

Vorlesung 12: Rundhohlleiter

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2022/23

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 25. Januar 2023



Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung: Der Laplace-Operator
2. Zylindersymmetrische Kanalwellenleiter
3. Rundhohlleiter
4. Was Sie gelernt haben sollten

Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung: Der Laplace-Operator
2. Zylindersymmetrische Kanalwellenleiter
3. Rundhohlleiter
4. Was Sie gelernt haben sollten

Der Laplace-Operator für Skalarfelder

Je nach Koordinatensystem gilt für ein Skalarfeld ψ in ...

- ... kartesischen Koordinaten:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

- ... Zylinderkoordinaten:

$$\Delta\psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

- ... Kugelkoordinaten:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}$$

Der Laplace-Operator für Vektorfelder (I)

Je nach Koordinatensystem gilt für ein Vektorfeld \mathbf{A} in ...

- ... kartesischen Koordinaten mit $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$:

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

- ... Zylinderkoordinaten mit $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z$:

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_\rho}{\rho^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{\rho^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta A_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_\rho}{\rho^2} \\ \Delta A_\varphi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{\rho^2} \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

Der Laplace-Operator für Vektorfelder (II)

Je nach Koordinatensystem gilt für ein Vektorfeld \mathbf{A} in ...

- ... Kugelkoordinaten $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + A_\phi \mathbf{e}_\phi$:

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r A_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2} A_\vartheta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r A_\vartheta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 A_\vartheta}{\partial \phi^2} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\vartheta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r A_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \phi} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2} A_\vartheta \\ \Delta A_\vartheta - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\vartheta \\ \Delta A_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \phi} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\phi \end{pmatrix} \cdot$$

Wdh: Der Laplace-Operator für Vektorfelder (III)

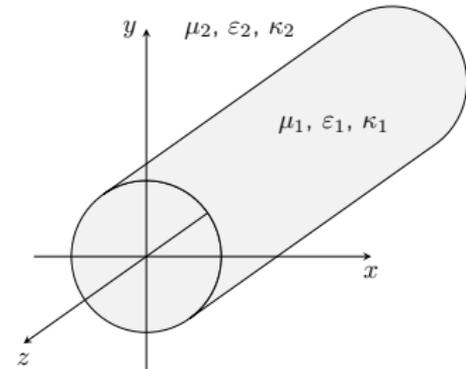
- Infolgedessen tragen im Allgemeinen alle Feldkomponenten eines Vektorfelds \mathbf{A} zu den einzelnen Komponenten von $\Delta\mathbf{A}$ bei.
- Die Ausnahme bilden das kartesische Koordinatensystem, bei dem der vektorielle Laplace-Operator auf jede Komponente von \mathbf{A} wie der skalare Laplace-Operator wirkt.
- In Zylinderkoordinaten entspricht ausschließlich die z -Komponente des vektoriellen Laplace-Operators dem skalaren Laplace-Operator.

Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung: Der Laplace-Operator
2. Zylindersymmetrische Kanalwellenleiter
3. Rundhohlleiter
4. Was Sie gelernt haben sollten

Zylindersymmetrische Kanalwellenleiter

- Im Folgenden wollen wir die Wellenausbreitung in zylindersymmetrischen Kanalwellenleitern betrachten, deren Querschnitt entlang der Ausbreitungsrichtung z konstant ist.
- Einfachheit halber beschränken wir uns auf Wellenleiter mit in radialer Richtung stückweise homogenen Medien. Entlang der φ -Koordinate seien die Medien stets homogen, d.h. sie sind zylindersymmetrisch.
- Zudem sei der Wellenleiter quellenfrei, d.h. $\rho = 0$ und es fließen keine freien Ströme.
- An den Grenzflächen müssen jeweils die Rand- bzw. Stetigkeitsbedingungen erfüllt sein.
- Die Abbildung zeigt ein Beispiel eines zylindrischen Kanalwellenleiters, der sich aus zwei homogenen Medien zusammensetzt.
- Beispiele sind Rundhohlleiter und Glasfasern.



