

# Vorlesung 10: Parallelplattenleitung

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2022/23

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 10. Januar 2023



# Vorlesungsinhalte

1. Grenzflächenbedingungen am idealen Leiter

2. Reflexion am idealen Leiter

3. Parallelplattenleitung

4. Was Sie gelernt haben sollten

- In dieser Vorlesung untersuchen wir das Verhalten elektromagnetischer Wellen am idealen Leiter, um die Wellenausbreitung im *Parallelplattenleiter* zu verstehen.
- Der Parallelplattenleiter ist ein theoretisches Konstrukt, das einen Wellenleiter bezeichnet, der aus zwei unendlich ausgedehnten, parallel angeordneten ideal leitenden Platten besteht.
- Dieses Konstrukt bildet die Grundlage für das Verständnis metallischer Hohlleiter, wie sie in der Hochfrequenztechnik Anwendung finden.
- Zunächst wiederholen wir daher das Verhalten elektromagnetischer Wellen an Grenzflächen.
- Im nächsten Schritt betrachten wir die Feldverteilungen, die durch Überlagerung der auf den Leiter einfallenden und am Leiter reflektieren Wellen entstehen.
- Auf dieser Grundlage können wir schließlich die Funktionsweise des Parallelplattenleiters verstehen.
- Abschließend untersuchen wir die Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungskonstante der Wellen im Parallelplattenleiter und die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit.

# Vorlesungsinhalte

1. Grenzflächenbedingungen am idealen Leiter

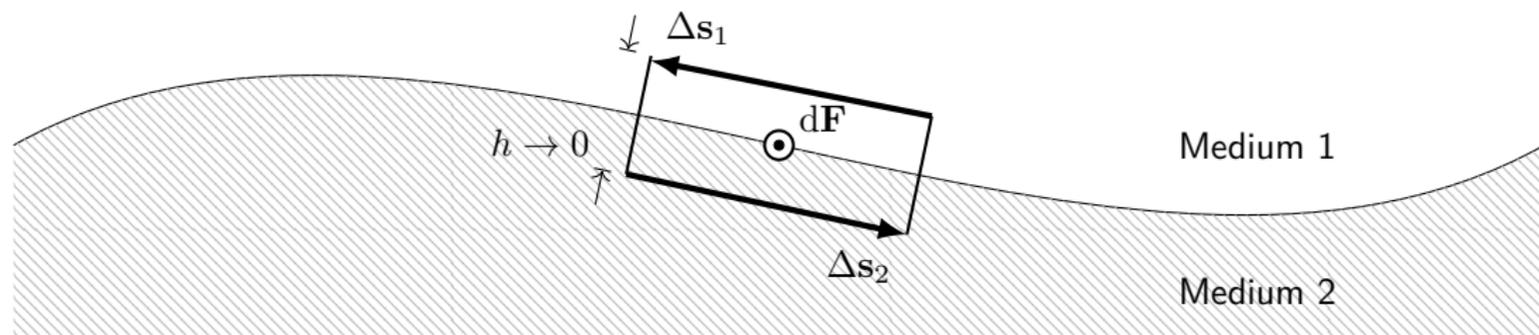
2. Reflexion am idealen Leiter

3. Parallelplattenleitung

4. Was Sie gelernt haben sollten

# Wdh.: Stetigkeit der tangentialen Feldkomponenten (I)

- Zur Herleitung der Stetigkeitsbedingungen der Tangentialkomponenten an einem Grenzübergang zwischen zwei Medien betrachten wir zunächst eine Fläche  $F$ , deren Normalenvektor parallel zur Grenzfläche ist.
- Senkrecht zur Grenzfläche betrage die Seitenlänge  $h$ , parallel zur Grenzfläche betrage die Ausdehnung  $\Delta s$ . Im Folgenden betrachten wir den Fall  $h \rightarrow 0$ .



## Wdh.: Stetigkeit der tangentialen Feldkomponenten (II)

- Gemäß obiger Abbildung folgt aus dem Durchflutungs- bzw. dem Induktionsgesetz, dass

$$\oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = \int_F \mathbf{J} \cdot d\mathbf{F} + \int_F \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{F} = \int_F \mathbf{J} \cdot d\mathbf{F} = i' \Delta s$$

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = - \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{F} = 0$$

- Die Verschiebungsstromdichte  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  und die zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  müssen stets endlich sein. Wegen  $h \rightarrow 0$  verschwinden somit ihre Flächenintegrale.
- Das Flächenintegral über die Stromdichte  $\mathbf{J}$  kann jedoch auch für infinitesimal kleines  $h$  einen endlichen Wert annehmen. D.h. es kann ein Oberflächenstrom  $i' \Delta s$  mit dem Strombelag  $i'$  (Einheit  $\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ) fließen.
- Dies hat zur Folge, dass

