

Vorlesung 09: Optische Systeme

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2022/23

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 22. Dezember 2022



Einführung

- In Vorlesung 07 und 08 haben wir festgestellt, dass elektromagnetische Wellen mit endlicher transversaler Ausdehnung aufgrund des Phänomens Beugung einer Aufweitung unterliegen.
- In vielen (insbesondere optischen) Anwendungen sind wir jedoch darauf angewiesen, die Ausdehnung der elektromagnetischen Wellen zu beeinflussen.
- Zu diesem Zweck kommen in der Praxis meist Linsen zum Einsatz, weshalb wir uns in dieser Vorlesung mit diesen Elementen befassen möchten.

Räumliche Fouriertransformation

- Die zweidimensionale räumliche Fouriertransformation einer Funktion $f(x, y)$ sei analog zu Vorlesung 07 definiert als

$$F(\xi, \nu) = \mathcal{F} \{f(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-j 2\pi(\xi x + \nu y)) \, dx \, dy ,$$

wobei ξ und ν als Raumfrequenzen bezeichnet werden.

- Die dazugehörige inverse Fouriertransformation wird dementsprechend zu

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{F(\xi, \nu)\} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \nu) \exp(j 2\pi(\xi x + \nu y)) \, d\xi \, d\nu$$

Vorlesungsinhalte

1. Linsen

2. Einfluss von Linsen auf die Wellenausbreitung

3. Geometrische Optik

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

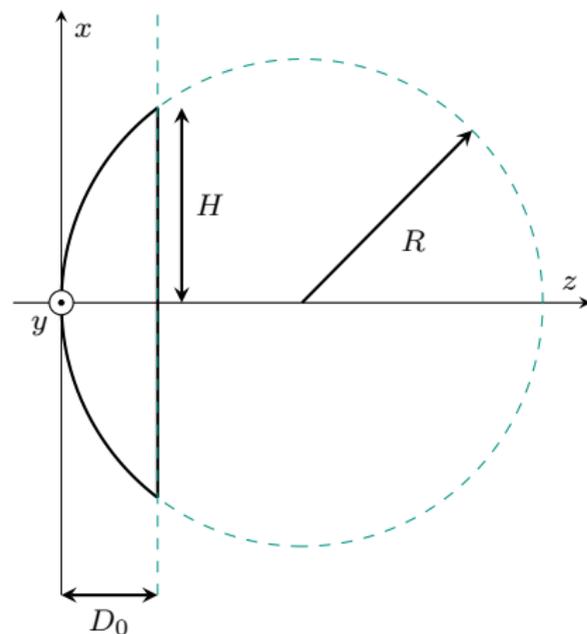
Sphärische Linsen (I)

- Betrachten wir eine runde konkave sphärische Linse deren optischen Achse gerade die z -Achse ist (siehe Abbildung).
- Mit der Linsenhöhe $H \leq R$ hat die Linse auf der optischen Achse die Dicke

$$D_0 = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{H}{R}\right)^2}$$

- Abhängig vom Radius $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ können wir ihre Dicke beschreiben durch die Funktion

$$D_S(\rho) = \begin{cases} D_0 - R + R\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2} & \forall \rho \leq H \\ 0 & \forall \rho > H \end{cases}$$



Sphärische Linsen (II)

- Wir können die Wurzelfunktion wie bei der Fresnel-Näherung in eine Taylorreihe entwickeln gemäß

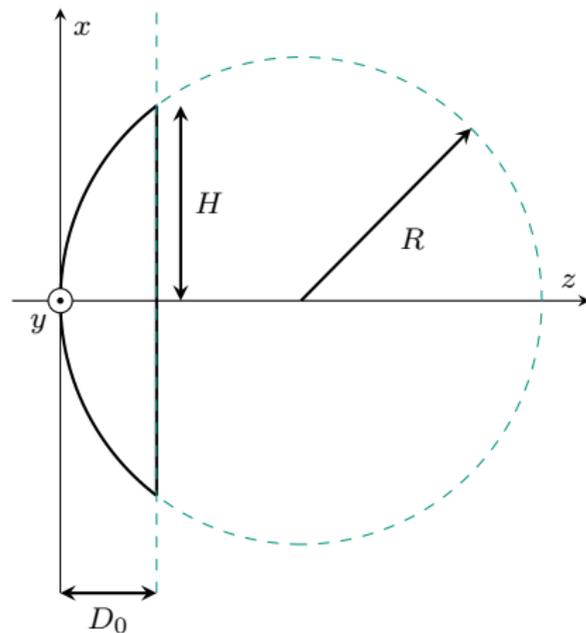
$$\sqrt{1 - \alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^3}{16} - \dots$$

