

Vorlesung 13: Dielektrischer Schichtwellenleiter

Elektromagnetische Wellen | Wintersemester 2022/23

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 31. Januar 2023



Vorlesungsinhalte

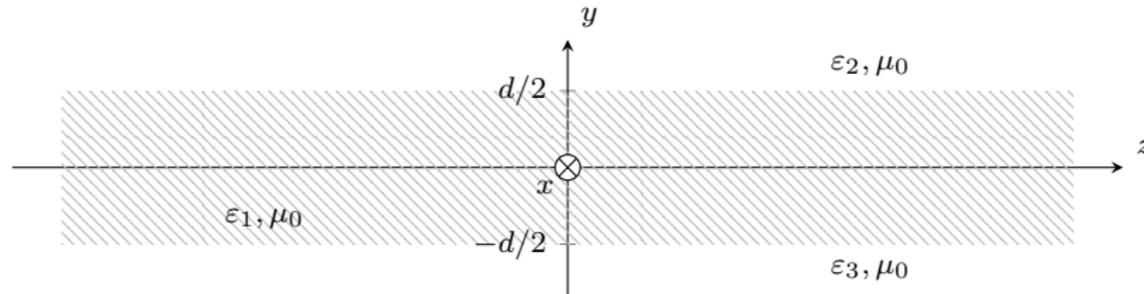
1. Dielektrischer Schichtwellenleiter
2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter
3. Geführte E-Wellen und H-Wellen
4. Was Sie gelernt haben sollten
5. Anhang
 - Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion

Vorlesungsinhalte

1. Dielektrischer Schichtwellenleiter
2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter
3. Geführte E-Wellen und H-Wellen
4. Was Sie gelernt haben sollten
5. Anhang
 - Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion

Dielektrischer Schichtwellenleiter

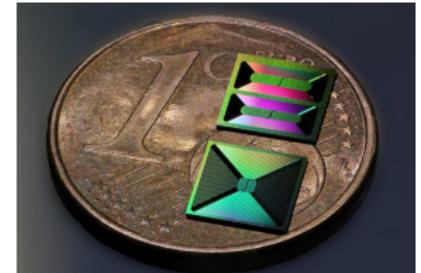
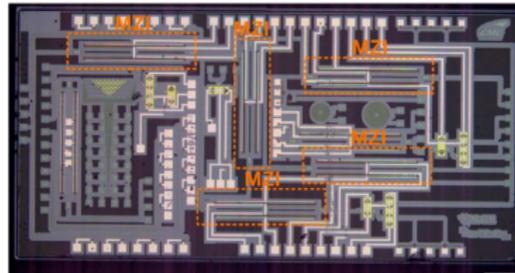
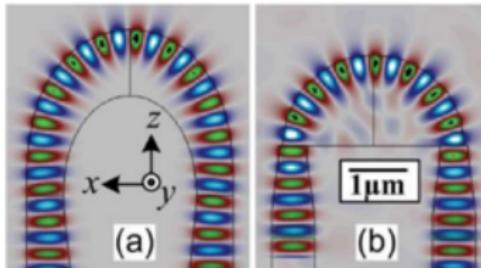
- Wie die Parallelplattenleitung gehört der dielektrische Schichtwellenleiter zur Klasse der Dreischichtenprobleme.



- Der Wellenleiter sei in der xz -Ebene unendlich ausgedehnt und habe eine Dicke d .
- Alle Schichten seien nichtleitend, d.h. $\kappa = 0$, frei von Raumladungen, d.h. $\rho = 0$, und haben die Permeabilität $\mu = \mu_0$.
- Die elektrische Permittivität in der Schicht $i \in \{1, 2, 3\}$ sei $\varepsilon_i = \varepsilon_{r,i} \varepsilon_0 = n_i^2 \varepsilon_0$ mit der Brechzahl n_i (oft auch Brechungsindex genannt).
- Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden auf den Fall $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \iff n_2 = n_3$.