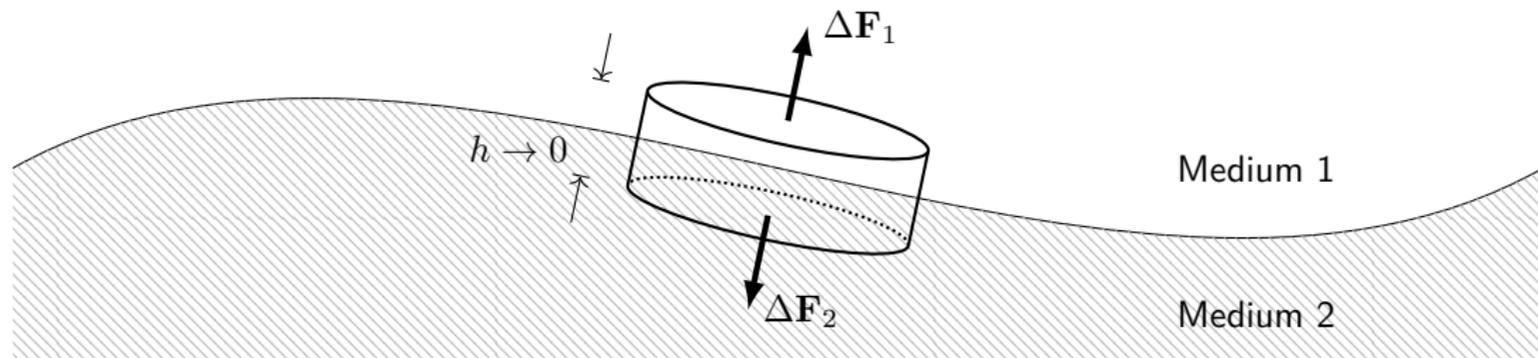
$$H_{t,1} - H_{t,2} = i'$$

$$E_{t,1} - E_{t,2} = 0$$

wobei  $H_{t,1}$ ,  $E_{t,1}$ ,  $H_{t,2}$  und  $E_{t,2}$  die tangentialen Feldkomponenten an der Grenzfläche sind.

# Wdh.: Stetigkeit der normalen Feldkomponenten (I)

- Zur Herleitung der Stetigkeitsbedingungen der Normalkomponenten an einem Grenzübergang zwischen zwei Medien betrachten wir zunächst einen Zylinder mit Volumen  $V$  dessen Stirnflächennormalen parallel zur Grenzflächennormalen sind.
- Die Höhe des Zylinders sei  $h$  und die beiden Stirnflächen haben jeweils einen Flächeninhalt  $\Delta F$ .
- Im Folgenden betrachten wir den Fall  $h \rightarrow 0$ .



## Wdh.: Stetigkeit der normalen Feldkomponenten (II)

- Gemäß der Abbildung folgt aus dem Gaußschen Gesetz sowie der Quellenfreiheit des Magnetfeldes, dass

$$\oint_O \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} = \mathbf{D}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = \int_V \rho dV = \sigma \Delta F$$
$$\oint_O \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = \mathbf{B}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = 0,$$

wobei  $\sigma$  die Flächenladungsdichte (Einheit  $\frac{\text{As}}{\text{m}^2}$ ) ist.

- Dies hat zur Folge, dass

$$D_{n,1} - D_{n,2} = \sigma$$
$$B_{n,1} - B_{n,2} = 0$$

wobei  $D_{n,1}$ ,  $B_{n,1}$ ,  $D_{n,2}$  und  $B_{n,2}$  die normalen Feldkomponenten an der Grenzfläche sind.

## Wdh.: Randbedingungen

- Ist Medium 2 ideal leitend (d.h. Leitfähigkeit  $\kappa_2 \rightarrow \infty$  bzw. Relaxationszeit  $T_r \rightarrow 0$ ), so verschwinden darin die Felder und die zuvor beschriebenen Stetigkeitsbedingungen werden zu

$$H_{t,1} = i' , \quad E_{t,1} = 0 , \quad D_{n,1} = \sigma , \quad B_{n,1} = 0$$

- In diesem Fall werden die Stetigkeitsbedingungen auch als Randbedingungen bezeichnet.

# Vorlesungsinhalte

1. Grenzflächenbedingungen am idealen Leiter

2. Reflexion am idealen Leiter

3. Parallelplattenleitung

4. Was Sie gelernt haben sollten

# Reflexions- & Transmissionsfaktor am idealen Leiter

- Eine elektromagnetische Welle breite sich in einem Medium mit Wellenwiderstand  $\underline{Z}_1$  aus und treffe unter einem Winkel  $\alpha_1$  auf die Grenzfläche zu einem idealen Leiter mit Wellenwiderstand  $\underline{Z}_2$  ( $\kappa_2 \rightarrow \infty$ ).
- Mit dem komplexen Wellenwiderstand

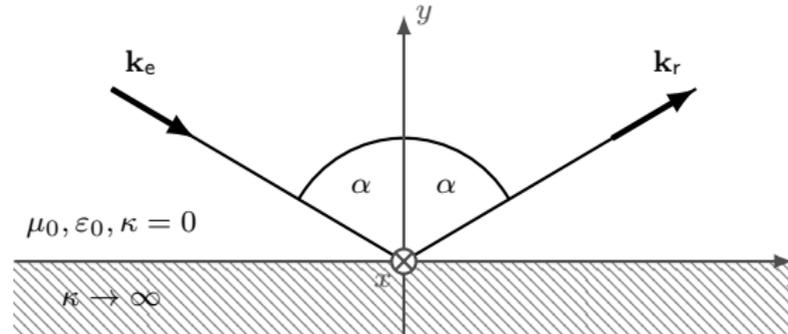
$$\underline{Z}_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2 - j \kappa_2 / \omega}} = \sqrt{\mu_2 \frac{\varepsilon_2 + j \kappa_2 / \omega}{\varepsilon_2^2 + \kappa_2^2 / \omega^2}} \xrightarrow{\kappa_2 \rightarrow \infty} 0,$$

können wir dann die Reflexions- und Transmissionsfaktoren am idealen Leiter für senkrechte und parallele Polarisation schreiben als

$$\begin{aligned} \underline{r}_s &= \frac{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) - \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} -1 & \underline{t}_s &= \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} 0 \\ \underline{r}_p &= \frac{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) - \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} 1 & \underline{t}_p &= \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