- Damit wird die Dicke der sphärischen Linse zu

$$D_S(\rho) = \begin{cases} D_0 - \frac{\rho^2}{2R} - \epsilon(\rho) & \forall \rho \leq H \\ 0 & \forall \rho > H \end{cases}$$

mit

$$\epsilon(\rho) = \frac{\rho^4}{8R^3} + \frac{\rho^6}{16R^5} + \dots$$



Parabolische Linsen

- Mit der Linsenhöhe H und dem Krümmungsradius R bezogen auf $\rho = 0$ ist die Dicke auf der optischen Achse

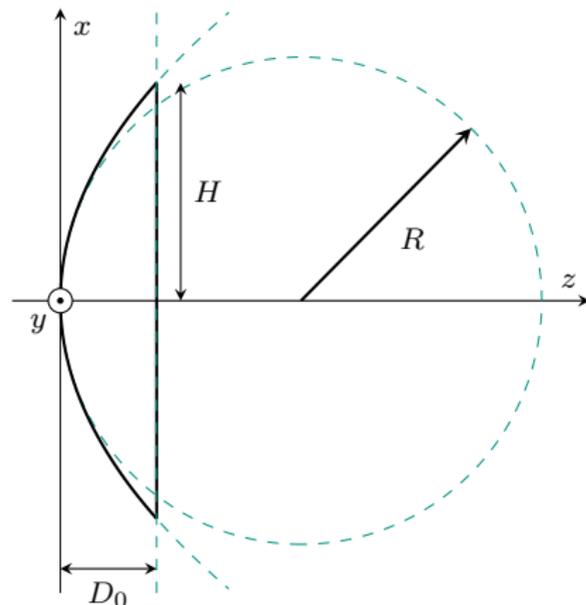
$$D_0 = \frac{H^2}{2R}.$$

- Damit wird die Dicke der parabolischen Linse

$$D_P(\rho) = \begin{cases} D_0 - \frac{\rho^2}{2R} & \forall \rho \leq H \\ 0 & \forall \rho > H \end{cases}$$

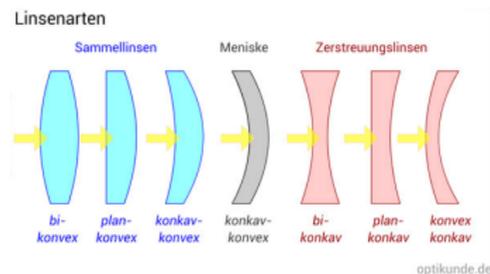
- Die Dicke der parabolischen Linse unterscheidet sich für $\rho \leq H$ von der der sphärischen Linse gemäß

$$D_P(\rho) = D_S(\rho) + \epsilon(\rho) \stackrel{\rho \ll R}{\approx} D_S(\rho)$$



Arten von Linsen (I)

- In der Praxis werden unterschiedliche Arten von Linsen verwendet, wobei wir Sammell-, Streu- und Meniskuslinsen unterscheiden. Diese bestehen aus einem Material mit der Brechzahl n , z.B. aus Glas mit $n \approx 1,5$ und sind üblicherweise von Luft bzw. Vakuum mit $n \approx 1$ umgeben.
- Die Linsen haben eine gewölbte Vorderseite mit dem Krümmungsradius $|R_1|$ und eine gewölbte Rückseite mit dem Krümmungsradius $|R_2|$. Dazwischen befindet sich häufig eine Platte mit der Dicke d .
- Für von links nach rechts laufendes Licht wählen wir für linksgewölbte Flächen R positiv, für rechtsgewölbte negativ.