Geführte E- und H-Wellen (I)

- Im Folgenden wollen wir geführte E- und H-Wellen betrachten, welche sich mit invarianter transversaler Feldverteilung $\underline{F}^E(\rho, \varphi)$ bzw. $\underline{F}^H(\rho, \varphi)$ mit der Ausbreitungskonstanten \underline{k}_z in z -Richtung ausbreiten.
- Für die longitudinalen Feldkomponenten in Zylinderkoordinaten setzen wir an:

$$\underline{E}_z(\rho, \varphi, z) = \underline{E}_0 \underline{F}^E(\rho, \varphi) e^{-j \underline{k}_z z}$$

$$\underline{H}_z(\rho, \varphi, z) = \underline{H}_0 \underline{F}^H(\rho, \varphi) e^{-j \underline{k}_z z} .$$

- In einem radialen Abschnitt mit homogenem Medium und Wellenzahl \underline{k} müssen die longitudinalen Feldkomponenten die skalaren Helmholtzgleichungen

$$\Delta \underline{E}_z + \underline{k}^2 \underline{E}_z = 0$$

$$\Delta \underline{H}_z + \underline{k}^2 \underline{H}_z = 0$$

unter gegebenen Rand- bzw. Stetigkeitsbedingungen erfüllen (vgl. Laplace-Operator für Vektorfelder in Zylinderkoordinaten aus Vorlesung 02).

Geführte E- und H-Wellen (II)

- Im allgemeinen Fall sind die longitudinalen Feldkomponenten \underline{E}_z und \underline{H}_z aufgrund der Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche verkoppelt. Hohlleiter mit ideal leitenden Wänden bilden dabei eine Ausnahme.
- Wie schon zuvor für kartesische Koordinaten gezeigt, lassen sich mit Hilfe des Durchflutungs- und des Induktionsgesetzes die transversalen Feldkomponenten aus \underline{E}_z und \underline{H}_z ableiten gemäß

$$\begin{aligned} \underline{E}_\rho &= \underline{E}_\rho^E + \underline{E}_\rho^H = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} + \frac{\omega \mu}{\underline{k}_z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} \right) \\ \underline{E}_\varphi &= \underline{E}_\varphi^E + \underline{E}_\varphi^H = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} - \frac{\omega \mu}{\underline{k}_z} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} \right) \\ \underline{H}_\rho &= \underline{H}_\rho^H + \underline{H}_\rho^E = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} - \frac{\omega \varepsilon}{\underline{k}_z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} \right) \\ \underline{H}_\varphi &= \underline{H}_\varphi^H + \underline{H}_\varphi^E = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} + \frac{\omega \varepsilon}{\underline{k}_z} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} \right). \end{aligned}$$

Lösung Helmholtzgleichung in Zylinderkoordinaten (I)

- Gemäß dem Produktansatz von Bernoulli setzen für E- bzw. H-Wellen an, dass $\underline{F}(\rho, \varphi) = R(\rho) \underline{\Phi}(\varphi)$.
- Setzen wir den obigen Ansatz für die longitudinalen Feldkomponenten geführter Wellen in Zylinderkoordinaten in die Helmholtzgleichung ein, so erhalten wir Gleichungen der Form

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{1}{\underline{\Phi}} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}}{\partial \varphi^2} + (\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2) \rho^2 = 0$$

- Diese lässt sich mit der Separationskonstante \underline{m} und der transversalen Wellenzahl $\underline{k}_t^2 = \underline{k}^2 - \underline{k}_z^2$ separieren in die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \underline{\Phi}}{\partial \varphi^2} + \underline{m}^2 \underline{\Phi} = 0$$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} + [\underline{k}_t^2 \rho^2 - \underline{m}^2] R = 0.$$

Lösung Helmholtzgleichung in Zylinderkoordinaten (II)