# Reflexion am idealen Leiter (I)

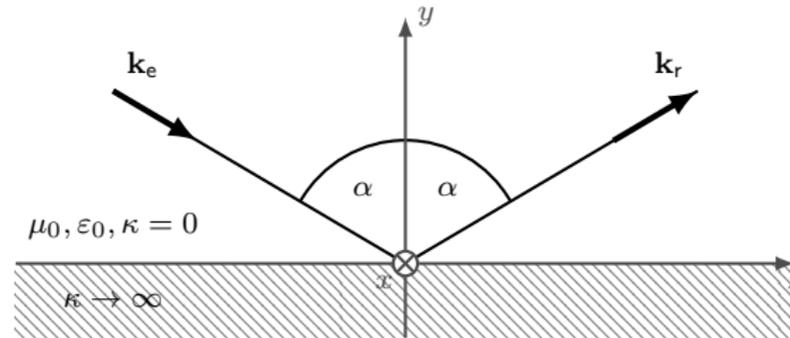
- Betrachten wir nun eine einfallende Welle, welche unter einem Winkel  $\alpha$  auf eine in der  $xz$ -Ebene liegende Grenzfläche zwischen Vakuum und einem ideal leitenden Medium trifft und reflektiert wird. Die Einfallsebene sei die  $yz$ -Ebene.



- Für die Wellenvektoren gilt mit  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

$$\mathbf{k}_e = k_0 \mathbf{e}_e = k_0 (-\cos \alpha \mathbf{e}_y + \sin \alpha \mathbf{e}_z) \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_r = k_0 \mathbf{e}_r = k_0 (\cos \alpha \mathbf{e}_y + \sin \alpha \mathbf{e}_z)$$

# Reflexion am idealen Leiter (II)

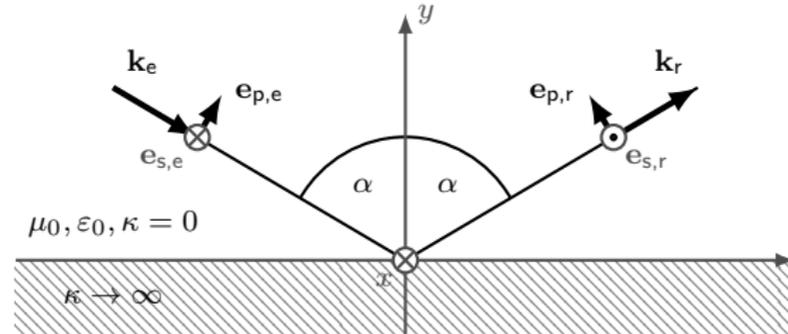


- Die einfallende Welle sei harmonisch und eben, d.h. wir erhalten mit dem Wellenwiderstand des freien Raumes  $Z_0$

$$\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,e} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \mathbf{r})} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_e(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{H}}_{0,e} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \mathbf{r})} = \frac{1}{Z_0} \mathbf{e}_e \times \underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t)$$

$$\underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,r} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \mathbf{r})} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_r(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{H}}_{0,r} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \mathbf{r})} = \frac{1}{Z_0} \mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t)$$

# Senkrechte und parallele Polarisation



- Bezogen auf die Einfallsebene (hier die  $yz$ -Ebene) können wir die einfallende Welle aufteilen in ein senkrecht polarisiertes und ein parallel polarisiertes Feld gemäß

$$\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_e^{\parallel}(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{E}}_e^{\perp}(\mathbf{r}, t) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_r^{\parallel}(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{E}}_r^{\perp}(\mathbf{r}, t).$$

# Reflexion am idealen Leiter: Parallele Polarisation (I)

- Mit dem Reflexionsfaktor der parallelen Polarisation  $\underline{r}_p = 1$  erhalten wir für das einfallende und reflektierte elektrische Feld

$$\underline{\mathbf{E}}_{0,e}^{\parallel} = \underline{E}_0^{\parallel} \mathbf{e}_{p,e} = \underline{E}_0^{\parallel} (\sin \alpha \mathbf{e}_y + \cos \alpha \mathbf{e}_z) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}}_{0,r}^{\parallel} = \underline{E}_0^{\parallel} \mathbf{e}_{p,r} = \underline{E}_0^{\parallel} (\sin \alpha \mathbf{e}_y - \cos \alpha \mathbf{e}_z)$$

- Dementsprechend zeigt das H-Feld in Richtung  $\mathbf{e}_e \times \mathbf{e}_{p,e} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_{p,r} = -\mathbf{e}_x$  und lässt sich ausdrücken als

$$\underline{\mathbf{H}}_{0,e}^{\parallel} = -\frac{\underline{E}_0^{\parallel}}{Z_0} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{e})} \mathbf{e}_x \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_{0,r}^{\parallel} = -\frac{\underline{E}_0^{\parallel}}{Z_0} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_x .$$

