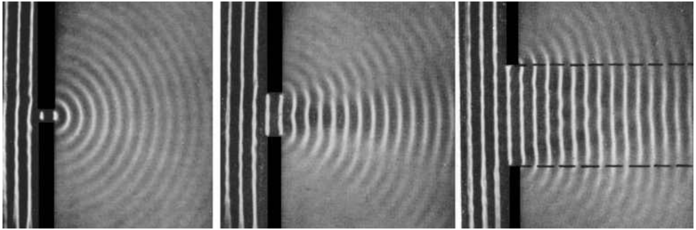
$$-\oint_O \phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,\mathrm{d}F = \oint_O \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{F} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,\mathrm{d}V = \int_V \phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi\,\mathrm{d}V \ .$$

- Die beiden Greenschen Identitäten seinen hier zunächst als rein mathematische Beziehungen zu betrachten, die einen Bezug zwischen dem Inneren und dem Rand eines Volumens herstellen.

Vorlesungsinhalte

Das Huygenssche Prinzip

- Das Huygenssche Prinzip besagt, dass jeder Punkt auf der Wellenfront einer Welle wiederum als Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle betrachtet werden kann.
- Im dreidimensionalen Raum handelt es sich bei diesen Elementarwellen um Kugelwellen.
- Mit dem Huygensschen Prinzip können die Phänomene Beugung und Streuung zu beschreiben werden.
- Im Physikunterricht wird häufig die Beugung von Wasserwellen an einem Spalt unterschiedlicher Breite experimentell im Wasserbecken gezeigt.



Bildquelle *Wellenwanne | LEIFIphysik* 2022.

Problemstellung

Karlsruher Institut für Technologie

- Um zu einer mathematischen Beschreibung zu gelangen stellen wir uns folgende Anordnung vor:
- Wir betrachten ein homogenes Volumen V mit der geschlossenen Oberfläche O. Anschaulich z.B. einen Luftballon.
- Außerhalb des Volumens und auf seiner Oberfläche sei eine skalare Wellenfunktion $\underline{U}(\mathbf{r})$ bekannt.
- Die Quellen dieses Skalarfeldes liegen allesamt außerhalb des Volumens, weshalb innerhalb des Volumens überall die homogene Helmholtz-Gleichung

$$\Delta \underline{U} + k^2 \underline{U} = 0$$

  erfüllt sein muss.
- Gesucht ist das Skalarfeld $\underline{U}(\mathbf{r})$ innerhalb des Volumens.
- Gemäß des Huygensschen Prinzips kann jeder Punkt auf der Oberfläche als Ausgangspunkt einer Kugelwelle aufgefasst werden.

Greensche Funktion

- Die Elementarwelle beschreiben wir nun durch die Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \,,$$

  da diese dem Skalarfeld einer Kugelwelle am Ort $\mathbf{r}$ entspricht, die ihren Ursprung am Ort $\mathbf{r}'$ hat.
- Als Greensche Funktion stellt sie die Fundamentallösung der skalaren Helmholtz-Gleichung in Kugelkoordinaten dar, d.h.

$$\Delta \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \, \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \,.$$

- Diese Lösung haben wir bereits für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ in der Vorlesung zum Hertzschen Dipol kennengelernt.
- Es ist zu beachten, dass die Greensche Funktion für $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ eine Singularität aufweist.

Anwendung der zweiten Greenschen Identität

- Wir setzen die zweite Greensche Identität an, um U innerhalb des Volumens V zu ermitteln.
- Da die Elementarwelle eine Singularität für $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ aufweist, muss das Volumen so gewählt werden, dass der Punkt P mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ ausgespart wird.
- Mit $\phi = \underline{U}(\mathbf{r}')$ und $\psi = \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, lässt sich die zweite Greensche Identität folgendermaßen schreiben, wobei wir die Integrationsvariblen mit $'$ kennzeichnen:

$$\oint_O \underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \, \mathrm{d}F' = - \int_V \underline{U}(\mathbf{r}') \, \Delta' \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \, \Delta' \underline{U}(\mathbf{r}') \, \mathrm{d}V'$$

