

Vorlesung 08: Der Gaußsche Strahl

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2022/23

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 14. Dezember 2022



Vorlesungsinhalte

1. Paraxiale Näherung und Strahlwellen
2. Parameter der Strahlwellen
3. Weitere Lösungen der paraxialen Helmholtzgleichung
4. Was Sie gelernt haben sollten
5. Anhang
 - Herleitung Laguerre-Gaußsche Moden
 - Herleitung Hermite-Gaußsche Moden

Vorlesungsinhalte

1. Paraxiale Näherung und Strahlwellen

2. Parameter der Strahlwellen

3. Weitere Lösungen der paraxialen Helmholtzgleichung

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

- Herleitung Laguerre-Gaußsche Moden
- Herleitung Hermite-Gaußsche Moden

Strahlwellen

- Bislang haben wir für die Wellenausbreitung in homogenen Medien stets ebene Wellen oder Kugelwellen betrachtet.
- Dass Wellen - wie für ebene Wellen und Kugelwellen bislang angenommen - senkrecht zur Ausbreitungsrichtung unendlich ausgedehnt sind, gilt meist nur in erster Näherung.
- Wellen nehmen häufig die Form einer Strahlwelle an, d.h. senkrecht zur Ausbreitungsrichtung besteht eine begrenzte Feldausdehnung.
- Dabei muss weiterhin die skalare Helmholtzgleichung gelten

$$\Delta U + k^2 U = 0 .$$

- In der letzten Vorlesung haben wir gesehen, dass die Beugung an einer Apertur in hinreichender Entfernung von der Quelle durch die Fresnelsche Näherung beschreibbar ist.
- Auch eine endliche transversale Feldausdehnung wirkt sich wie eine Apertur aus, weshalb wir bei der Ausbreitung von Strahlwellen - wie bei der Beugung - eine Aufweitung erwarten.

Anwendung Strahlwellen

- Insbesondere bei optischen Wellenlängen, können vielzählige Ausbreitungsszenarien mithilfe von Strahlwellen beschrieben werden.
- Ein aktuelles Beispiel sind Satellitennetzwerke, die zunehmend auf optische Kommunikationsverbindungen setzen.
- Mit dieser Technologie können schon heute Datenraten von 100 Gbit/s über Distanzen von fast 500 km zwischen der Erde und einem Satelliten erzielt werden (Tantillo 2022).



Bildquelle [Mynaric](#).

Paraxiale Näherung (I)

- Das Analogon zur Fresnelschen Näherung des Beugungsintegrals ist die paraxiale Näherung der Helmholtz-Gleichung, welche wir im Folgenden betrachten.
- Mit der z -abhängigen transversalen Feldverteilung $\underline{\psi}$ und der reellen Wellenzahl $k > 0$ wählen wir für eine, sich in $+z$ -Richtung ausbreitende, skalare Feldgröße den Ansatz

$$\underline{U}(\rho, \phi, z) = \underline{U}_0 \underline{\psi}(\rho, \phi, z) \exp(-j k z) .$$

- Setzen wir diesen Ansatz in die Helmholtzgleichung in kartesischen Koordinaten ein, ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial z^2} - j 2k \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial z} = 0 .$$

Paraxiale Näherung (II)

- In vielen praktischen Szenarien ändert sich die transversale Feldverteilung nur langsam entlang der Ausbreitungsrichtung, weshalb wir die Annahme treffen, dass

$$\left| \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial z} \right| .$$

- Diese Näherung bezeichnen wir als *paraxiale Näherung*, welche insbesondere für große k , d.h. etwa im Bereich optischer Frequenzen gilt.
- Aus der Helmholtzgleichung folgt mit dem Ansatz für $\underline{\psi}$ und der paraxialen Näherung die vereinfachte partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial y^2} - j 2k \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial z} = 0 .$$

Paraxiale Näherung (III)