Anwendungsbeispiele

- Die Betrachtungen des Schichtwellenleiters lassen sich auch auf Lichtwellenleiter mit rechteckigem Querschnitt, wie sie in photonischen integrierten Schaltungen verwendet werden, übertragen.
- Durch die geringere Wellenlänge von Licht können solche Wellenleiter deutlich kleinere Maße als Mikrowellenleiter haben (Größenordnung Mikrometer).
- Dies erlaubt eine besonders dichte Integration photonischer Wellenleiter und Komponenten, wodurch solche photonischen Chips deutlich kleiner und energieeffizienter als elektrische Schaltungen sind.
- Anwendungsbereiche: optische Kommunikationstechnik, Messtechnik (Lidar, optische Kohärenztomographie), Biophotonik zur medizinischen Diagnostik, Quantencomputer, Neuromorphic Computing, etc.

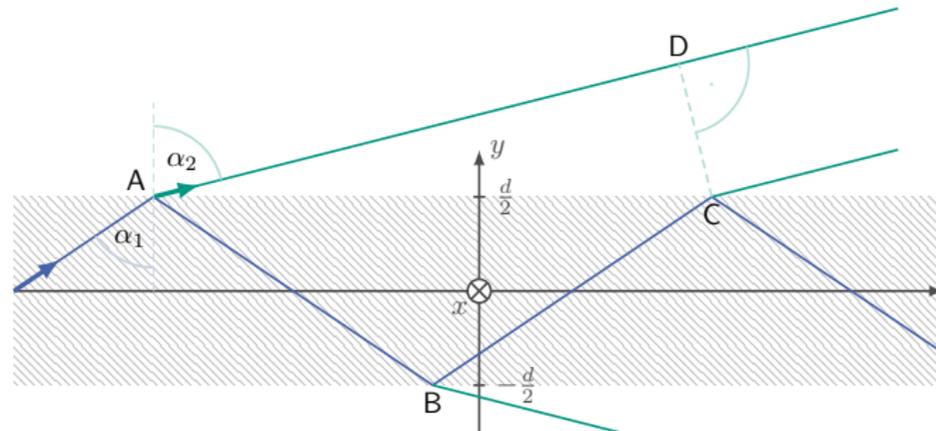


Vorlesungsinhalte

1. Dielektrischer Schichtwellenleiter
2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter
3. Geführte E-Wellen und H-Wellen
4. Was Sie gelernt haben sollten
5. Anhang
 - Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion

Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter

- Im Folgenden betrachten wir eine harmonische ebene Welle, die unter einem Winkel α_1 innerhalb des Wellenleiters auf die Grenzfläche trifft.
- Geführte Wellen sind nur dann möglich, wenn vollständige Reflexion bzw. Totalreflexion an der Grenzfläche auftritt.
- Für die Wellenzahl innerhalb bzw. außerhalb der Platte gilt $k_{1,2} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_{1,2}} = \frac{\omega}{c_0} n_{1,2} = k_0 n_{1,2}$.



Grenzwinkel der Totalreflexion (Wdh.)

- Beim Übergang von einem Medium mit höherem Brechungsindex (optisch dichter) zu einem Medium mit geringerem Brechungsindex (optisch dünner), kann - in Abhängigkeit von dem Einfallswinkel gegenüber der Grenzflächennormalen α_1 - Totalreflexion auftreten.
- Das Snelliussche Brechungsgesetz lässt sich für $\alpha_1 = \alpha_{\text{krit}}$ schreiben als

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_{\text{krit}} = 1 .$$

- Wir beobachten Totalreflexion für Winkel

$$\alpha_1 \geq \alpha_{\text{krit}} = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right) .$$

- Gemäß der Strahlenoptik ist eine Wellenführung für alle Winkel $\alpha_1 \geq \alpha_{\text{krit}}$ möglich.

Fresnelsche Beziehungen (Wdh.)

- Die Fresnelschen Beziehungen für die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten lauten

$$\underline{r}_s = \frac{n_1 \cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{r}_p = \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - n_1 \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{t}_s = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{t}_p = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)}$$