Arten von Linsen (II)

- Die longitudinale Ausdehnung einer Linse beginne in der Einfallsebene bei $z = z_1$ und ende in der Ausfallsebene bei $z = z_2 = z_1 + \Delta z$ mit der maximalen Dicke Δz .
- Im Folgenden bezeichnen wir mit D_0 die Ausdehnung der gesamten Linse auf der optischen Achse.
- Betrachten wir eine bikonvexe Linse der Höhe H mit $R_1 > 0$ und $R_2 < 0$ mit parabolischen Wölbungen, so erhalten wir für deren Dicke auf der optischen Achse, d.h. für $\rho = 0$

$$D_0 = d + \frac{H^2}{2R_1} - \frac{H^2}{2R_2} = \Delta z$$

und dementsprechend für $\rho \leq H$

$$D_{\text{bikonvex}}(\rho \leq H) = \frac{H^2}{2R_1} - \frac{\rho^2}{2R_1} + d + \left(-\frac{H^2}{2R_2} + \frac{\rho^2}{2R_2} \right) = D_0 - \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Arten von Linsen (III)

- Analog erhalten wir für eine bikonkave Linse mit $R_1 < 0$ und $R_2 > 0$ auf der optischen Achse, d.h. für $\rho = 0$ lediglich

$$D_0 = d = \Delta z + \frac{H^2}{2R_1} - \frac{H^2}{2R_2}$$

und dementsprechend für $\rho \leq H$

$$D_{\text{bikonkav}}(\rho \leq H) = -\frac{\rho^2}{2R_1} + d + \frac{\rho^2}{2R_2} = D_0 - \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

- Offenbar haben die Funktionen, welche die Dicken der Linsentypen beschreiben, die gleiche Form.
- Mit den Grenzfällen $R_1 \rightarrow \infty$ bzw. $R_2 \rightarrow \infty$ können wir zudem den Fall einer plankonvexen oder plankonkaven Linse ableiten.
- Es lässt sich zeigen, dass die Dicke aller in der [Abbildung](#) gezeigten Linsentypen für parabolische Flächen bei geeigneter Vorzeichenwahl von R_1 und R_2 die gleiche Form aufweisen.

Dünne Linsen

- Häufig werden sogenannte *dünne Linsen* angenommen, innerhalb derer Strahlablenkungen durch Brechung an den Materialgrenzflächen und durch Beugung vernachlässigbar sind.
- Betrachten wir eine solche dünne Linse mit der maximalen Dicke Δz , dem Dickenprofil $D(x, y)$ und der Brechzahl n .
- Durchläuft eine elektromagnetische Welle, welche sich parallel zur optischen Achse ausbreitet, diese Linse, erfährt sie folglich nur eine Phasenverschiebung um $nk_0 D(x, y) + k_0(\Delta z - D(x, y))$.
- Der erste Summand beschreibt die Phasenverschiebung innerhalb, der zweite außerhalb der Linse.
- Für $x^2 + y^2 > H^2$ nehmen wir einen undurchlässigen Schirm mit der Aperturfunktion $P(x, y)$ an.
- Kennen wir die Feldverteilung $\underline{U}(x, y, z_1)$ in der Einfallsebene $z = z_1$, so können wir die Feldverteilung in der Ausfallsebene $z = z_2 = z_1 + \Delta z$ in kartesischen Koordinaten berechnen als

$$\underline{U}(x, y, z_2) = \underline{U}(x, y, z_1) P(x, y) \exp\left(-j k_0 \left[\overbrace{nD(x, y)}^{\text{Medium}} + \overbrace{\Delta z - D(x, y)}^{\text{Vakuum}} \right]\right).$$

Brennweite

- Im Fall von parabolischen Wölbungen erhalten wir mit $s = (n - 1)D_0 + \Delta z$

$$\underline{U}(x, y, z_2) = \underline{U}(x, y, z_1)P(x, y) \exp(-j k_0 s) \exp\left(j \frac{k_0}{2f} (x^2 + y^2)\right).$$

- Wobei mit f^1 die *Brennweite* der Linse definiert ist gemäß

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

- Bi- und plankonvexe Linsen haben demzufolge eine positive Brennweite, bi- und plankonkave Linsen hingegen eine negative Brennweite.

¹Achtung, nicht mit der Frequenz verwechseln!