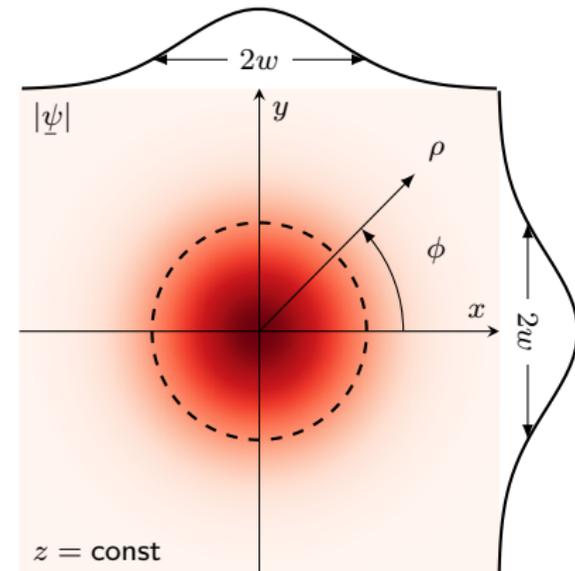
- Setzen wir denselben Ansatz in die Helmholtzgleichung in Zylinderkoordinaten ein und wenden erneut die paraxiale Näherung an, ergibt sich entsprechend

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial \phi^2} - j 2k \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial z} = 0.$$

- Eine triviale Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist $\underline{\psi} = \text{const}$, also die ebene Welle.
- Kugelwellen stellen allerdings keine Lösung der Helmholtzgleichung unter der paraxialen Näherung dar.

Lösungsansatz Gaußscher Strahl (I)

- Zur Lösung dieser paraxialen Helmholtzgleichung wählen wir einen heuristischen Ansatz.
- Ausgehend von experimentellen Beobachtungen, setzen wir für die transversale Feldverteilung eine zylindersymmetrische Gaußverteilung (den Gaußschen Fleck) mit dem $\frac{1}{e}$ -Strahlradius $w(z)$ an.
- Aufgrund des Phänomens der Beugung ändert sich der Strahlradius des Gaußschen Flecks entlang der Ausbreitungsrichtung.
- Zusätzlich kommt es zu einer Phasenkrümmung mit dem Krümmungsradius $R(z)$.



Lösungsansatz Gaußscher Strahl (II)

- Als Lösungsansatz für die paraxiale Helmholtzgleichung in Zylinderkoordinaten wählen wir daher für $\underline{\psi}$ den folgenden Ansatz

$$\underline{\psi}(\rho, z) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right)}_{\text{Gaußscher Fleck}} \underbrace{\exp\left(-j\frac{k\rho^2}{2R(z)}\right)}_{\text{gekrümmte Phasenfront}} \underbrace{\exp\left(-j\underline{P}(z)\right)}_{\text{weitere } z\text{-Abhängigkeit}}$$

- Durch Einführen des komplexen Strahlparameters

$$\frac{1}{\underline{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - j\frac{2}{kw^2(z)},$$

- lässt sich der Ansatz schließlich schreiben als

$$\underline{\psi}(\rho, z) = \exp\left(-j\left[\frac{k\rho^2}{2\underline{q}(z)} + \underline{P}(z)\right]\right).$$

Vorlesungsinhalte

1. Paraxiale Näherung und Strahlwellen
- 2. Parameter der Strahlwellen**
3. Weitere Lösungen der paraxialen Helmholtzgleichung
4. Was Sie gelernt haben sollten
5. Anhang
 - Herleitung Laguerre-Gaußsche Moden
 - Herleitung Hermite-Gaußsche Moden

Einsetzen in die paraxiale Helmholtzgleichung

- Einsetzen in die paraxiale Helmholtzgleichung liefert

$$-j 2k \left[\frac{1}{\underline{q}(z)} - j P'(z) \right] + [\underline{q}'(z) - 1] \frac{k^2 \rho^2}{\underline{q}^2(z)} = 0 .$$

- Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$\underline{q}'(z) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{q}(z) = z + \underline{q}_0 \quad \text{und} \quad P'(z) = -j \frac{1}{\underline{q}(z)} \quad \Longrightarrow \quad P(z) = -j \int_0^z \frac{1}{\underline{q}(z')} dz'$$

- Da der Strahlradius $w(z)$ der $\frac{1}{e}$ -Radius ist, muss mit gegebenem $w_0 = w(z = 0)$ gelten, dass

$$\frac{1}{\underline{q}_0} = \frac{1}{R(z = 0)} - j \frac{2}{k w_0^2} .$$

Rayleigh-Länge und Fokus

- Nehmen wir zudem an, dass die Phasenfront bei $z = 0$ eben ist, d.h, $R(z = 0) \rightarrow \infty$, so erhalten wir

$$\frac{1}{\underline{q}_0} = -j \frac{2}{kw_0^2} \implies \underline{q}_0 = j \frac{kw_0^2}{2} = j z_R$$

wobei $z_R = kw_0^2/2$ als *Rayleigh-Länge* bezeichnet wird.