- Es kann gezeigt werden (vgl. Übung), dass dieser Ausdruck für alle $\mathbf{r}$ innerhalb des Volumens V ausgedrückt werden kann als

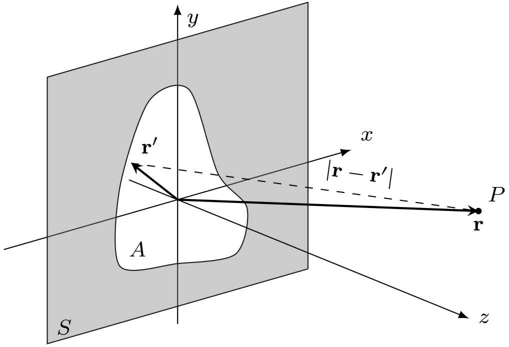
$$\oint_O \underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \, \mathrm{d}F' = \underline{U}(\mathbf{r})$$

- Hierbei handelt es sich gerade um die mathematische Formulierung des Huygensschen Prinzips.

Vorlesungsinhalte

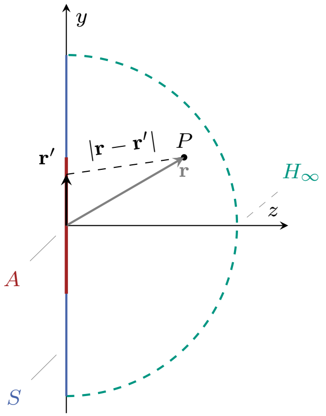
Problemstellung: Beugung an einer Apertur

- Im Folgenden betrachten wir im dreidimensionalen Raum die Beugung einer Welle an einer Apertur A (z.B. einem Loch) in einem unendlich ausgedehnten Schirm S in der Ebene $z = 0$.
- Die Quellen der Welle befinden sich alle im Halbraum $z < 0$, der Halbraum $z > 0$ ist quellenfrei.
- Diese Welle wird im gesamten Raum durch die skalare komplexe Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r})$ beschrieben, welche die skalare Helmholtz-Gleichung erfüllt, d.h. $\Delta \underline{U} + k^2 \underline{U} = 0$.
- Innerhalb der Apertur A bei $z = 0$ sei die komplexe Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r})$ bekannt.
- Gesucht ist nun $\underline{U}(\mathbf{r})$ im Halbraum $z > 0$.



Kirchhoffsche Näherungen

- Das Volumen V des Halbraumes $z > 0$ können wir im folgenden als Halbkugel verstehen, deren Radius gegen Unendlich läuft (s. Abb.).
- Die Oberfläche O von V zerlegen wir nun in drei Teilflächen: Die Aperturfläche A, die Schirmfläche (ohne Apertur) S und die Fläche der ins Unendliche ausgedehnten Halbkugel H_∞.
- Kirchhoff hat für diese drei Teilintegrale folgende Näherungen getroffen:
  - Innerhalb der Apertur beeinflusst das Vorhandensein des Schirms die komplexe Amplitude $\underline{U}$ und dessen Ableitung $\frac{\partial \underline{U}}{\partial n'}$ nicht.
  - Auf dem Schirm ($z = 0+$) gilt hingegen $\underline{U} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial n'} \equiv 0$, weshalb das Integral über S zu null wird.
  - Die Wellen im Halbraum $z > 0$ klingen mit zunehmendem Abstand von der Apertur schneller ab als die Kugeloberfläche H_∞ wächst, weshalb der Beitrag des Integrals über H_∞ verschwindet.