## Reflexion am idealen Leiter: Parallele Polarisation (II)

- Für die Überlagerung von einfallender und reflektierter Welle erhalten wir

$$\underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_e^{\parallel}(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{E}}_r^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_y^{\parallel}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_y + \underline{E}_z^{\parallel}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_z$$

mit den Komponenten wobei  $\mathbf{k}_e = k_0 (-\cos \alpha \mathbf{e}_y + \sin \alpha \mathbf{e}_z)$  und  $\mathbf{k}_r = k_0 (\cos \alpha \mathbf{e}_y + \sin \alpha \mathbf{e}_z)$

$$\begin{aligned} \underline{E}_y^{\parallel}(\mathbf{r}, t) &= \underline{E}_0^{\parallel} \sin \alpha \left( e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})} + e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \right) \\ &= \underline{E}_0^{\parallel} \sin \alpha \left( e^{j k_0 \cos \alpha y} + e^{-j k_0 \cos \alpha y} \right) e^{j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)} \\ &= 2 \underline{E}_0^{\parallel} \sin \alpha \cos(k_0 \cos \alpha y) e^{j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \underline{E}_z^{\parallel}(\mathbf{r}, t) &= \underline{E}_0^{\parallel} \cos \alpha \left( e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})} - e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \right) \\ &= \underline{E}_0^{\parallel} \cos \alpha \left( e^{j k_0 \cos \alpha y} - e^{-j k_0 \cos \alpha y} \right) e^{j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)} \\ &= j 2 \underline{E}_0^{\parallel} \cos \alpha \sin(k_0 \cos \alpha y) e^{j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)} \end{aligned}$$

# Reflexion am idealen Leiter: Senkrechte Polarisation

- Das elektrische Feld steht jetzt senkrecht auf der Einfallsebene und wir erhalten mit dem Reflexionsfaktor  $r_s = -1$

$$\underline{E}_{0,e}^\perp = \underline{E}_0^\perp \mathbf{e}_{s,e} = \underline{E}_0^\perp \mathbf{e}_x \quad \text{und} \quad \underline{E}_{0,r}^\perp = \underline{E}_0^\perp \mathbf{e}_{s,r} = -\underline{E}_0^\perp \mathbf{e}_x ,$$

weshalb wir folgende Ausdrücke für das magnetische Feld erhalten

$$\underline{H}_{0,e}^\perp = \frac{\underline{E}_0^\perp}{Z_0} (\sin \alpha \mathbf{e}_y + \cos \alpha \mathbf{e}_z) \quad \text{und} \quad \underline{H}_{0,r}^\perp = \frac{\underline{E}_0^\perp}{Z_0} (-\sin \alpha \mathbf{e}_y + \cos \alpha \mathbf{e}_z) .$$

- Für die Überlagerung von einfallender und reflektierter Welle erhalten wir

$$\underline{E}^\perp(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_e^\perp(\mathbf{r}, t) + \underline{E}_r^\perp(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_x^\perp(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_x$$

mit der Komponente

$$\begin{aligned} E_x^\perp(\mathbf{r}, t) &= \underline{E}_0^\perp \left( e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})} - e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \right) \\ &= j 2 \underline{E}_0^\perp \sin(k_0 \cos \alpha y) e^{j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)} . \end{aligned}$$

# Wellenausbreitung bei Reflexion am idealen Leiter

- Die Interpretation der obigen Ausdrücke lässt sich vereinfachen, indem wir die Wellenzahlen

$$k_y = k_0 \cos \alpha \quad \text{und} \quad k_z = k_0 \sin \alpha$$

eingeführen. Es gilt somit  $k_0^2 = k_y^2 + k_z^2$ .

- Wir erhalten dementsprechend für den Halbraum  $y \geq 0$  im Fall paralleler Polarisation

$$\underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_y^{\parallel}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_y + \underline{\mathbf{E}}_z^{\parallel}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_z = \left( 2\underline{E}_0^{\parallel} \frac{k_z}{k_0} \cos(k_y y) \mathbf{e}_y + j 2\underline{E}_0^{\parallel} \frac{k_y}{k_0} \sin(k_y y) \mathbf{e}_z \right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

und im Fall senkrechter Polarisation

$$\underline{\mathbf{E}}^{\perp}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_x^{\perp}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_x = j 2\underline{E}_0^{\perp} \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_x .$$

- Wir beobachten also unabhängig von der Polarisation eine Welle, welche sich in  $z$ -Richtung ausbreitet und deren Amplitude von  $y$  abhängt.

# Sonderfälle der Wellenausbreitung am idealen Leiter

- Im Fall  $\alpha = 0^\circ$  trifft die einfallende Welle senkrecht auf die Grenzfläche. Wie erhalten  $k_y = k_0$  und  $k_z = 0$ . Die reflektierte Welle breitet sich also in entgegengesetzter Richtung zur einfallenden Welle aus.
- Durch die Überlagerung der einfallenden und der reflektierten Welle erhalten wir eine stehende Welle.
- Im Fall  $\alpha = 90^\circ$  kommt es zu keiner Reflexion und die einfallende Welle breitet sich ungestört im Halbraum  $y \geq 0$  aus. Es gilt  $k_y = 0$  und  $k_z = k_0$ .