- Die erste Gleichung ist eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche unter der Randbedingung $\underline{\Phi}(\varphi = 0) = \underline{\Phi}(\varphi = 2\pi)$, für ganzzahlige $m \geq 0$ Lösungen folgender Form aufweist

$$\underline{\Phi}(\varphi) = \underline{c}_1 \sin(m\varphi) + \underline{c}_2 \cos(m\varphi) .$$

- Bei der zweiten Gleichung unterscheiden wir für reellwertige m zwei Fälle:
 - Für reellwertige und positive \underline{k}_t^2 , d.h. rein reellwertige \underline{k}_t , können wir die zweite Gleichung mit $x = \underline{k}_t \rho$ in die Besselsche Differentialgleichung überführen, deren reellwertige Lösungen allgemein als Zylinderfunktionen bzw. Besselfunktionen bezeichnet werden.
 - Für reellwertige und negative \underline{k}_t^2 , d.h. rein imaginäre \underline{k}_t , können wir die zweite Gleichung mit $x = \Im\{\underline{k}_t\}\rho$ in die modifizierte Besselsche Differentialgleichung überführen, deren reellwertige Lösungen als modifizierte Besselfunktionen bezeichnet werden.

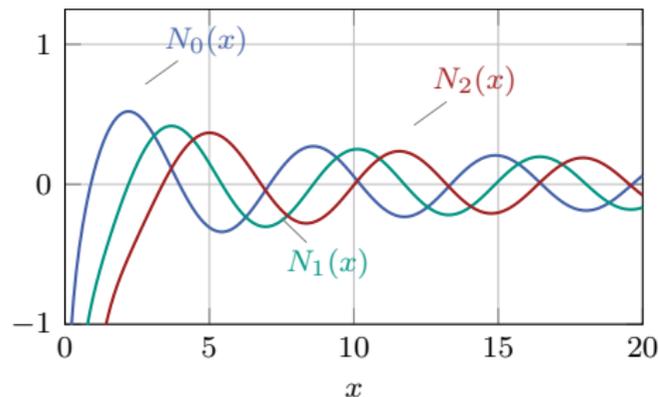
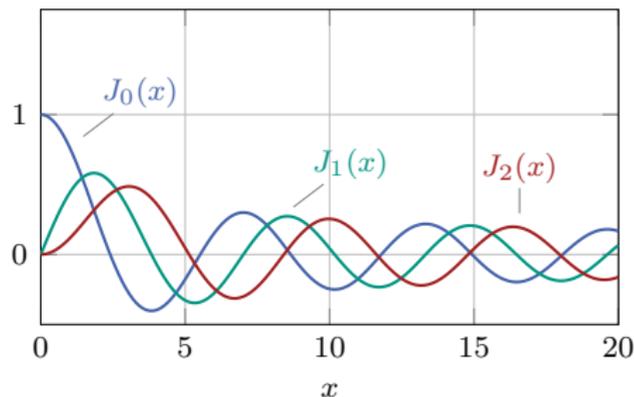
Besselfunktionen

- Die Besselsche Differentialgleichung lautet:

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} + [x^2 - m^2] f = 0$$

- Sie wird gelöst durch:

- Besselfunktionen erster Gattung: $J_m(x)$
- Besselfunktionen zweiter Gattung: $N_m(x)$ (auch Neumann oder Weber Funktionen)