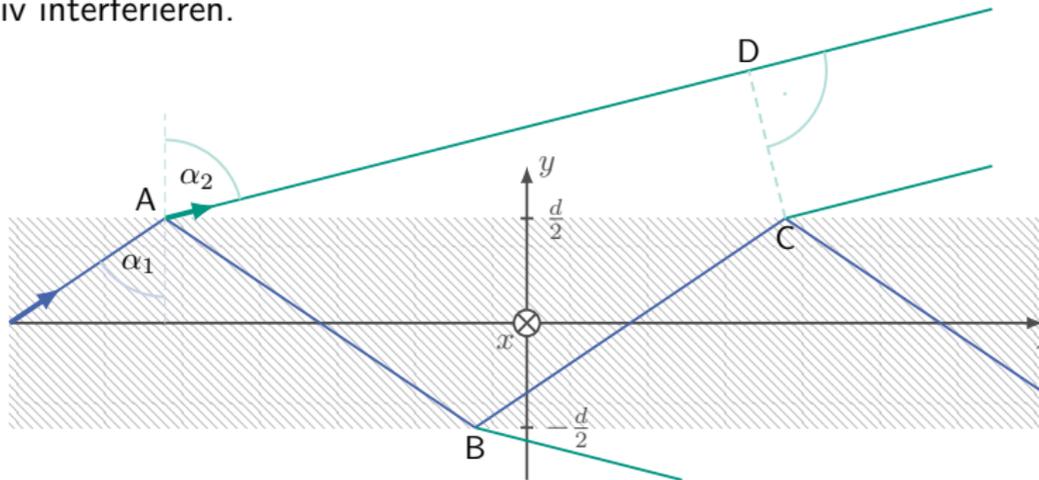
- Im Falle von Totalreflexion bei $n_1 > n_2$ werden die Reflexionskoeffizienten komplexwertig. Ihre Argumente ergeben sich zu (vgl. Folie 39)

$$\arg(\underline{r}_s) = -2 \arctan \left(\sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_1^2 \cos^2(\alpha_1)}} \right) \quad \text{und} \quad \arg(\underline{r}_p) = -2 \arctan \left(\frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_2^2 \cos^2(\alpha_1)}} \right)$$

- Es gilt zu beachten, dass die Transmissionskoeffizienten im Falle von Totalreflexion keineswegs verschwinden. Für ihre Argumente gilt jeweils $\arg(\underline{t}) = \frac{1}{2} \arg(\underline{r})$.
- Im Falle von Totalreflexion erfahren die reflektierte und die transmittierte Welle an der Grenzfläche somit eine Phasendrehung.

Ausbreitungsbedingung

- Um eine in z -Richtung geführte Welle zu erhalten, müssen die an den Punkten A und C transmittierten Felder konstruktiv interferieren.



- Das bedeutet, dass die akkumulierte Phasendrehung auf den Pfaden \overline{AC} und \overline{AD} bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π identisch sein müssen. Also mit ganzzahligem m

$$\arg(\underline{r}) + \overline{AB}k_1 + \arg(\underline{r}) + \overline{BC}k_1 + \arg(\underline{t}) = \arg(\underline{t}) + \overline{AD}k_2 + m 2\pi$$

Geometrische Betrachtung

- Aus den geometrischen Beziehungen ergibt sich

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{d}{\cos(\alpha_1)}$$

$$\overline{AC} = 2d \tan(\alpha_1)$$

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \overline{AC} \sin(\alpha_2) = \overline{AC} \frac{n_1}{n_2} \sin(\alpha_1) = 2d \frac{n_1}{n_2} \frac{\sin^2(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} \\ &= 2d \frac{n_1}{n_2} \frac{1 - \cos^2(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} = \frac{2dn_1}{n_2 \cos(\alpha_1)} - \frac{2dn_1}{n_2} \cos(\alpha_1) \end{aligned}$$

- Zudem gilt $\arg(\underline{t}) = \frac{1}{2} \arg(\underline{r})$.
- Somit erhalten wir Wellenführung bei Erfüllung der Bedingung

$$\arg(\underline{r}) = -d k_1 \cos(\alpha_1) + m \pi .$$

Eigenwertgleichung für senkrechte Polarisation

- Die oben diskutierte Bedingung für eine geführte Welle wird auch als Eigenwertgleichung bezeichnet. Sie lässt sich nun für senkrechte Polarisation schreiben als

$$\arctan \left(\sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_1^2 \cos^2(\alpha_1)}} \right) = \frac{d k_1}{2} \cos(\alpha_1) - m \frac{\pi}{2}$$