# Darstellung mittels Wellenlängen

- Die Welle kann auch mithilfe der Wellenlängen

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{k_y} = \frac{\lambda_0}{\cos \alpha} \quad \text{und} \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{\lambda_0}{\sin \alpha}$$

beschrieben werden, wobei  $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi c_0}{\omega}$  die Wellenlänge im Vakuum ist und  $\alpha \in (0, \pi/2)$ .

- Die beiden Wellenlängen erfüllen also die Beziehung  $\frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}$ , wobei  $\lambda_y, \lambda_z \geq \lambda_0$ .
- Damit lassen sich die komplexen Zeiger der elektrischen Feldstärkevektoren für die parallele bzw. senkrechte Polarisierung schreiben als

$$\underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_0^{\parallel} \left[ 2 \frac{\lambda_0}{\lambda_z} \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda_y}\right) \mathbf{e}_y + j 2 \frac{\lambda_0}{\lambda_y} \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_y}\right) \mathbf{e}_z \right] e^{j(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z})}$$

$$\underline{\mathbf{E}}^{\perp}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_0^{\perp} \left[ j 2 \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_y}\right) \mathbf{e}_x \right] e^{j(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z})} .$$

# Reellwertige Feldkomponenten

- Die reellwertigen E-Feldkomponenten erhalten wir mit  $\underline{E}_0 = E_0 e^{j\varphi_0}$  als Realteil der komplexen Zeiger

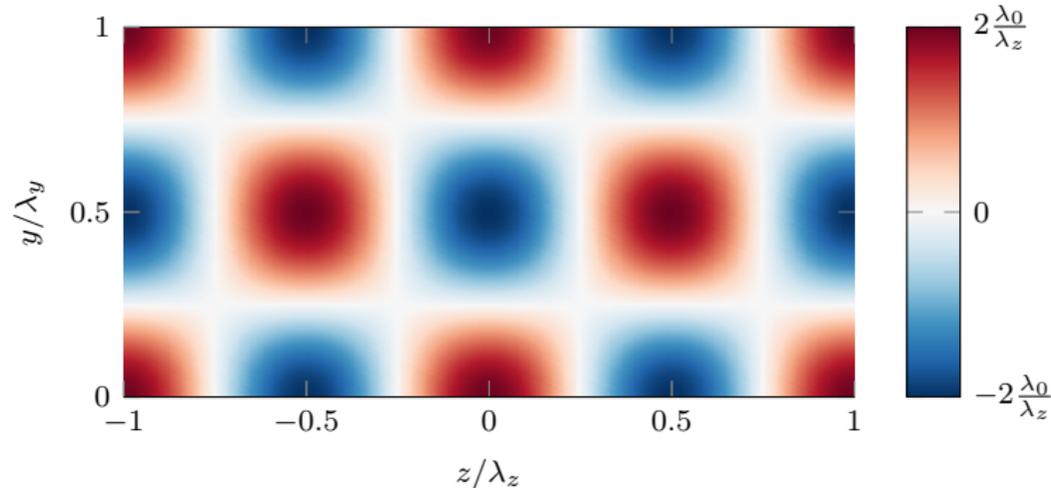
$$\mathbf{E}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \Re \left\{ \underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) \right\} = E_0^{\parallel} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \frac{\lambda_0}{\lambda_z} \cos \left( \frac{2\pi y}{\lambda_y} \right) \cos \left( \varphi_0 + \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z} \right) \\ 2 \frac{\lambda_0}{\lambda_y} \sin \left( \frac{2\pi y}{\lambda_y} \right) \sin \left( \varphi_0 + \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z} \right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}^{\perp}(\mathbf{r}, t) = \Re \left\{ \underline{\mathbf{E}}^{\perp}(\mathbf{r}, t) \right\} = E_0^{\perp} \begin{pmatrix} 2 \sin \left( \frac{2\pi y}{\lambda_y} \right) \sin \left( \varphi_0 + \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Da im idealen Leiter kein elektrisches Feld existieren kann, verschwinden die tangentialen E-Feldkomponenten (hier  $E_z$  und  $E_x$ ) auf der Grenzfläche  $y = 0$  gemäß den Stetigkeitsbedingungen der Maxwell'schen Gleichungen.

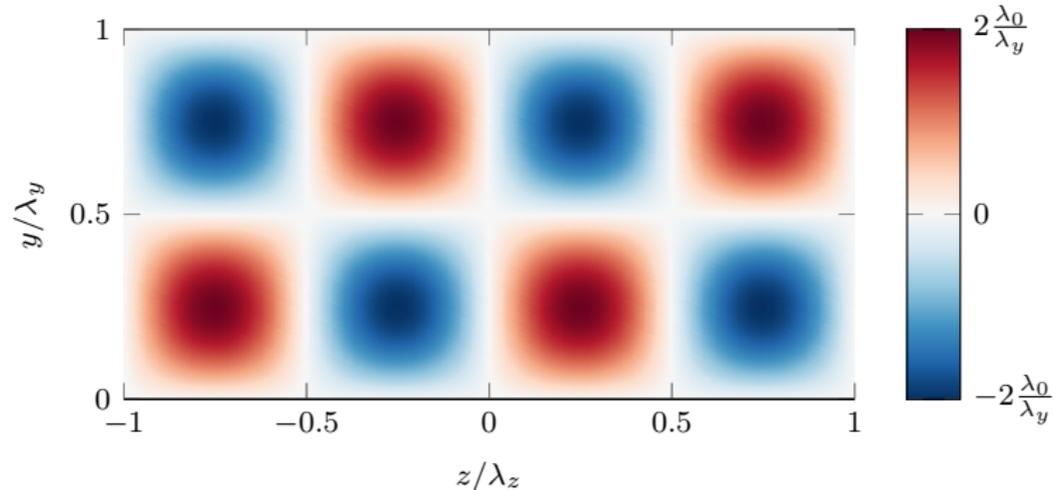
# Amplitudenverteilung von $E_y^{\parallel}$

- Die Abbildung zeigt die normierte  $y$ -Komponente  $E_y^{\parallel}/E_0^{\parallel}$  des *parallel polarisierten* elektrischen Feldstärkevektors zum Zeitpunkt  $t = 0$  für  $\varphi_0 = 0$ .