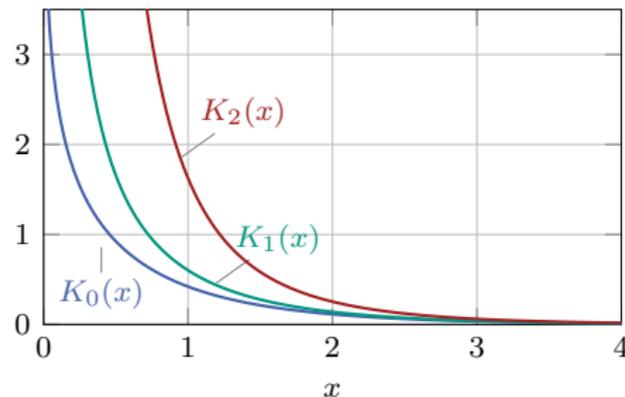
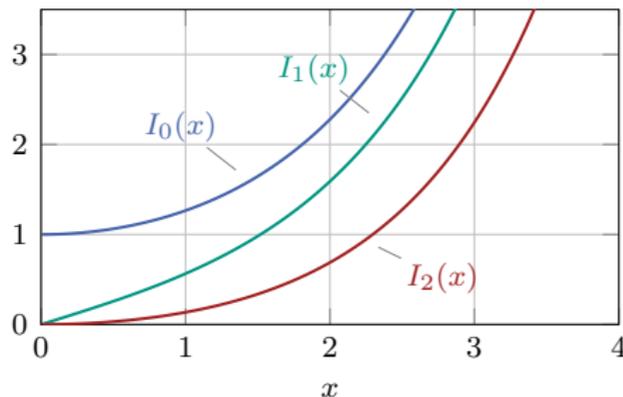
Modifizierte Besselfunktionen

- Die modifizierte Besselsche Differentialgleichung lautet:

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} - [x^2 + m^2] f = 0$$

- Sie wird gelöst durch:

- Modifizierte Besselfunktionen erster Gattung: $I_m(x)$
- Modifizierte Besselfunktionen zweiter Gattung: $K_m(x)$ (auch MacDonald-Funktionen)



Weitere Lösungen der Radialgleichung

- Für den Fall, dass $\underline{k}_t = 0$ gilt, erhalten wir aus der (modifizierten) Besselschen Differentialgleichung die Eulersche Differentialgleichung

$$\rho^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} - \underline{m}^2 R = 0 .$$

- Diese Differentialgleichung können wir mit $\underline{c}_3, \underline{c}_4 \in \mathbb{C}$ lösen durch

$$R(\rho) = \rho^{\pm m} (\underline{c}_3 \ln \rho + \underline{c}_4) ,$$

was sich für den Fall $m = 0$ weiter vereinfacht zu

$$R(\rho) = \underline{c}_3 \ln \rho + \underline{c}_4 .$$

Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung: Der Laplace-Operator
2. Zylindersymmetrische Kanalwellenleiter
- 3. Rundhohlleiter**
4. Was Sie gelernt haben sollten

Einleitung und Motivation

- Hohlleiter mit kreisförmigen oder elliptischem Querschnitt sind flexibler als Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt. Längere Wellenleiter lassen sich so auf Kabeltrommeln aufwickeln.
- Gerillte Hohlleiter (engl. corrugated waveguides) lassen noch geringere Biegeradien zu.
- Aufgrund ihrer Flexibilität werden sie häufig als Wellenleiter für Funk-Basisstationen und Antennenzuläufe verwendet.