Vorlesungsinhalte

1. Linsen

2. Einfluss von Linsen auf die Wellenausbreitung

3. Geometrische Optik

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

Fresnelsches Beugungsintegral (I)

- Um zu verstehen wie sich die Welle nach der Linse ausbreitet, können wir für ausreichend große Abstände von der Linse das Fresnelsche Beugungsintegral verwenden.
- Dieses hatten wir mithilfe der Fresnelschen Näherung aus dem Kirchhoffschen Beugungsintegral hergeleitet.
- Im Gegensatz zu Vorlesung 07 ist nun jedoch die Ausgangsebene nicht $z = 0$ sondern $z = z_2$, weshalb wir das Fresnelsche Beugungsintegral folgendermaßen formulieren

$$\underline{U}(x, y, z > z_2) = \frac{j}{\lambda(z - z_2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(x', y', z_2) \exp\left(-j k_0 \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2(z - z_2)}\right) dx' dy',$$

wobei $\underline{U}(x', y', z_2)$ die komplexe Amplitude in der Ausfallsebene der Linse bezeichnet.

Fresnelsches Beugungsintegral (II)

- Fällt eine ebene Welle mit der komplexen Amplitude $\underline{U}(x, y, z) = \underline{U}_0 \exp(-j k_0 z)$ auf eine Linse mit der Brennweite f , so erhalten wir mit $\underline{U}'_0 = \underline{U}_0 \exp(-j k_0(z_2 + s))$

$$\underline{U}(x, y, z_2) = \underline{U}'_0 P(x, y) \exp\left(j \frac{k_0}{2f} (x^2 + y^2)\right)$$

- Für $z > z_2$ erhalten wir damit für die Welle hinter der Linse

$$\begin{aligned} \underline{U}(x, y, z) &= \frac{j \underline{U}'_0}{\lambda(z - z_2)} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp\left(j k_0 \frac{x'^2 + y'^2}{2f} - j k_0 \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2(z - z_2)}\right) dx' dy' \\ &= \frac{j \underline{U}'_0}{\lambda(z - z_2)} \exp\left(-j k_0 \frac{x^2 + y^2}{2(z - z_2)}\right) \cdot \dots \\ &\dots \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp\left(j \frac{k_0}{2} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z - z_2}\right) (x'^2 + y'^2)\right) \exp\left(j k_0 \frac{xx' + yy'}{z - z_2}\right) dx' dy' \end{aligned}$$

Sammellinse (I)

- Betrachten wir zunächst eine Linse mit positiver Brennweite f . Im Abstand f von der Ausfallsebene, d.h. für den Fall $z = z_2 + f$, erhalten wir

$$\underline{U}(x, y, z = z_2 + f) = \frac{j \underline{U}'_0}{\lambda f} \exp\left(-j k_0 \frac{x^2 + y^2}{2f}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} P(x', y') \exp\left(j k_0 \frac{xx' + yy'}{f}\right) dx' dy'$$

- Der darin enthaltene Integralterm lässt sich mit den Raumfrequenzen

$$\xi = -\frac{k_0 x}{2\pi f} = -\frac{x}{\lambda f} \quad \text{und} \quad v = -\frac{k_0 y}{2\pi f} = -\frac{y}{\lambda f}$$

darstellen (vergleiche Übung 06) als

$$\iint_{-\infty}^{\infty} P(x', y') \exp(-j 2\pi (\xi x' + v y')) dx' dy' = \mathcal{F}\{P(x', y')\} \Bigg|_{\substack{\xi = -x/\lambda f \\ v = -y/\lambda f}}$$

Sammellinse (II)

- Dieses Integral entspricht gerade der räumlichen Fouriertransformation der normierten Aperturfunktion.
- Wir erhalten also für die Feldverteilung im Abstand der Brennweite von der Ausfallsebene

$$\underline{U}(x, y, z = z_2 + f) = \frac{j \underline{U}'_0}{\lambda f} \exp\left(-j k_0 \frac{x^2 + y^2}{2f}\right) \mathcal{F}\{P(x', y')\} \Big|_{\substack{\xi = -x/\lambda f \\ v = -y/\lambda f}}$$