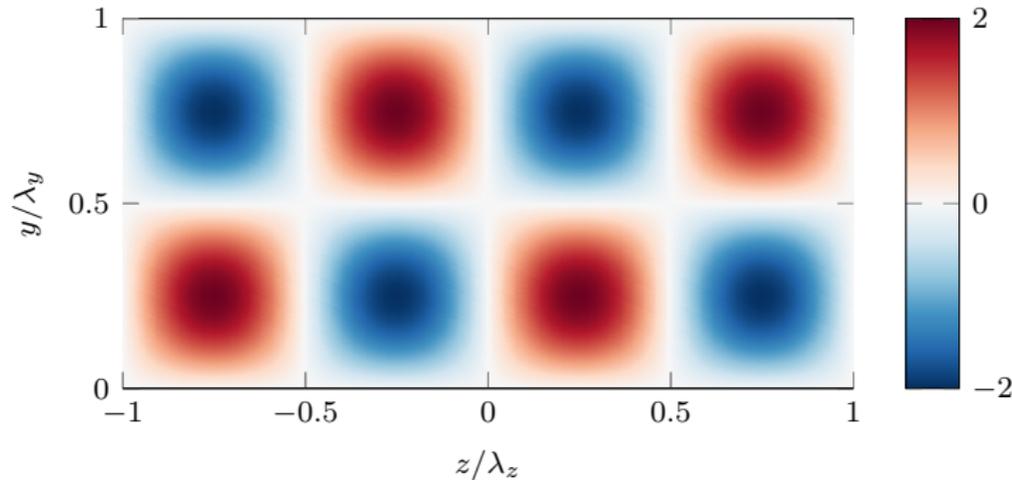
# Amplitudenverteilung von $E_z^{\parallel}$

- Die Abbildung zeigt die normierte  $z$ -Komponente  $E_z^{\parallel}/E_0^{\parallel}$  des *parallel polarisierten* elektrischen Feldstärkevektors zum Zeitpunkt  $t = 0$  für  $\varphi_0 = 0$ .



# Amplitudenverteilung von $E_x^\perp$

- Die Abbildung zeigt die normierte  $x$ -Komponente  $E_x^\perp/E_0^\perp$  des *senkrecht polarisierten* elektrischen Feldstärkevektors zum Zeitpunkt  $t = 0$  für  $\varphi_0 = 0$ .



# Dispersionsrelation

- Da  $k_z$  reell ist, verläuft die Wellenausbreitung verlustlos. Wir erhalten also für die Phasenkonstante in  $z$ -Richtung

$$\beta_z = k_z = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_y^2}.$$

- Aufgelöst nach  $\omega$  ergibt sich daraus die Dispersionsrelation

$$\omega(\beta_z) = c_0 \sqrt{\beta_z^2 + k_y^2},$$

aus welcher im Folgenden die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bestimmt werden kann.

# Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (I)

- Die Phasengeschwindigkeit in  $z$ -Richtung ergibt sich zu

$$v_{\text{ph},z} = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{\omega}{k_0 \sin \alpha} = \frac{c_0}{\sin \alpha} \geq c_0$$

- und die Gruppengeschwindigkeit in  $z$ -Richtung aus der Dispersionsrelation zu

$$v_{\text{gr},z} = \frac{d\omega}{d\beta_z} = \frac{\beta_z c_0}{\sqrt{\beta_z^2 + k_y^2}} = \frac{\beta_z c_0}{k_0} = \frac{\beta_z c_0^2}{\omega} = \frac{c_0^2}{v_{\text{ph},z}} = c_0 \sin \alpha \leq c_0$$

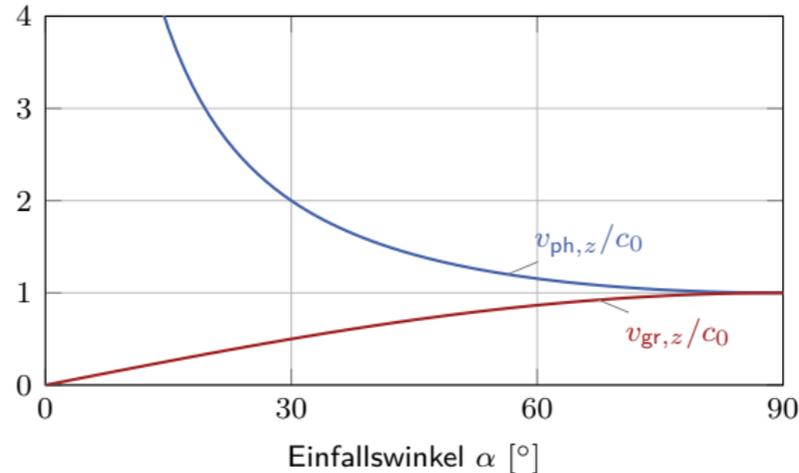
- Damit ergibt sich für die Reflexion am idealen Leiter die Beziehung

$$v_{\text{ph},z} v_{\text{gr},z} = c_0^2$$

d.h. dass das Produkt von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit gleich dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit ist.

# Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (II)

- Die Abbildung zeigt die normierte Phasen- und Gruppengeschwindigkeit einer ebenen Welle bei Reflexion am idealen Leiter als Funktion des Einfallswinkels  $\alpha$ .



# Vorlesungsinhalte

1. Grenzflächenbedingungen am idealen Leiter

2. Reflexion am idealen Leiter

**3. Parallelplattenleitung**

4. Was Sie gelernt haben sollten



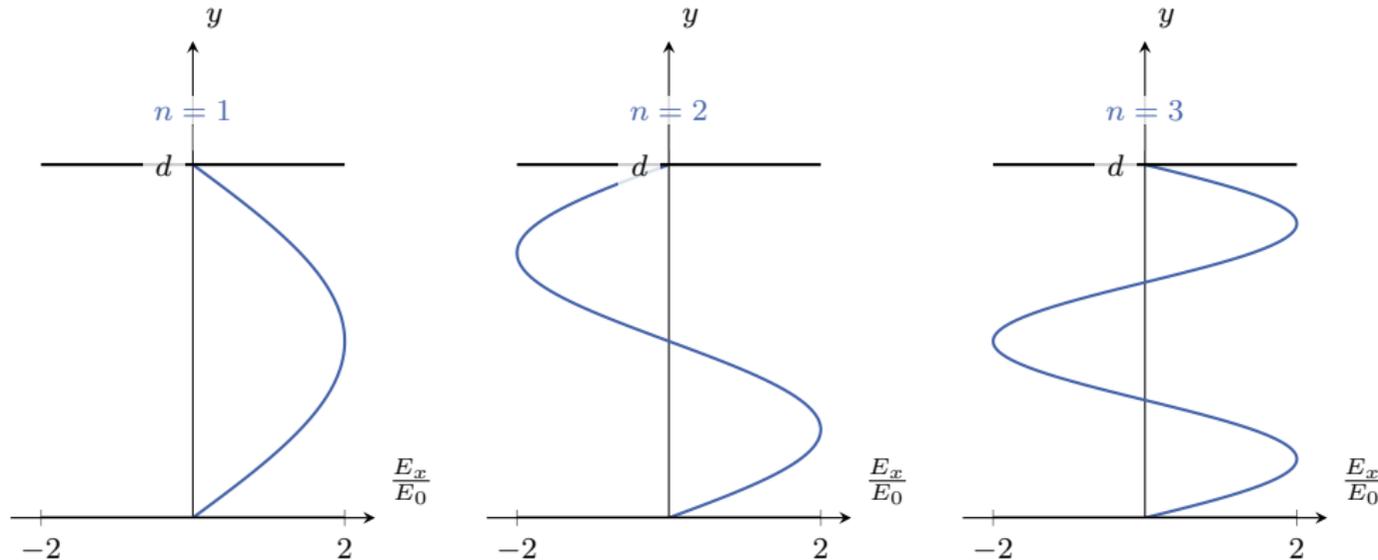
# Moden im Parallelplattenleiter (I)

- Für einen gegebenen Plattenabstand  $d$  beobachten wir im Parallelplattenleiter abhängig von der Frequenz verschiedene Feldbilder.
- Diese Feldbilder unterscheiden sich in der Anzahl von Nullstellen. Je größer  $n$ , desto mehr Nullstellen existieren zwischen den Platten.
- Die verschiedenen Feldbilder bezeichnen wir als *Moden*.
- Das parallel bzw. senkrecht polarisierte elektrische Feld können wir dann schreiben als

$$\underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_0^{\parallel} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \frac{\lambda_0}{\lambda_z} \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \\ j 2 \frac{\lambda_0}{\lambda_y} \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \end{pmatrix} e^{j(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z})} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}}^{\perp}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_0^{\perp} \begin{pmatrix} j 2 \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z})} .$$

# Moden im Parallelplattenleiter (II)

- Die Abbildungen zeigen die Amplitudenverteilungen von  $E_x^\perp = \Re\{\underline{E}_x^\perp\}$  des senkrecht polarisierten elektrischen Felds für  $t = 0, z = 0, \varphi_0 = 0$  und verschiedene Werte von  $n$ .



# Dispersionsrelation der Parallelplattenleitung (I)

- Ist der Plattenabstand  $d$  fest vorgegeben, so folgt für gegebenes  $n$

$$d = n\lambda_y/2 \quad \text{bzw.} \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y} = n\frac{\pi}{d}$$

- Damit ergibt sich für die Ausbreitungskonstante bzw. für die Wellenlänge in Ausbreitungsrichtung

$$k_z = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{k_y}{k_0}\right)^2} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2d}\right)^2}} .$$