Lösung der Randbedingungen für E-Wellen

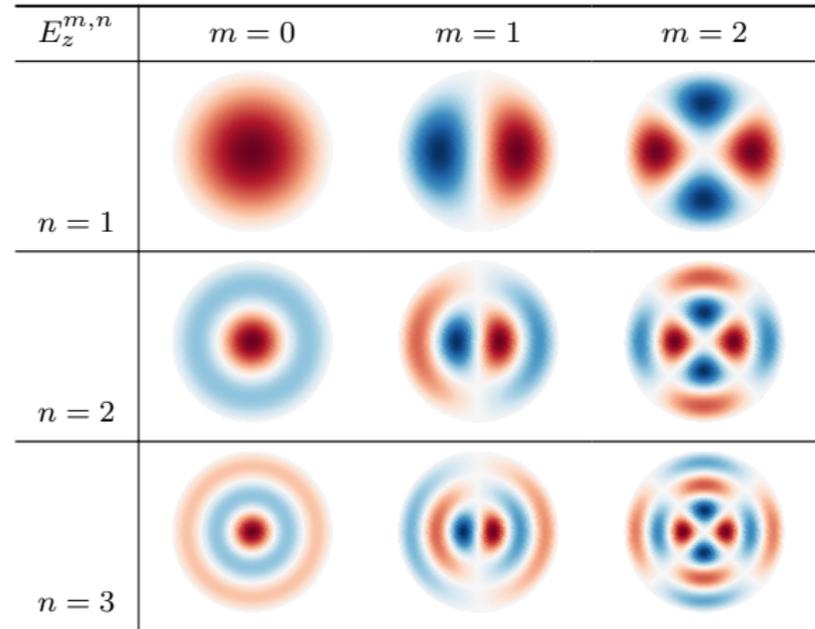
- An der ideal leitenden Innenwand des Rundhohlleiters bei $\rho = a$ müssen gemäß der Randbedingungen die tangentialen Komponenten des E-Feldes verschwinden.
- Dies ist nur für reelle $k_t^2 = k^2 - k_z^2 > 0$ möglich, da die modifizierten Besselfunktionen für $\rho > 0$ keine Nullstellen besitzen.
- Für E-Wellen muss also gelten, dass $\underline{E}_z(a, \varphi, z) = \underline{E}_0 \underline{F}^E(a, \varphi) e^{-j \underline{k}_z z} = 0$.
- Da die Neumannfunktionen bei $\rho = 0$ eine Singularität aufweisen, kommen für die radiale Abhängigkeit nur die Besselfunktionen in Frage, sodass

$$\underline{E}_z^{m,n} = \begin{Bmatrix} \underline{E}_0^{m,n,h} \\ \underline{E}_0^{m,n,v} \end{Bmatrix} J_m(k_t \rho) \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} e^{-j \underline{k}_z z}$$

- Damit die Randbedingung $\underline{E}_z^{m,n}(\rho = a) = 0$ erfüllt ist, muss gelten, dass $k_t = \frac{j_{m,n}}{a}$ ist, wobei $j_{m,n}$ die n -te Nullstelle der Besselfunktion J_m größer null ist.
- Für $m > 0$ ergibt sich jeweils eine horizontal und eine vertikal orientierte Lösung (man spricht von zweifacher Entartung).

Moden der E-Welle im Rundhohlleiter

- Die Tabelle zeigt die Realteile $E_z^{m,n} = \Re\{E_z^{m,n}\}$ von neun Moden der E-Welle in der Ebene $z = 0$.
- Die Schwingungsfrequenz sowie der Hohlleiterradius sind konstant.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.
- Die Abbildungen zeigen, dass m die Anzahl der Perioden entlang der azimuthalen Achse (φ) bzw. n die Anzahl der Nullstellen (*exklusive* Koordinatenursprung) entlang der radialen Achse (r) angibt.



Ausbreitungskonstanten der E-Welle (I)

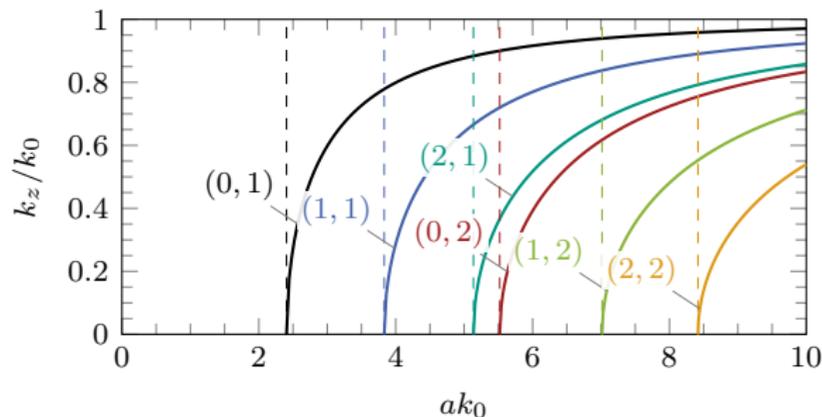
- Auf der vorherigen Folie haben wir gesehen, dass für die $E^{m,n}$ -Mode der transversale Anteil der Wellenzahl durch $k_t = j_{m,n}/a$ gegeben ist.
- Daraus folgt für die Ausbreitungskonstante