- Für den Fall einer großen Linse mit $H \rightarrow \infty$ gilt stets $P(x, y) = 1$.
- Mit dem zweidimensionalen Dirac-Impuls $\delta(x, y) = \delta(x) \delta(y)$ erhalten wir für die Fouriertransformation

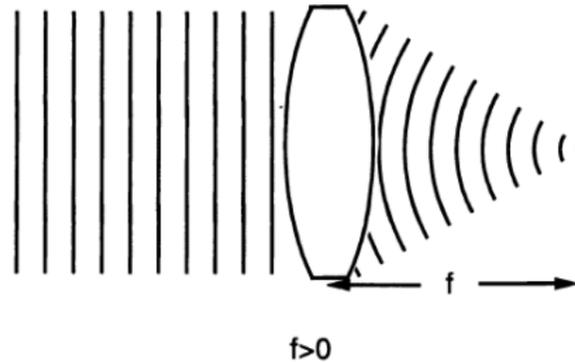
$$\mathcal{F}\{P(x', y')\} \Big|_{\substack{\xi = -x/\lambda f \\ v = -y/\lambda f}} = \mathcal{F}\{1\} \Big|_{\substack{\xi = -x/\lambda f \\ v = -y/\lambda f}} = \delta(\xi, v) \Big|_{\substack{\xi = -x/\lambda f \\ v = -y/\lambda f}} = \lambda^2 f^2 \delta(x, y)$$

und damit für die Feldverteilung im Fokus:

$$\underline{U}(x, y, z_2 + f) = j \underline{U}'_0 \lambda f \exp\left(-j k_0 \frac{x^2 + y^2}{2f}\right) \delta(x, y) = j \underline{U}'_0 \lambda f \delta(x, y)$$

Sammellinse (III)

- Dies bedeutet, dass die ebene Welle auf einen infinitesimalen Fleck fokussiert wird, weshalb wir von einer Sammellinse sprechen.
- Die Brennweite f gibt dann gerade den Abstand der Linse zu diesem Fleck an.



Bildquelle (Goodman 2005).

Sammellinse - Endliche Ausdehnung (I)

- Betrachten wir eine Linse mit endlicher Höhe H , gilt

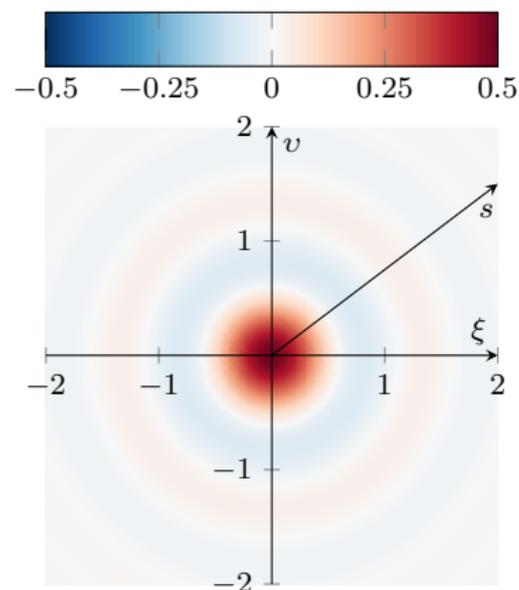
$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \forall \quad x^2 + y^2 \leq H^2 \\ 0 & \forall \quad x^2 + y^2 > H^2 \end{cases}$$

- Die räumliche Fouriertransformation dieser endlichen kreisförmigen Apertur wird nun mit $s = \sqrt{\xi^2 + v^2}$ zu

$$\mathcal{F}\{P(x, y)\} = H \frac{J_1(2\pi H s)}{s} = 2\pi H^2 \text{jinc}(2\pi H s),$$

wobei $J_1(\cdot)$ die Besselfunktion erster Gattung und Ordnung bezeichnet (Herleitung s. Anhang S. 34f.).

- Die Abbildung zeigt die jinc-Funktion $\text{jinc}(2\pi s)$.