# Grenzfrequenz im Parallelplattenleiter

- Wird die Ausbreitungskonstante  $k_z$  zu null, kann sich keine Welle mehr ausbreiten.
- Daher bezeichnen wir die Frequenz, bei der  $k_z = 0$  gilt, als *Grenzfrequenz*  $f_c$  („cut-off frequency“).
- Dementsprechend gilt

$$1 - \left(\frac{k_y}{k_0}\right)^2 = 0 \quad \iff \quad k_y = k_0 \quad \iff \quad \frac{n\pi}{d} = \frac{2\pi f_c}{c_0} \quad \iff \quad f_c = \frac{nc_0}{2d} .$$

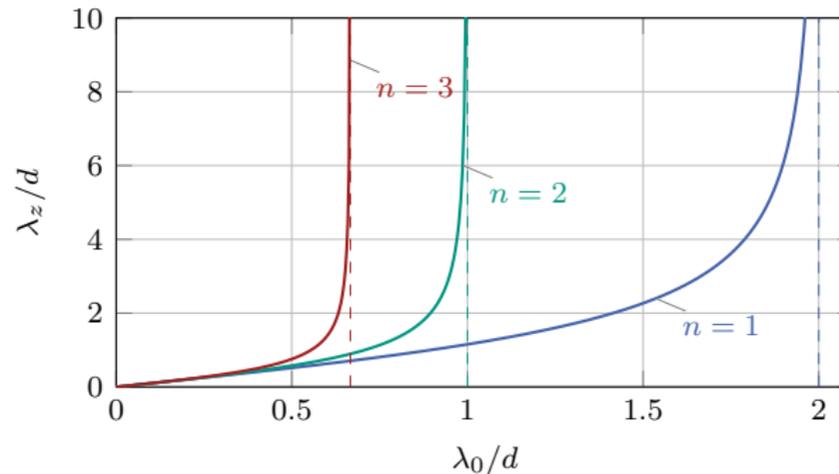
- Nun können wir mit  $\omega_c = 2\pi f_c$  die Ausbreitungskonstante ausdrücken durch

$$k_z = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} .$$

- Für Frequenzen  $f < f_c$  wird  $k_z$  imaginär, d.h. die Welle wird in  $z$ -Richtung exponentiell gedämpft. Eine ungedämpfte Wellenausbreitung ist also für gegebenes  $n$  nur bei Frequenzen  $f \geq f_{c,n}$  möglich.

# Dispersionsrelation der Parallelplattenleitung (II)

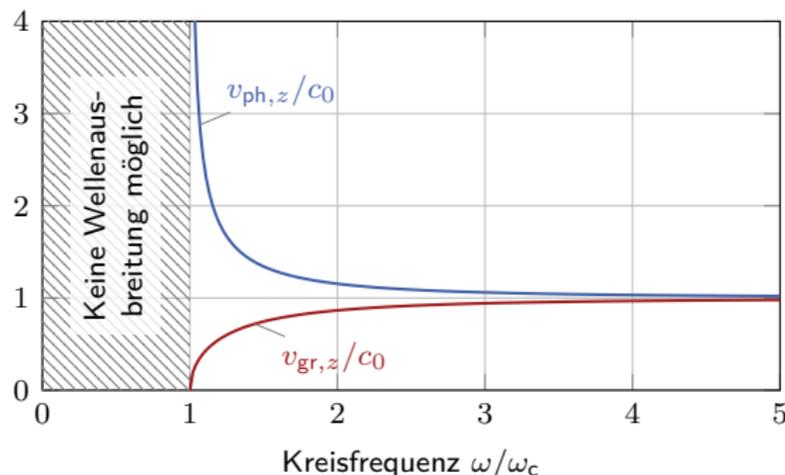
- Äquivalent zu der Grenzfrequenz definieren wir die *Grenzwellenlänge*  $\lambda_c = \frac{c_0}{f_c} = \frac{2d}{n}$ .
- Die Darstellung unten zeigt die normierte Wellenlänge in Ausbreitungsrichtung  $\lambda_z/d$ .
- Da  $\lambda_z \propto \frac{1}{k_z}$  gilt, sehen wir die Polstellen bei  $\lambda \rightarrow \lambda_c$ , welche durch die gestrichelten Linien hervorgehoben sind.



# Phasen- & Gruppengeschwindigkeit im Parallelplattenleiter

- Mit  $\beta_z = k_z$  gilt für die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im Parallelplattenleiter

$$v_{\text{ph},z} = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \quad \text{und} \quad v_{\text{gr},z} = \frac{c_0^2}{v_{\text{ph},z}} = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$



# Vorlesungsinhalte

1. Grenzflächenbedingungen am idealen Leiter

2. Reflexion am idealen Leiter

3. Parallelplattenleitung

4. Was Sie gelernt haben sollten

# Was Sie gelernt haben sollten

- Wie sich elektromagnetische Wellen an Grenzflächen, insbesondere an idealen Leitern verhalten.
- Dass die Überlagerung von einfallender und am Leiter reflektierter Welle in einer - senkrecht zur Grenzfläche - stehenden Welle resultiert.
- Wie die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der, durch die Überlagerung resultierenden Welle, mit dem Einfallswinkel zusammenhängt.
- Wie das Funktionsprinzip des Parallelplattenleiters von der Betrachtung des Welleneinfalls auf den idealen Leiter abgeleitet werden kann.
- Was eine Mode ist und unter welchen Bedingungen sich die einzelnen Moden im Parallelplattenleiter ausbreiten können.
- Die Bedeutung der Grenzfrequenz für die einzelnen Moden des Parallelplattenleiters.
- Wie sich die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im Parallelplattenleiter verhalten.