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_t^2} = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{j_{m,n}}{ak_0}\right)^2}.$$

- Die Mode mit den Modenzahlen (m, n) kann sich also nur ausbreiten, wenn $ak_0 \geq j_{m,n}$.
- Für $ak_0 < j_{m,n}$ ist das Argument der Wurzel negativ und damit die Ausbreitungskonstante rein imaginär \implies die Welle wird in Ausbreitungsrichtung exponentiell gedämpft und kann sich in dem Rundhohlleiter nicht ausbreiten.
- Die n -ten Nullstelle der Besselfunktion erster Gattung und m -ter Ordnung $j_{m,n}$ bestimmt also die Grenzfrequenz $\omega_g^{m,n} = c_0 k_t^{m,n} = c_0 j_{m,n}/a$ der $E^{m,n}$ -Mode.

Ausbreitungskonstanten der E-Welle (II)

- Die Abbildung zeigt die normierten Ausbreitungskonstanten der Moden (m, n) der *E-Welle* k_z/k_0 als Funktion der normierten Wellenzahl $ak_0 = a\omega/c$.
- Die gestrichelten vertikalen Linien heben jeweils die normierten Grenzfrequenzen hervor, welche in der Tabelle nochmals explizit angeführt werden.
- Offenbar ist die $E^{0,1}$ -Mode die Grundmode der E-Wellen.



$j_{m,n}$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$n = 1$	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802
$n = 2$	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610
$n = 3$	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152
$n = 4$	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235
$n = 5$	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094

Lösung der Randbedingungen für H-Wellen

- Analog setzen wir für H-Wellen an, dass

$$\underline{H}_z^{m,n} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{H}_0^{m,n,h} \\ \underline{H}_0^{m,n,v} \end{array} \right\} J_m(k_t \rho) \left\{ \begin{array}{l} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{array} \right\} e^{-j k_z z} .$$

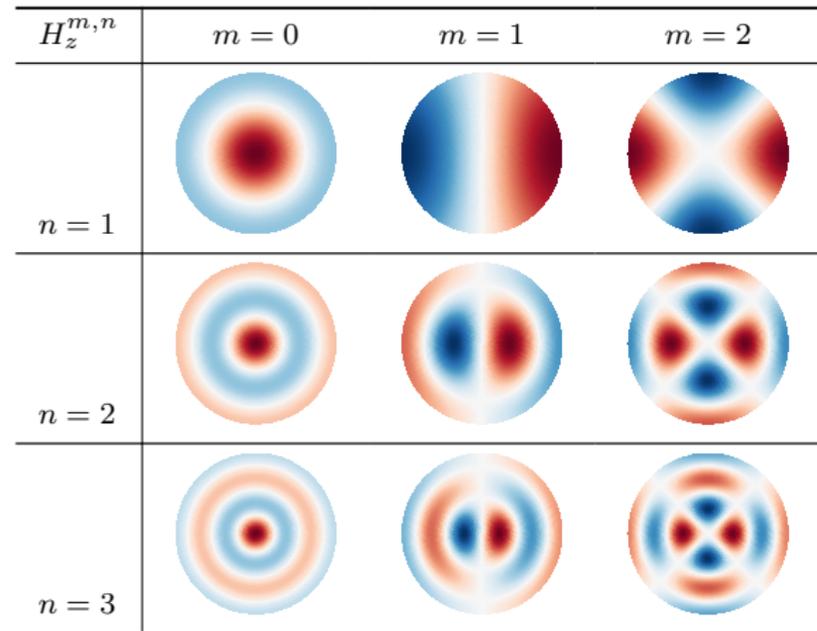
- Im Falle von H-Wellen existiert keine \underline{E}_z -Komponente. Es muss jedoch auch die \underline{E}_φ -Komponente auf der Innenseite der Hohlleiterwand verschwinden. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{E}_\varphi^H(a, \varphi, z) &= j \frac{\omega \mu}{k_t^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \underline{H}_0 \frac{\partial \underline{F}^H(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} e^{-j k_z z} = 0 \\ \implies \frac{dJ_m(k_t \rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=a} &\propto J'_m(k_t a) = 0 \end{aligned}$$

- Dabei muss also für die transversale Wellenzahl gelten, dass $k_t = \frac{j'_{m,n}}{a}$ ist, wobei $j'_{m,n}$ die n -te Nullstelle der abgeleiteten Besselfunktion J'_m größer null ist.