Sammellinse - Endliche Ausdehnung (II)

- Somit erhalten wir unter Einfall einer ebenen Welle mit $\xi = -\frac{x}{\lambda f}$, $v = -\frac{y}{\lambda f}$ und $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ im sogenannten Brennpunkt $z = z_2 + f$ die komplexe Amplitude

$$\underline{U}(x, y, z_2 + f) = j \underline{U}'_0 H \exp\left(-j k_0 \frac{\rho^2}{2f}\right) \frac{J_1\left(k_0 \frac{H}{f} \rho\right)}{\rho} = j \underline{U}'_0 \frac{k_0 H^2}{f} \exp\left(-j k_0 \frac{\rho^2}{2f}\right) \text{jinc}\left(k_0 \frac{H}{f} \rho\right).$$

- Für endlich ausgedehnte Linsen lässt sich der Fleck also nicht beliebig klein fokussieren, sondern wir beobachten sogenannte Beugungsscheibchen.
- Der Radius des innersten Rings bestimmt die kleinstmögliche Fleckgröße hinter der Linse.
- Dieser Ring befindet sich bei der ersten Nullstelle von J_1 , weshalb wir folgende Beziehung erhalten

$$k_0 \frac{H}{f} \rho = j_{1,1} \approx 3,8317 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho \approx 1,22 \frac{\lambda f}{2H}.$$

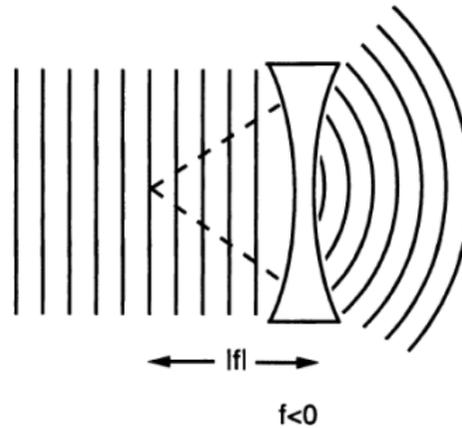
Streulinse (I)

- Betrachten wir nun eine Linse mit negativer Brennweite $f = -|f|$.
- Analog zur obigen Betrachtung können wir für eine unendlich ausgedehnte Linse mit $H \rightarrow \infty$ schreiben

$$\underline{U}(x, y, z_2 - |f|) = j \underline{U}'_0 \lambda f \delta(x, y)$$

- Auf den ersten Blick problematisch wirkt hier die Tatsache, dass der Brennpunkt nun vor der Ausfallsebene liegt, wo das Beugungsintegral nicht gültig ist.
- Allerdings kann der obige Fleck bei $z = z_2 - |f|$ als virtuelle Quelle einer Kugelwelle betrachtet werden, welche sich für $z > z_2$ ausbreitet.
- Der Betrag der Brennweite $|f|$ gibt dann gerade den Abstand der Linse zu dieser Quelle an.

Streulinse (II)



Bildquelle (Goodman 2005).

Vorlesungsinhalte

1. Linsen
2. Einfluss von Linsen auf die Wellenausbreitung
- 3. Geometrische Optik**
4. Was Sie gelernt haben sollten
5. Anhang

Strahlenoptik

- Die geometrische Optik oder auch Strahlenoptik beschreibt die Ausbreitung von Licht durch Lichtstrahlen.
- Diese Näherung einer elektromagnetischen Welle als infinitesimal dünne Linie gilt allerdings nur näherungsweise für $\lambda \rightarrow 0$ oder sehr kurze Distanzen, für welche die Strahlaufweitung vernachlässigbar ist.
- Diese vereinfachte Darstellung erlaubt es, technische optische Elemente wie Linsen, Prismen, Spiegel etc. mathematisch einfach zu beschreiben und zu modellieren.
- Ein Lichtstrahl an der Stelle z kann demnach einzig durch seinen Abstand $x(z)$ und seine Steigung gegenüber der optischen Achse (der Ausbreitungsrichtung) $\tan(\theta)$ (bzw. dem Winkel θ) beschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} x(z) \\ \tan(\theta) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x(z) \\ \theta \end{pmatrix} .$$

- Nehmen wir die Gültigkeit der paraxialen Näherung an, ist die Steigung des Lichtstrahls klein und der Tangens lässt sich gemäß $\tan \theta \approx \theta$ annähern.