- Damit ergibt sich dann

$$\frac{1}{\underline{q}(z)} = \frac{1}{z + j z_R} = \frac{z}{z^2 + z_R^2} - j \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{2}{kw^2(z)}$$

- Daraus erhalten wir

$$R(z) = \frac{z^2 + z_R^2}{z} = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right) \quad \text{und} \quad w(z) = \sqrt{\frac{2(z^2 + z_R^2)}{kz_R}} = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$$

- Bei der Rayleigh-Länge $z = z_R$ hat sich der Fleck also um den Faktor $\sqrt{2}$ verbreitert.
- Zudem ist der Strahlradius im sogenannten *Fokus* bei $z = 0$ minimal.

Gouy-Phasenverschiebung

- Die weitere z -Abhängigkeit ergibt sich gemäß

$$\begin{aligned}
 \underline{P}(z) &= -j \int_0^z \frac{1}{\underline{q}(z')} dz' = - \int_0^z \frac{z_R}{z'^2 + z_R^2} dz' - j \int_0^z \frac{j z'}{z'^2 + z_R^2} dz' \\
 &= - \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) - j \frac{1}{2} \ln \left(\frac{z_R^2 + z^2}{z_R^2} \right) = - \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) + j \ln \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)
 \end{aligned}$$

- Setzen wir dieses Zwischenergebnis in den Lösungsansatz ein, so erhalten wir als Lösung der paraxialen Helmholtzgleichung

$$\underline{\psi}(\rho, z) = \frac{w_0}{w(z)} \exp \left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) \exp \left(-j \frac{k\rho^2}{2R(z)} \right) \exp \left(j \varphi_G(z) \right)$$

- Dabei wird $\varphi_G(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right)$ als *Gouy-Phasenverschiebung* bezeichnet. Sie hat zur Folge, dass sich das Vorzeichen von $\underline{\psi}$ dreht, nachdem der Strahl seinen Fokuspunkt überschreitet.

Divergenz im Fernfeld

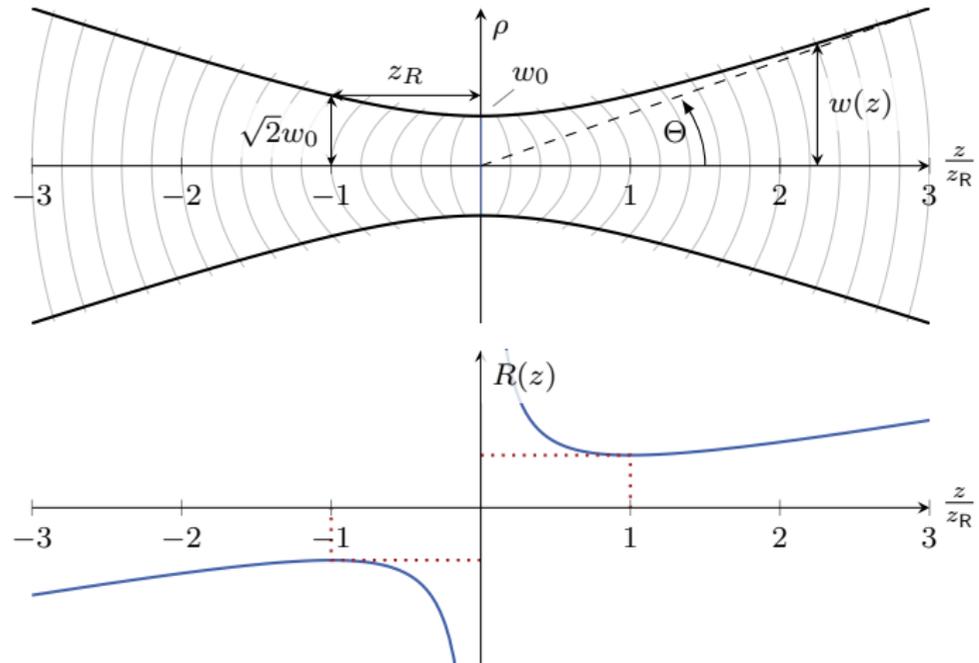
- Im Fernfeld, also für große z , nähert sich $w(z)$ einer Geraden, die mit der Strahlenachse den Divergenzwinkel Θ einschließt:

$$\Theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \arctan \left(\frac{w(z)}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \arctan \left(w_0 \sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z_R^2}} \right) = \arctan \left(\frac{w_0}{z_R} \right) = \arctan \left(\frac{\lambda}{\pi w_0} \right).$$