Moden der H-Welle im Rundhohlleiter

- Die Tabelle zeigt die Realteile $H_z^{m,n} = \Re\{H_z^{m,n}\}$ von neun Moden der H-Welle in der Ebene $z = 0$.
- Die Schwingungsfrequenz sowie der Hohlleiterradius sind konstant.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.
- Die Abbildungen zeigen, dass m die Anzahl der Perioden entlang der azimuthalen Achse (φ) bzw. n die Anzahl der Nullstellen (inklusive Koordinatenursprung) entlang der radialen Achse (r) angibt.



Ausbreitungskonstanten der H-Welle (I)

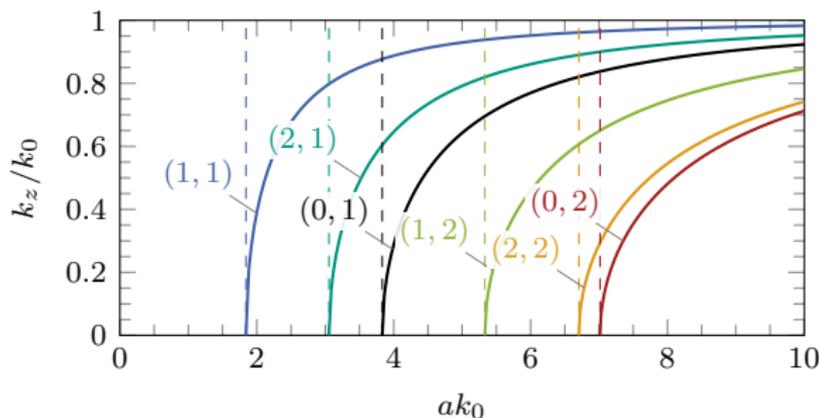
- Auf der vorherigen Folie haben wir gesehen, dass für die $H^{m,n}$ -Mode der transversale Anteil der Wellenzahl durch $k_t = j'_{m,n}/a$ gegeben ist.
- Analog zu der E-Welle folgt für die Ausbreitungskonstante

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_t^2} = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{j'_{m,n}}{ak_0}\right)^2}.$$

- Die Mode mit den Modenzahlen (m, n) kann sich also nur ausbreiten, wenn $ak_0 \geq j'_{m,n}$.
- Für $ak_0 < j'_{m,n}$ ist das Argument der Wurzel negativ und damit die Ausbreitungskonstante rein imaginär \implies die Welle wird in Ausbreitungsrichtung exponentiell gedämpft und kann sich in dem Rundhohlleiter nicht ausbreiten.
- Die n -ten Nullstelle der ersten Ableitung der Besselfunktion erster Gattung und m -ter Ordnung $j'_{m,n}$ bestimmt also die Grenzfrequenz $\omega_g^{m,n} = c_0 k_t^{m,n} = c_0 j'_{m,n}/a$ der $H^{m,n}$ -Mode.

Ausbreitungskonstanten der H-Welle (II)

- Die Abbildung zeigt die normierten Ausbreitungskonstanten der Moden (m, n) der H-Welle k_z/k_0 als Funktion der normierten Wellenzahl $ak_0 = a\omega/c$.
- Die gestrichelten vertikalen Linien heben jeweils die normierten Grenzfrequenzen hervor, welche in der Tabelle nochmals explizit angeführt werden.
- Offenbar ist die $H^{1,1}$ -Mode die Grundmode der H-Wellen.