ABCD Matrix Formalismus (I)

- Mit dieser Beschreibung des Lichtstrahls können wir ein optisches Element (z.B. eine Linse) durch eine Matrix \mathbf{M} beschreiben, welche einen einlaufenden Strahl in einen auslaufenden Strahl transformiert.
- Es gilt

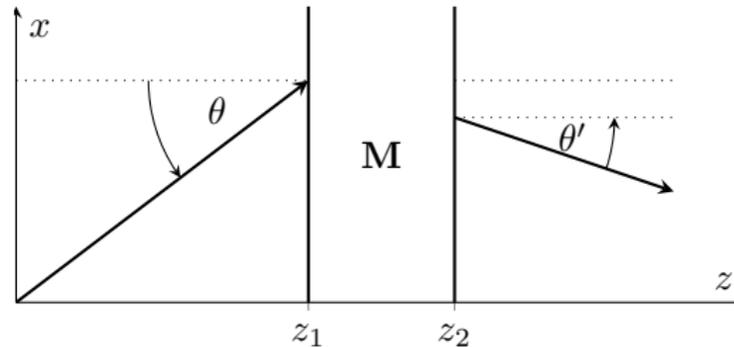
$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}\mathbf{r}_1$$

- Dabei sind die reellwertigen Koeffizienten

$$A = \left. \frac{x_2}{x_1} \right|_{\theta_1=0}, \quad B = \left. \frac{x_1}{\theta_1} \right|_{x_1=0}, \quad C = \left. \frac{\theta_2}{x_1} \right|_{\theta_1=0} \quad \text{und} \quad D = \left. \frac{\theta_2}{\theta_1} \right|_{x_1=0}.$$

- Aufgrund ihrer Form werden solche Matrizen auch als ABCD-Matrizen bezeichnet.

ABCD Matrix Formalismus (II)



- Eine Aneinanderreihung von N optischen Systemen lässt sich dann einfach durch eine Linksmultiplikation der einzelnen Matrizen beschreiben:

$$\mathbf{M}_{\text{total}} = \prod_{i=1}^N \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_N \cdot \dots \cdot \mathbf{M}_1 .$$

- Dies erlaubt eine vergleichsweise einfache Berechnung komplexerer optischer Systeme.

ABCD Matrizen optischer Elemente (I)

Tabelle 1: ABCD-Matrizen ausgewählter optischer Elemente. Es gelte $R > 0$ für konvexe Flächen bei denen der Mittelpunkt des zugehörigen Krümmungskreises hinter der Grenzfläche liegt.

Optisches Element	ABCD-Matrix	Anmerkungen
Ausbreitung in homogenem Medium	$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Zurückgelegte Strecke L
Brechung an ebener Grenzfläche	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$	Initiales bzw. finales Medium mit Brechzahl n_1 bzw. n_2
Brechung an sphärischer Grenzfläche	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$	Initiales bzw. finales Medium mit Brechzahl n_1 bzw. n_2 , Krümmungsradius R

ABCD Matrizen optischer Elemente (II)

Tabelle 1: ABCD-Matrizen ausgewählter optischer Elemente. Es gelte $R > 0$ für konvexe Flächen bei denen der Mittelpunkt des zugehörigen Krümmungskreises hinter der Grenzfläche liegt. (Fortsetzung)

Optisches Element	ABCD-Matrix	Anmerkungen
Reflexion an ebenem Spiegel	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Reflexion an sphärischem Spiegel	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$	Krümmungsradius R
Dünne Linse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$	Brennweite f

ABCD Matrizen für Gaußsche Strahlen (I)

- Die Verwendung der Matrizenoptik ist nicht nur auf die Strahlenoptik beschränkt, sondern lässt sich auch auf den Gaußschen Strahl anwenden.
- Ein Gaußscher Strahl kann durch den komplexen Strahlparameter $\underline{q}(z)$ charakterisiert werden. Es gilt

$$\frac{1}{\underline{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{2}{kw^2(z)}.$$

- Trifft nun ein Gaußscher Strahl auf ein optisches Element, so kann mit $\underline{q}(z_1)$ der komplexe Strahlparameter $\underline{q}(z_2)$ in der Ausfallsebene des Elements berechnet werden

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_2 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q}_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Dabei stellt der Faktor a sicher, dass das zweite Element am Ausgang zu 1 wird.