- Dieser Winkel stellt ein Maß für die Entwicklung der transversalen Strahlausdehnung dar.
- Betrachten wir nun kleine Wellenlängen, d.h. $\lambda \rightarrow 0$, oder Strahlen mit großer transversaler Ausdehnung, d.h. $w_0 \rightarrow \infty$, geht das Argument des Arkustangens gegen 0 und wir erhalten den Fall vernachlässigbarer Strahlaufweitung.
- Diese Erkenntnis ist z.B. relevant für die Datenübertragung vom Mars zur Erde: Da die Strahlaufweitung bei optischen Wellenlängen deutlich geringer ist als bei Mikrowellen, muss im optischen Bereich deutlich weniger Leistung abgestrahlt werden.
- Allerdings erschwert die geringere Divergenz die Ausrichtung von Sender und Empfänger.

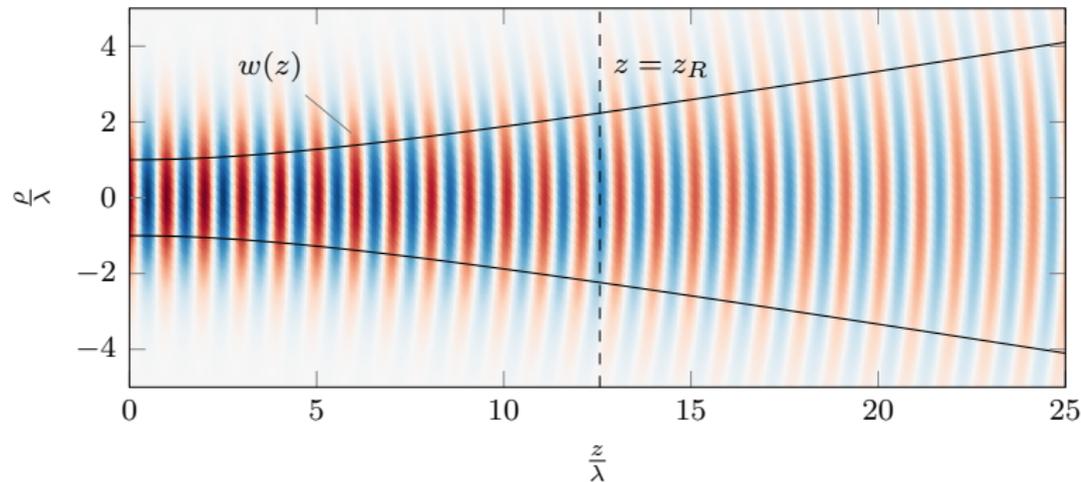
Parameter des Gaußschen Strahls

- Die Abbildung oben visualisiert die Entwicklung der Phasenfronten und des Strahlradius eines Gaußschen Strahls entlang der Ausbreitungsrichtung z .
- Der Divergenzwinkel Θ ist ebenfalls eingezeichnet.
- In der unteren Abbildung ist der Krümmungsradius der Phasenfronten aufgetragen.



Ausbreitung des Gaußschen Strahls

- Die Figur zeigt den Realteil des Gaußschen Strahls $\psi = \Re\{\psi\}$ in einer Ebene $\phi = \text{const}$ mit $z \geq 0$.
- Auch in dieser Darstellung wird deutlich, dass die Phasenfront bei der Ausbreitung für $z < z_R$ zunehmend gekrümmt und anschließend für $z > z_R$ wieder ebener wird.