Das Kirchhoffsche Beugungsintegral (I)

- Mit der Apertur in der Ebene $z = 0$, deren Normale in $+z$-Richtung zeigt, erhalten wir mit $\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{\partial}{\partial z'}$ und $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$

$$\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} = \frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{z - z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{1 + \mathrm{j}\,k\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

- Mit den Kirchhoffschen Näherungen erhalten wir für $z' = 0$ das Kirchhoffsche Beugungsintegral

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \int_A \left[\frac{z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{(1 + \mathrm{j}\,k\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \underline{U}(\mathbf{r}') - \left. \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'} \right|_{z'=0} \right] \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\,\mathrm{d}F'$$

- Mithilfe dieses Integrals können wir, unter Voraussetzung der Kirchhoffschen Näherungen, das Skalarfeld $\underline{U}(\mathbf{r})$ im Halbraum $z > 0$ berechnen.

Das Kirchhoffsche Beugungsintegral (II)

- Dafür notwendig ist allein die Kenntnis des Feldes sowie seiner Ableitung in Normalenrichtung innerhalb der Apertur.
- In hinreichend großer Entfernung von der Apertur, d.h. für $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \gg \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$, gilt $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \gg 1$.
- Ferner gilt in ausreichend großem Abstand, dass $\frac{z}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{z}{|\mathbf{r}|} = \cos(\theta)$ mit dem Winkel $\theta \in [-\pi/2, \pi/2)$.
- Damit können wir das Kirchhoffsche Beugungsintegral annähern durch den Ausdruck

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \int_A \left[\mathrm{j}\, k \cos(\theta) \underline{U}(\mathbf{r}') - \left. \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'} \right|_{z'=0} \right] \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, \mathrm{d}F' \,.$$

Beispiel: Beugung einer ebenen Welle (I)

- Bei Anregung mit einer ebenen Welle gilt im Halbraum $z < 0$ $\underline{U}(\mathbf{r}) = \underline{U}_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, kz}$ und in der Apertur

$$\underline{U}(\mathbf{r}') = \underline{U}_0 \qquad \text{und} \qquad \left.\frac{\underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'}\right|_{z'=0} = -\mathrm{j}\, k\, \underline{U}_0$$

- Damit erhalten wir für das Feld im Halbraum $z > 0$

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}\, k}{4\pi} \underline{U}_0 \int_A (1 + \cos\theta)\, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathrm{d}F'\,,$$

was sich für kleine Winkel gegenüber der z-Achse wegen $\cos\theta \approx 1$ weiter vereinfacht zu

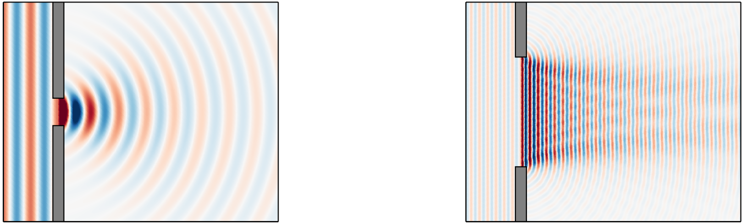
$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}\, \underline{U}_0}{\lambda} \int_A \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathrm{d}F' \approx \frac{\mathrm{j}\, \underline{U}_0}{\lambda r} \int_A \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, \mathrm{d}F'\,.$$

- Letztere Näherung gilt für $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx |\mathbf{r}| = r$. Beachte, dass diese Näherung nicht ohne Weiteres im komplexen Exponenten getroffen werden darf.

Beispiel: Beugung einer ebenen Welle (II)

- Mit obiger Gleichung können wir nun die Beugung einer ebenen Welle an einer beliebigen Apertur beschreiben. Die untenstehenden Abbildungen veranschaulichen dies in der yz-Ebene Aperturen mit unterschiedlichem Durchmesser.
- Trotz der Kirchhoffschen Näherungen, deren Begründungen zunächst wage erscheinen, zeigen die Ergebnisse eine erstaunlich geringe Abweichung von experimentellen Beobachtungen.