ABCD Matrizen für Gaußsche Strahlen (II)

- Betrachten wir die beiden Vektorelemente separat erhalten wir

$$\underline{q}_2 = a(A\underline{q}_1 + B) \qquad 1 = a(C\underline{q}_1 + D).$$

- Für $a = (C\underline{q}_1 + D)^{-1}$ ist die zweite Gleichung erfüllt und wir erhalten durch Einsetzen von a

$$\underline{q}_2 = \frac{A\underline{q}_1 + B}{C\underline{q}_1 + D}.$$

- Alternativ lässt sich schreiben

$$\frac{1}{\underline{q}_2} = \frac{C + D\frac{1}{\underline{q}_1}}{A + B\frac{1}{\underline{q}_1}}.$$

Vorlesungsinhalte

1. Linsen
2. Einfluss von Linsen auf die Wellenausbreitung
3. Geometrische Optik
- 4. Was Sie gelernt haben sollten**
5. Anhang

Was Sie gelernt haben sollten

- Wozu wir Linsen verwenden und welche verschiedenen Typen existieren.
- Worin die Unterschiede zwischen sphärischen und parabolischen Linsen bestehen.
- Was eine dünne Linse ausmacht und weshalb wir diese Vereinfachung treffen.
- Weshalb Sammellinsen einfallende Wellen fokussieren bzw. defokussieren und welche Rolle dabei die Brennweite spielt.
- Wie sich die endliche transversale Ausdehnung einer Sammellinse auf die Fleckgröße im Fokus auswirkt.
- Unter welchen Bedingungen wir statt der Wellen- bzw. Strahlenoptik die geometrische Optik verwenden können.
- Welche Bedeutung die Matrixelemente der ABCD-Matrizen haben.
- Wie wir ABCD-Matrizen auch für Strahlwellen verwenden können.

Vorlesungsinhalte

1. Linsen
2. Einfluss von Linsen auf die Wellenausbreitung
3. Geometrische Optik
4. Was Sie gelernt haben sollten
- 5. Anhang**

Fouriertransformation kreisförmige Apertur (I)

- Wir betrachten eine Funktion der Form

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 \leq H^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

- Um ihre Fouriertransformation zu ermitteln, gehen wir im Orts- bzw. Ortsfrequenzbereich zu Polarkoordinaten $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ bzw. $\xi = s \cos \sigma$ und $v = s \sin \sigma$ über

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{P(x, y)\} &= \iint_{-\infty}^{\infty} P(x', y') \exp(-j 2\pi(\xi x' + v y')) \, dx' \, dy' \\ &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \exp(-j 2\pi \rho s \underbrace{(\cos \sigma \cos \varphi + \sin \sigma \sin \varphi)}_{\cos(\sigma - \varphi)}) \rho \, d\varphi \, d\rho \\ &= \int_0^H \rho \int_0^{2\pi} \exp(-j 2\pi \rho s \cos(\sigma - \varphi)) \, d\varphi \, d\rho . \end{aligned}$$

Fouriertransformation kreisförmige Apertur (II)

- Aufgrund der Periodizität des Integranden des inneren Integrals gilt

$$\int_0^{2\pi} \exp(-j 2\pi \rho s \cos(\sigma - \varphi)) \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \exp(-j 2\pi \rho s \cos(\alpha)) \, d\alpha = 2\pi J_0(2\pi \rho s).$$

- Einsetzen liefert dann (Olver u. a. 2010, S. 240)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{P(x, y)\} &= 2\pi \int_0^H J_0(2\pi \rho s) \rho \, d\rho = \frac{2\pi}{(2\pi s)^2} \int_0^{2\pi s H} J_0(x) x \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi s^2} \left[J_1(x) x \right]_{x=0}^{2\pi s H} = H \frac{J_1(2\pi s H)}{s}, \end{aligned}$$

wobei $s = \sqrt{\xi^2 + \nu^2}$ als Betrag des Ortsfrequenzvektors verstanden werden kann.

Literatur

- [1] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier optics*. 3. Aufl. Englewood, Colo: Roberts & Co, 2005.
- [2] Frank W. J. Olver u. a., Hrsg. *NIST handbook of mathematical functions*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2010.