Vorlesungsinhalte

1. Paraxiale Näherung und Strahlwellen
2. Parameter der Strahlwellen
- 3. Weitere Lösungen der paraxialen Helmholtzgleichung**
4. Was Sie gelernt haben sollten
5. Anhang
 - Herleitung Laguerre-Gaußsche Moden
 - Herleitung Hermite-Gaußsche Moden

Laguerre-Gaußsche Moden (I)

- Indem wir den obigen Lösungsansatz in Zylinderkoordinaten wie folgt erweitern

$$\underline{\psi}(\rho, \phi, z) = \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w} \right)^{|\ell|} f\left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right) \exp\left(-j \left[\frac{k\rho^2}{2\underline{q}(z)} + \underline{P}(z) + \ell\phi \right]\right)$$

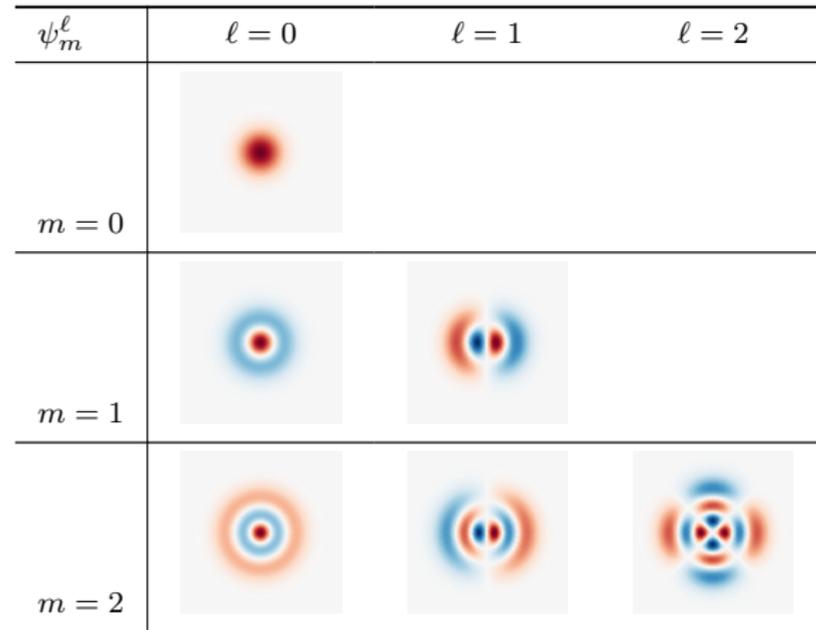
erhalten wir für $m, |\ell| \in \mathbb{N}_0$ und $|\ell| \leq m$ als weitere Lösungen

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_m^\ell(\rho, \phi, z) = \frac{w_0}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w} \right)^{|\ell|} L_m^{|\ell|} \left(\frac{2\rho^2}{w^2} \right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-j \frac{k\rho^2}{2R(z)}\right) \cdot \dots \\ \cdot \exp\left(j(1 + |\ell| + 2m)\varphi_G\right) \exp\left(-j\ell\phi\right) \end{aligned}$$

- Dabei gibt $L_m^{|\ell|}(\cdot)$ das zugeordnete Laguerre Polynom der Ordnung $(m, |\ell|)$ an.
- Der Fall $m = \ell = 0$ entspricht dem zuvor eingeführten Gaußschen Strahl. Er stellt die Grundmode dar.

Laguerre-Gaußsche Moden (II)

- Die Tabelle zeigt die Realteile $\psi_m^\ell = \Re\{\underline{\psi}_m^\ell\}$ der ersten fünf Laguerre-Gaußschen Moden in der Ebene $z = 0$.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.
- Die Abbildungen zeigen, dass ℓ die Anzahl der Perioden auf der azimuthalen Achse und m die Zahl der Nullstellen in radialer Richtung angibt.



Hermite-Gaußsche Moden (I)

- Alternativ können wir den Lösungsansatz auch in kartesischen Koordinaten erweitern zu

$$\underline{\psi}(x, y, z) = g\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) h\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \exp\left\{-j\left(\underline{P} + \frac{k(x^2 + y^2)}{2q}\right)\right\}$$

und erhalten für $\{m, n\} \in \mathbb{N}_0$ und $|\ell| \leq m$ als weitere Lösungen

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_{m,n}(x, y, z) = & \frac{w_0}{w(z)} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right) \cdots \\ & \cdot \exp\left(-j\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)}\right) \exp\left(j\left[1 + \frac{m+n}{2}\right]\varphi_G\right) \end{aligned}$$

- Dabei geben $H_m(\cdot)$ und $H_n(\cdot)$ Hermite Polynome der Ordnungen m bzw. n an.
- Der Fall $m = n = 0$ entspricht dem zuvor eingeführten Gaußschen Strahl. Er stellt die Grundmode dar.