- Mit $U = \frac{d}{2} k_0 n_1 \cos(\alpha_1)$ und $W = \frac{d}{2} k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}$ ergibt sich daraus

$$W = U \tan \left(U - m \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} U \tan(U) & \text{für } m \text{ gerade} \\ -U \cot(U) & \text{für } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

- Weiterhin muss gemäß der obigen Definitionen und mit $V = \frac{d}{2} k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ gelten, dass

$$W = \sqrt{V^2 - U^2}$$

Eigenwertgleichung für parallele Polarisation

- Wie zuvor können wir auch die Eigenwertgleichung für die parallele Polarisation herleiten:

$$\arctan \left(\frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_2^2 \cos^2(\alpha_1)}} \right) = \frac{d k_1}{2} \cos(\alpha_1) - m \frac{\pi}{2}$$

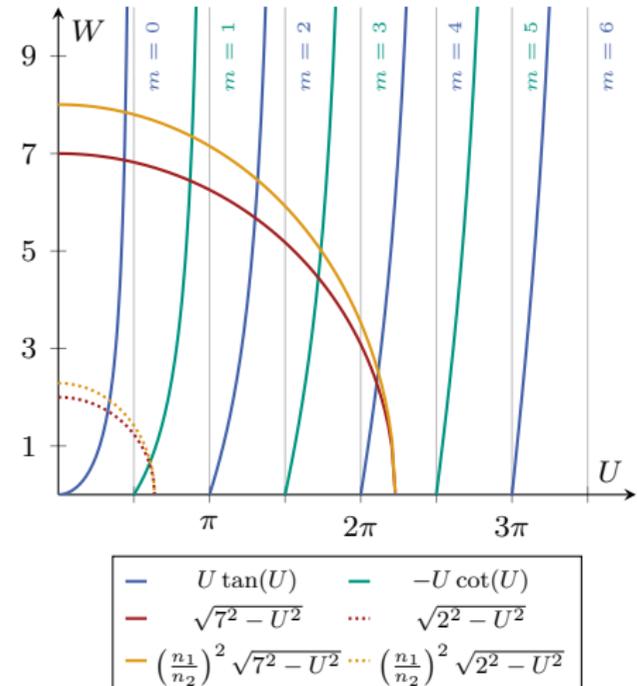
$$\arctan \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_1^2 \cos^2(\alpha_1)}} \right) = \frac{d k_1}{2} \cos(\alpha_1) - m \frac{\pi}{2}$$

- Setzen wir erneut $U = \frac{d}{2} k_0 n_1 \cos(\alpha_1)$ und $W = \frac{d}{2} k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2} = \sqrt{V^2 - U^2}$ ein, ergibt sich

$$\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sqrt{V^2 - U^2} = U \tan \left(U - m \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} U \tan(U) & \text{für } m \text{ gerade} \\ -U \cot(U) & \text{für } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

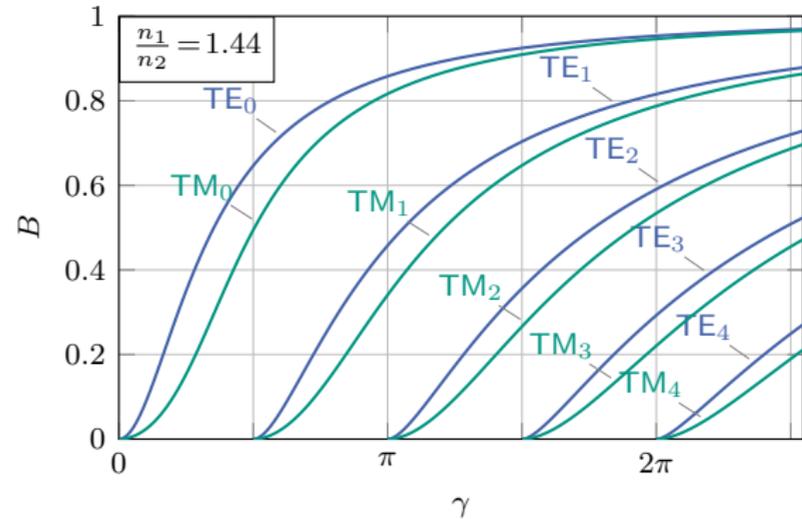
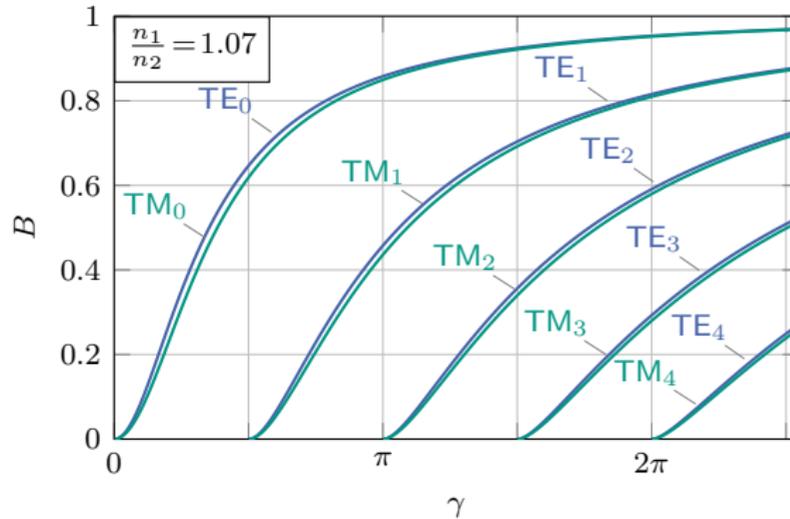
Graphische Lösung der Eigenwertgleichung