$j'_{m,n}$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$n = 1$	3,8317	1,8412	3,0542	4,2012
$n = 2$	7,0156	5,3314	6,7061	8,0152
$n = 3$	10,1735	8,5363	9,9695	11,3459
$n = 4$	13,3237	11,7060	13,1704	14,5858
$n = 5$	16,4706	14,8636	16,3475	17,7887

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (I)

- Da im Rundhohlleiter die Ausbreitungskonstanten der E- und H-Wellen bei gleichen Modenzahlen verschieden sind, unterscheiden sich auch die zugehörigen Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten.
- Der Unterschied in den Ausbreitungskonstanten der E- und H-Wellen begründet sich jedoch im transversalen Anteil der Wellenzahl, der *frequenzunabhängig* ist.
- Für eine $E^{m,n}$ - oder $H^{m,n}$ -Welle gilt folglich gleichermaßen

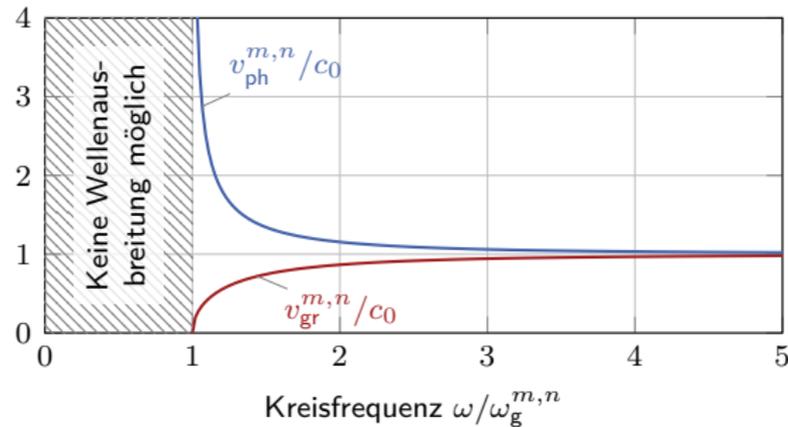
$$v_{\text{ph}}^{m,n} = \frac{\omega}{k_z^{m,n}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_t^{m,n}}{k_0}\right)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_g^{m,n}}{\omega}\right)^2}}$$

$$v_{\text{gr}}^{m,n} = \frac{d\omega}{dk_z^{m,n}} = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{k_t^{m,n}}{k_0}\right)^2} = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_g^{m,n}}{\omega}\right)^2}.$$

- Offenbar gilt also auch im Rundhohlleiter wie bei der Reflexion am idealen Leiter $v_{\text{ph}}^{m,n} v_{\text{gr}}^{m,n} = c_0^2$.

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (II)

- Die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit verhält sich damit exakt wie im Parallelplatten- und Rechteckhohlleiter.
- Die Abbildung zeigt die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der $E^{m,n}$ - oder $H^{m,n}$ -Welle normiert auf die Grenzfrequenz $\omega_g^{m,n}$.



Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung: Der Laplace-Operator
2. Zylindersymmetrische Kanalwellenleiter
3. Rundhohlleiter
4. Was Sie gelernt haben sollten

Was Sie gelernt haben sollten

- Mit welchem Ansatz wir die Wellengleichungen für die longitudinalen Feldkomponenten im Rundhohlleiter analytisch lösen können.
- Wie die Besselsche bzw. modifizierte Besselsche Differentialgleichung zusammenhängen.
- Welche Funktionen die Besselsche bzw. modifizierte Besselsche Differentialgleichung lösen.
- Welche Randbedingungen im Rundhohlleiter erfüllt sein müssen und welche Lösungen wir daher für die longitudinalen Feldkomponenten der E- und H-Wellen erhalten.
- Wie die E- bzw. H-Moden im Rundhohlleiter aussehen.
- Weshalb sich die Ausbreitungskonstanten der E- und H-Wellen für identische Modenzahlpaare unterscheiden.
- Wie sich Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im Rundhohlleiter verhalten.