Hermite-Gaußsche Moden (II)

- Die Tabelle zeigt die Realteile $\psi_{m,n} = \Re\{\underline{\psi}_{m,n}\}$ der ersten neun Hermite-Gaußschen Moden in der Ebene $z = 0$.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.
- Die Abbildungen zeigen, dass m die Anzahl der Nullstellen auf der x -Achse und n die Zahl der Nullstellen auf der y -Achse angibt.

$\psi_{m,n}$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$n = 0$			
$n = 1$			
$n = 2$			

Vorlesungsinhalte

1. Paraxiale Näherung und Strahlwellen
2. Parameter der Strahlwellen
3. Weitere Lösungen der paraxialen Helmholtzgleichung
- 4. Was Sie gelernt haben sollten**
5. Anhang
 - Herleitung Laguerre-Gaußsche Moden
 - Herleitung Hermite-Gaußsche Moden

Was Sie gelernt haben sollten

- Weshalb wir den Gaußschen Strahl anstelle von ebenen Wellen oder Kugelwellen betrachten.
- Welche Annahmen der paraxialen Näherung der Helmholtzgleichung zugrunde liegen und wie diese mit der Fresnel-Näherung zusammenhängen.
- Dass der Radius des Gaußschen Strahls im Fokus minimal ist und mit zunehmendem Abstand vom Fokus zunimmt.
- Wie die mathematische Beschreibung der transversalen Feldverteilung des Gaußstrahls die Änderung von Strahlradius und Phasenkrümmung berücksichtigt.
- Dass der Gaußsche Strahl ausschließlich im Fokus eine ebene Phasenfront besitzt.
- Welche Rolle die Gouy-Phasenverschiebung spielt.

Vorlesungsinhalte

1. Paraxiale Näherung und Strahlwellen
2. Parameter der Strahlwellen
3. Weitere Lösungen der paraxialen Helmholtzgleichung
4. Was Sie gelernt haben sollten
- 5. Anhang**
 - Herleitung Laguerre-Gaußsche Moden
 - Herleitung Hermite-Gaußsche Moden

Herleitung Laguerre-Gaußsche Moden (I)

- Paraxiale Helmholtzgleichung in Zylinderkoordinaten:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} - j 2k \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

- Ansatz:

$$\underline{\psi}(\rho, \phi, z) = \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w} \right)^{|\ell|}}_{:=g} f \left(\frac{2\rho^2}{w^2} \right) \underbrace{\exp \left\{ -j \left(\underline{P} + \frac{k\rho^2}{2q} + \ell\phi \right) \right\}}_{:=e}$$

- Zwischenrechnung:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = g \left[\frac{16\rho^2}{w^4} f'' + \left(-j \frac{8k\rho^2}{w^2q} + \frac{8(|\ell|+1)}{w^2} \right) f' + \left(\frac{|\ell|^2}{\rho^2} - j \frac{2(|\ell|+1)k}{q} - \frac{k^2\rho^2}{q^2} \right) f \right] e$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = g \left[\left(-\frac{\ell^2}{\rho^2} \right) f \right] e$$

$$-j 2k \frac{\partial \psi}{\partial z} = g \left[\left(j \frac{8k\rho^2 w'}{w^3} \right) f' + \left(j \frac{\sqrt{2}k|\ell|w'}{\rho w} - 2k\underline{P}' + \frac{k^2\rho^2 q'}{q^2} \right) f \right] e$$

- Einsetzen in die paraxiale Helmholtzgleichung ergibt

$$ge \frac{8}{w^2} \left[\frac{2\rho^2}{w^2} f'' + \left(|\ell| + 1 + j k \rho^2 \left[\frac{w'}{w} - \frac{1}{q} \right] \right) f' + \left(\frac{k w^2}{4} \left(- \left[\underline{P}' + j \frac{1}{q} \right] + j |\ell| \left[\frac{w'}{w} - \frac{1}{q} \right] \right) + \frac{k^2 w^2 \rho^2}{8 q^2} [q' - 1] \right) f \right] = 0$$