- Die Abbildung erlaubt die graphische Lösung der Eigenwertgleichung für $V = 7$ (durchgezogen) bzw. $V = 2$ (gestrichelt) bei $\frac{n_1}{n_2} = 1.07$.
- Die Schnittpunkte der roten bzw. orangenen Kurven mit der blauen und grünen Kurven führen auf die Ausbreitungskonstanten für die m -ten Moden mit senkrechter bzw. paralleler Polarisation.
- Im Vergleich zur senkrechten Polarisation ist zu beachten, dass die linke Seite der Eigenwertgleichung für parallele Polarisation keinen Viertelkreis sondern eine Vierteilellipse darstellt.
- Da nur bestimmte U die Eigenwertgleichung lösen, treten auch nur für diskrete Winkel α_1 geführte Wellen auf.



Numerische Lösung der Eigenwertgleichung

- Die Abbildungen zeigen die normierten Lösungen der Eigenwertgleichungen $B = 1 - \frac{U^2}{V^2}$.
- Mit zunehmendem Brechzahlunterschied wächst auch der Unterschied zwischen den Ausbreitungskonstanten der TE-Moden und TM-Moden.



Vorlesungsinhalte

1. Dielektrischer Schichtwellenleiter
2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter
- 3. Geführte E-Wellen und H-Wellen**
4. Was Sie gelernt haben sollten
5. Anhang
 - Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion

Geführte E-Wellen und H-Wellen

- Im Folgenden wollen wir die Eigenschaften geführter Wellen im dielektrischen Schichtwellenleiter analysieren, welche sich mit räumlich konstanter transversaler Feldverteilung in z -Richtung ausbreiten.
- In kartesischen Koordinaten suchen wir also Lösungen der Wellengleichungen für Feldvektoren der Form

$$\underline{\mathbf{E}}(x, y, z) = \underline{\mathbf{E}}(x, y) e^{-j k_z z} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}(x, y, z) = \underline{\mathbf{H}}(x, y) e^{-j k_z z}$$

- Die Feldvektoren $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ können als Superposition einer E- und einer H-Welle aufgefasst gemäß

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}^E + \underline{\mathbf{E}}^H \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}^E + \underline{\mathbf{H}}^H$$

- Bei der E-Welle verfügt nur das E-Feld über eine z -Komponente und es gilt $\underline{H}_z^E = 0$.
- Entsprechend verfügt bei der H-Welle nur das H-Feld über eine z -Komponente und es gilt $\underline{E}_z^H = 0$.
- E-Wellen werden auch als transversal-magnetische (TM) Wellen und H-Wellen als transversal-elektrische (TE) Wellen bezeichnet. Transversalelektromagnetische (TEM) Wellen stellen einen weiteren Sonderfall dar, welchen wir zunächst nicht näher betrachten werden.