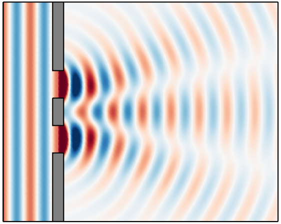
$d \sim \lambda$ $\qquad$ $d \gg \lambda$



Interferenz am Doppelspalt

- Neben der Beugung am Einzelspalt können wir nach dem selben Prinzip auch das Phänomen der Interferenz am Doppelspalt mithilfe des Beugungsintegrals beschreiben.
- Gemäß dem Superpositionsprinzip können die Feldverteilungen für jeden Spalt separat berechnet werden. Das Gesamtfeld ergibt sich dann als Summe der Einzellösungen.
- Bei der Darstellung mittels komplexer Amplituden interferieren die Felder entsprechend ihrer Phasenrelation entweder konstruktiv oder destruktiv, wodurch das bekannte Interferenzmuster entsteht.

$$d \sim \lambda$$



Vorlesungsinhalte

Fresnel-Näherung

- Wir können das Beugungsintegral weiter vereinfachen, indem wir $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ für $z'=0$ wie folgt umformen

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2} = z\sqrt{1+\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{z^2}}\,.$$

- Die Wurzel können wir nun in eine Taylorreihe entwickeln, gemäß $\sqrt{1+\alpha} = 1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{8}+\frac{\alpha^3}{16}-\cdots$, und durch ihre ersten beiden Terme annähern

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx z\left(1+\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2z^2}\right)\,.$$

- Ist die Näherung der Wurzel gültig, so gilt $\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2z^2} \ll 1$ und damit in guter Näherung $\frac{1}{r}\approx\frac{1}{z}$.
- Diese Approximationen bezeichnen wir als Fresnel-Näherung und erhalten nach deren Anwendung das sogenannte Fresnelsche Beugungsintegral

$$\underline{U}^{(\text{Fresnel})}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}\,\underline{U}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kz}}{\lambda z}\iint_A \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2z}}\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

Wann gilt die Fresnel-Näherung?

- Im Exponenten haben wir lediglich die ersten zwei Terme der Taylorreihe berücksichtigt. Da der Fehlerbeitrag für höhere Terme abnimmt, können wir die Größenordnung des Fehlers im Exponenten aus dem dritten Term abschätzen zu

$$\epsilon = kz\frac{\alpha^2}{8} = k\frac{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2\right]^2}{8z^3}$$

- Damit nun der Phasenfehler viel kleiner als 2π ist, muss mit $\rho^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$ die folgende Bedingung gelten

$$k\frac{\rho^4}{8z^3} \ll 2\pi \quad \overset{\lambda=2\pi/k}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{\rho^4}{\lambda z^3} \ll 8 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\rho^4}{\lambda^4} \ll 8\frac{z^3}{\lambda^3}\,.$$

- In der Regel gilt für Wellenlängen im optischen Bereich in großem Abstand von der Apertur $\lambda \ll \rho \ll z$. Unter diesen Bedingungen ist die Fresnel-Näherung zulässig.

Fraunhofer-Näherung

- Eine weitere Vereinfachung ergibt sich mit der zusätzlichen Näherung

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx z + \frac{x^2 - 2xx' + y^2 - 2yy'}{2z} \,.$$

- Diese Approximation bezeichnen wir als Fraunhofer-Näherung, welche das Fresnelsche Beugungsintegral weiter vereinfacht zu

$$\underline{U}^{(\text{Fraunhofer})}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}\,\underline{U}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kz}}{\lambda z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k\frac{x^2+y^2}{2z}} \iint_A \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,k\frac{xx'+yy'}{z}}\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

- Wenn wir nun eine Aperturfunktion $g_A(x', y')$ sowie die Raumfrequenzen $\xi = -x/\lambda z$ und $\upsilon = -y/\lambda z$ einführen, dann wird dieses Integral zu

$$\underline{U}^{(\text{Fraunhofer})}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{j}\,\underline{U}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kz}}{\lambda z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,k\frac{x^2+y^2}{2z}} \iint_{-\infty}^{\infty} g_A(x', y')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi(\xi x'+\upsilon y')}\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

- Das Integral entspricht der zweidimensionalen räumlichen Fouriertransformation der Aperturfunktion.