Herleitung Laguerre-Gaußsche Moden (II)

- Bedingung für die Erfüllung der paraxialen Helmholtzgleichung

$$\frac{2\rho^2}{w^2} f'' + \left(|\ell| + 1 + j k \rho^2 \left[\frac{w'}{w} - \frac{1}{q} \right] \right) f' + \left(\frac{k w^2}{4} \left(- \left[P' + j \frac{1}{q} \right] + j |\ell| \left[\frac{w'}{w} - \frac{1}{q} \right] \right) + \frac{k^2 w^2 \rho^2}{8 q^2} [q' - 1] \right) f = 0$$

- Mit $\zeta = \frac{2\rho^2}{w^2}$ lässt sich dies separieren in

$$\zeta \frac{d^2 f}{d\zeta^2} + (|\ell| + 1 - \zeta) \frac{df}{d\zeta} + m f = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\zeta) = L_m^{|\ell|}(\zeta) \quad \text{zugeordnetes Laguerre Polynom der Ordnung } (m, |\ell|) \text{ mit } \{m, |\ell|\} \in \mathbb{N}_0 \text{ sowie } |\ell| \leq m$$

- Dafür muss gelten, dass

$$[q' - 1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R} - j \frac{2}{k w^2} = \frac{1}{z + j z_R} \quad \text{und} \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad \text{und} \quad z_R = \frac{k w_0^2}{2}$$

$$\left[\frac{w'}{w} - \frac{1}{q} \right] = j \frac{2}{k w^2} \quad \Rightarrow \quad \text{erfüllt für obige Lösungen für } q(z) \text{ und } w(z)$$

$$\frac{k w^2}{4} \left(- \left[P' + j \frac{1}{q} \right] + j |\ell| \left[\frac{w'}{w} - \frac{1}{q} \right] \right) = \frac{k w^2}{4} \left(- \left[P' + j \frac{1}{q} \right] - |\ell| \frac{2}{k w^2} \right) = m \quad \Rightarrow \quad P' = -j \frac{1}{q} - \frac{2|\ell| + 4m}{k w^2} = -j \frac{z}{z^2 + z_R^2} - (1 + |\ell| + 2m) \frac{z_R}{z^2 + z_R^2}$$

$$\Rightarrow \quad P = j \int_0^z \frac{-z'}{z'^2 + z_R^2} dz' - (1 + |\ell| + 2m) \int_0^z \frac{z_R}{z'^2 + z_R^2} dz' = j \ln \left(\sqrt{\frac{z_R^2}{z^2 + z_R^2}} \right) - (1 + |\ell| + 2m) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) = j \ln \left(\frac{w_0}{w(z)} \right) - (1 + |\ell| + 2m) \phi_G$$

- Damit erhalten wir als Lösung

$$\underline{\psi}_{m,\ell}(\rho, \phi, z) = \frac{w_0}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w} \right)^{|\ell|} L_m^{|\ell|} \left(\frac{2\rho^2}{w^2} \right) \exp \left(- \frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) \exp \left(- j k \frac{\rho^2}{2R(z)} \right) \exp \left(j(1 + |\ell| + 2m) \phi_G \right) \exp \left(- j \ell \phi \right)$$

Herleitung Hermite-Gaußsche Moden (I)

- Paraxiale Helmholtzgleichung in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial y^2} - j 2k \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial z} = 0$$

- Ansatz:

$$\underline{\psi}(x, y, z) = g \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) h \left(\frac{\sqrt{2}y}{w} \right) \underbrace{\exp \left\{ -j \left(P + \frac{k(x^2 + y^2)}{2q} \right) \right\}}_{:=e}$$

- Zwischenrechnung:

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2} = \left[\frac{2}{w^2} g'' - j \frac{k}{q} g - j \frac{2\sqrt{2}kx}{qw} g' - \frac{k^2 x^2}{q^2} g \right] h e$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial y^2} = g \left[\frac{2}{w^2} h'' - j \frac{k}{q} h - j \frac{2\sqrt{2}ky}{qw} h' - \frac{k^2 y^2}{q^2} h \right] e$$

$$-j 2k \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial z} = \left[j \frac{2\sqrt{2}kxw'}{w^2} g' + \frac{k^2 x^2 q'}{q^2} g \right] h e + g \left[j \frac{2\sqrt{2}kyw'}{w^2} h' + \frac{k^2 y^2 q'}{q^2} h \right] e - 2k P' g h e$$