- Für die transversalen Feldkomponenten gilt im Schichtwellenleiter mit $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ und $\underline{k}_t^2 = \underline{k}_{y,i}^2$ und $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_i$ ($i \in \{1, 2\}$)

$$\underline{E}_x = -j \frac{1}{\underline{k}_t^2} \left(\underline{k}_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \right) = -j \frac{\omega \mu}{\underline{k}_{y,i}^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}$$

$$\underline{E}_y = -j \frac{1}{\underline{k}_t^2} \left(\underline{k}_z \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \omega \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \right) = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}_{y,i}^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}$$

$$\underline{H}_x = j \frac{1}{\underline{k}_t^2} \left(\omega \underline{\varepsilon}_i \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} + \underline{k}_z \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \right) = j \frac{\omega \underline{\varepsilon}}{\underline{k}_{y,i}^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}$$

$$\underline{H}_y = -j \frac{1}{\underline{k}_t^2} \left(\omega \underline{\varepsilon} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} + \underline{k}_z \frac{\partial \underline{H}_z^H}{\partial y} \right) = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}_{y,i}^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}$$

- Damit ergibt sich eine E-Welle (TM-Welle) mit den Feldkomponenten \underline{E}_z , \underline{E}_y und \underline{H}_x sowie eine H-Welle (TE-Welle) mit den Feldkomponenten \underline{H}_z , \underline{H}_y und \underline{E}_x .

Lösung der skalaren Wellengleichung (I)

- Für \underline{E}_z und \underline{H}_z muss in den Medien $i \in \{1, 2\}$ die skalare Helmholtzgleichung erfüllt sein, d.h.

$$\Delta \underline{E}_{z,i} + \underline{k}_i^2 \underline{E}_{z,i} = 0$$

$$\Delta \underline{H}_{z,i} + \underline{k}_i^2 \underline{H}_{z,i} = 0.$$

- In kartesischen Koordinaten wird diese z.B. für \underline{E}_z mit $\underline{k}_i^2 = \underline{k}_{x,i}^2 + \underline{k}_{y,i}^2 + \underline{k}_{z,i}^2$ gelöst durch

$$\underline{E}_{z,i} = \underline{E}_0 \begin{Bmatrix} \cos(\underline{k}_{x,i}x) \\ \sin(\underline{k}_{x,i}x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\underline{k}_{y,i}y) \\ \sin(\underline{k}_{y,i}y) \end{Bmatrix} e^{-j\underline{k}_{z,i}z} \quad \text{bzw.} \quad \underline{E}_{z,i} = \underline{E}_0 \begin{Bmatrix} \cos(\underline{k}_{x,i}x) \\ \sin(\underline{k}_{x,i}x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{+j\underline{k}_{y,i}y} \\ e^{-j\underline{k}_{y,i}y} \end{Bmatrix} e^{-j\underline{k}_{z,i}z}$$

- Die Ausdrücke in geschweiften Klammern stehen dabei für beliebige Linearkombinationen, d.h.

$$\begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} \equiv \underline{A} \cos(\alpha) + \underline{B} \sin(\alpha). \text{ Diese lassen sich auch als Linearkombination } \begin{Bmatrix} e^{+j\alpha} \\ e^{-j\alpha} \end{Bmatrix} \text{ darstellen.}$$

Lösung der skalaren Wellengleichung (II)

- Im betrachteten Schichtwellenleiter mit unendlicher Ausdehnung in x -Richtung ist die Lösung unabhängig von x , d.h. $k_{x,i}^2 = 0$ und $k_{y,i}^2 = k_i^2 - k_{z,i}^2$, also

$$\underline{E}_{z,i} = \underline{E}_0 \begin{Bmatrix} \cos(k_{y,i}y) \\ \sin(k_{y,i}y) \end{Bmatrix} e^{-j\underline{k}_{z,i}z} \quad \text{bzw.} \quad \underline{E}_{z,i} = \underline{E}_0 \begin{Bmatrix} e^{+jk_{y,i}y} \\ e^{-jk_{y,i}y} \end{Bmatrix} e^{-j\underline{k}_{z,i}z}$$

- Jede Linearkombination $A \cos(\alpha) + B \sin(\alpha)$ können wir auch schreiben als

$$A \cos(\alpha) + B \sin(\alpha) = C [\sin(\psi) \cos(\alpha) + \cos(\psi) \sin(\alpha)] = C \sin(\alpha + \psi)$$

mit den freien Parametern C und ψ .