Wann gilt die Fraunhofer-Näherung?

- Im Exponenten haben wir den Term $-\mathrm{j}\,k\frac{x'^2+y'^2}{2z}$ vernachlässigt.
- Nehmen wir nun eine kreisförmige Apertur mit dem Radius $R = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ an, so muss bei guter Näherung gelten, dass

$$k\frac{R^2}{2z} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{R^2}{2z} \ll \pi$$

- Daraus folgt als Bedingung für die Gültigkeit der Fraunhofer-Näherung

$$z \gg \frac{R^2}{\lambda} \qquad \text{bzw.} \qquad R \ll \sqrt{\lambda z}\,.$$

Fresnel-Zahl

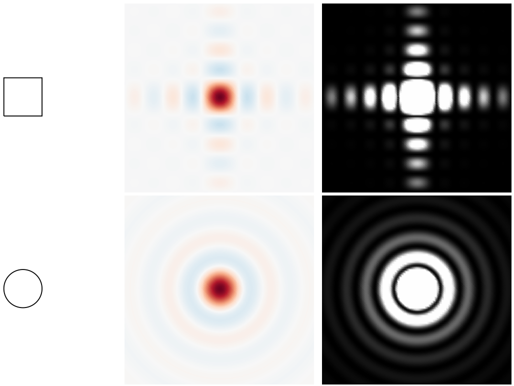
- Die Fresnel-Zahl ist eine dimensionslose Kenngröße, die beschreibt, wie stark eine Welle an einer Blende gebeugt wird. Sie ist definiert als

$$F = \frac{R^2}{\lambda z} \,.$$

- Sie findet insbesondere in der Optik Verwendung.
- Folgende Fälle lassen sich grob unterscheiden:
  - $F \ll 1$: Die Blende ist sehr klein oder der Abstand zur Apertur z sehr groß $\implies$ Fernfeld, Fraunhofer-Beugung
  - $F \simeq 1$: Fresnel-Beugung
  - $F \gg 1$: Die Blende ist sehr groß oder der Abstand zur Apertur z sehr klein $\implies$ Gültigkeit der geometrischen Optik/Strahlenoptik
- Somit dient die Fresnel-Zahl als Richtwert, um für eine gegebene Problemstellung die passende Beschreibung der Beugung einer Welle sicherzustellen.

Beugungsmuster

- Die Abbildungen zeigen den Realteil bzw. das Betragsquadrat (d.h. die Intensität) des Beugungsmusters von $\underline{U}$ *im Fernfeld* für eine rechteckige Apertur (oben) und eine kreisförmige Apertur (unten).
- Die sichtbaren Muster stimmen gerade mit den Fouriertransformierten der Aperturfunktionen überein.



Vorlesungsinhalte

Was Sie gelernt haben sollten

- Die Aussage des Huygensschen Prinzips, dass jede Wellenfunktion als Überlagerung von Kugelwellen dargestellt werden kann, habe ich verstanden.
- Mir ist klar, weshalb wir neben dem Ortsvektor $\mathbf{r}$, der sich auf den Beobachtungspunkt bezieht, die Integration über den Ortsvektor $\mathbf{r}'$ benötigen.
- Die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung sowie deren Gültigkeitsbereiche habe ich verstanden.
- Ich habe verstanden, dass das Beugungsintegral gemäß der Fraunhofer-Näherung für eine ebene Welle der zweidimensionalen Fouriertransformation der Aperturfunktion entspricht.

Vorlesungsinhalte

Literaturverweise

[1] *Wellenwanne | LEIFIphysik*. URL: https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-wellen/versuche/wellenwanne (besucht am 05. 12. 2022).