- Einsetzen in die paraxiale Helmholtzgleichung ergibt mit $\underline{P}' = \underline{P}'_x + \underline{P}'_y$:

$$\frac{2}{w^2} \left(g'' + j \sqrt{2} k w x \left[\frac{w'}{w} - \frac{1}{q} \right] g' + \frac{k w^2}{2} \left(\frac{x^2}{q^2} [q' - 1] - \left[2 \underline{P}'_x + j \frac{1}{q} \right] \right) g \right) h e + g \frac{2}{w^2} \left(h'' + j \sqrt{2} k w y \left[\frac{w'}{w} - \frac{1}{q} \right] h' + \frac{k w^2}{2} \left(\frac{y^2}{q^2} [q' - 1] - \left[2 \underline{P}'_y + j \frac{1}{q} \right] \right) h \right) e = 0$$

Herleitung Hermite-Gaußsche Moden (II)

- Bedingung für die Erfüllung der paraxialen Helmholtzgleichung

$$\left(g'' + j\sqrt{2}kwx \left[\frac{w'}{w} - \frac{1}{q} \right] g' + \frac{kw^2}{2} \left(\frac{x^2}{q^2} [q' - 1] - \left[\frac{2P'_x}{q} + j \frac{1}{q} \right] \right) g \right) h + g \left(h'' + j\sqrt{2}kwy \left[\frac{w'}{w} - \frac{1}{q} \right] h' + \frac{kw^2}{2} \left(\frac{y^2}{q^2} [q' - 1] - \left[\frac{2P'_y}{q} + j \frac{1}{q} \right] \right) h \right) = 0$$

- Mit $\zeta_x = \frac{\sqrt{2}x}{w}$ und $\zeta_y = \frac{\sqrt{2}y}{w}$ lässt sich dies separieren in

$$\frac{d^2g}{d\zeta_x^2} - 2\zeta_x \frac{dg}{d\zeta_x} + mg = 0 \quad \implies \quad g(\zeta_x) = H_m(\zeta_x) \quad (\text{Hermite Polynom der Ordnung } m \in \mathbb{N}_0)$$

$$\frac{d^2h}{d\zeta_y^2} - 2\zeta_y \frac{dh}{d\zeta_y} + nh = 0 \quad \implies \quad h(\zeta_y) = H_n(\zeta_y) \quad (\text{Hermite Polynom der Ordnung } n \in \mathbb{N}_0)$$

- Dafür muss gelten, dass

$$[q' - 1] = 0 \quad \implies \quad \frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R} - j \frac{2}{kw^2} = \frac{1}{z + jz_R} \quad \text{und} \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad \text{und} \quad z_R = \frac{kw_0^2}{2}$$

$$\left[\frac{w'}{w} - \frac{1}{q} \right] = j \frac{2}{kw^2} \quad \implies \quad \text{erfüllt für obige Lösungen für } q(z) \text{ und } w(z)$$

$$\left[\frac{2P'_x}{q} + j \frac{1}{q} \right] = -\frac{2m}{kw^2} \quad \text{und} \quad \left[\frac{2P'_y}{q} + j \frac{1}{q} \right] = -\frac{2n}{kw^2} \quad \implies \quad P_x(z) = j \ln \left(\sqrt{\frac{w_0}{w(z)}} \right) - \frac{1+m}{2} \phi_{\mathbf{g}} \quad \text{und} \quad P_y(z) = j \ln \left(\sqrt{\frac{w_0}{w(z)}} \right) - \frac{1+n}{2} \phi_{\mathbf{g}}$$

- Damit erhalten wir als Lösung

$$\underline{\psi}(x, y, z) = \frac{w_0}{w(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w} \right) \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right) \exp \left(-j \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right) \exp \left(j \left[1 + \frac{m+n}{2} \right] \phi_{\mathbf{g}} \right)$$

Literatur

- [1] Ariana Tantillo. *Communications system achieves fastest laser link from space yet*. 2022. URL: <https://news.mit.edu/2022/communications-system-achieves-fastest-laser-link-space-yet-1130> (besucht am 13. 12. 2022).