- Damit können wir auch ansetzen, dass

$$\underline{E}_{z,i} = \underline{E}_0 \sin(k_{y,i}y + \psi) e^{-j\underline{k}_{z,i}z} \quad \text{bzw.} \quad \underline{E}_{z,i} = \underline{E}_0 \begin{Bmatrix} e^{+jk_{y,i}y} \\ e^{-jk_{y,i}y} \end{Bmatrix} e^{-j\underline{k}_{z,i}z}$$

Stetigkeitsbedingungen (Wdh.)

- Im Gegensatz zu den bisher betrachteten idealen Leitern verschwinden die Felder an den Grenzflächen des dielektrischen Schichtwellenleiters nicht.
- Da wir die Dielektrika als nichtleitend annehmen, verschwinden allerdings der Strombelag $i' = 0$ und die Flächenladungsdichte $\sigma = 0$.
- Für die tangentialen Feldkomponenten an der Grenzfläche zweier Medien $\underline{H}_{t,1}$, $\underline{E}_{t,1}$, $\underline{H}_{t,2}$ und $\underline{E}_{t,2}$ muss mit dem Oberflächenstrom $i' \Delta s$ mit dem Strombelag i' (Einheit $\frac{\text{A}}{\text{m}}$) gelten, dass

$$\underline{H}_{t,1} - \underline{H}_{t,2} = i' = 0$$

$$\underline{E}_{t,1} - \underline{E}_{t,2} = 0.$$

- Für die normalen Feldkomponenten an der Grenzfläche zweier Medien $\underline{H}_{n,1}$, $\underline{E}_{n,1}$, $\underline{H}_{n,2}$ und $\underline{E}_{n,2}$ muss mit der Flächenladungsdichte σ (Einheit $\frac{\text{As}}{\text{m}^2}$) gelten, dass

$$\underline{D}_{n,1} - \underline{D}_{n,2} = \sigma = 0 \quad \iff \quad E_{n,2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} E_{n,1}$$

$$\underline{B}_{n,1} - \underline{B}_{n,2} = 0.$$

Lösungsansatz für H-Wellen

- Wir wollen zunächst elektromagnetische H-Wellen betrachten, die innerhalb des Wellenleiters geführt werden und deren Felder für $y \rightarrow \pm\infty$ verschwinden.
- Damit wir eine geführte Welle mit räumlich konstanter transversaler Verteilung beobachten können, muss die Ausbreitungskonstante \underline{k}_z in allen Medien identisch sein, d.h. $\underline{k}_z = \underline{k}_{z,1} = \underline{k}_{z,2}$.
- Außerdem muss für die Führung innerhalb des Wellenleiters Totalreflexion an den Grenzflächen auftreten und daher $k_2 < k_z < k_1$ gelten.
- Wegen $k_2^2 = \underline{k}_{y,2}^2 + k_z^2$ ist die transversale Wellenzahlen $\underline{k}_{y,2}$ also rein imaginär.
- Damit erhalten wir für H-Wellen Lösungen der Form

$$\underline{H}_z = \underline{H}_0 \begin{cases} \sin(\underline{k}_{y,1}y + \psi) & |y| \leq \frac{d}{2} \\ A \exp(-j \underline{k}_{y,2}(y - d/2)) & y > +\frac{d}{2} \\ B \exp(j \underline{k}_{y,2}(y + d/2)) & y < -\frac{d}{2} \end{cases} .$$

Stetigkeitsbedingungen für H-Wellen (I)

- Um die Stetigkeitsbedingungen für das magnetische Feld an den Grenzfläche $y = \pm d/2$ zu erfüllen, muss auch \underline{H}_z in $y = \pm \frac{d}{2}$ stetig sein.
- Wir erhalten daher $A = \sin(\underline{k}_{y,1}d/2 + \psi)$ bzw. $B = \sin(-\underline{k}_{y,1}d/2 + \psi)$ und entsprechend

$$\underline{H}_z = \underline{H}_0 \begin{cases} \sin(\underline{k}_{y,1}y + \psi) & |y| \leq \frac{d}{2} \\ \sin(\underline{k}_{y,1}d/2 + \psi) \exp(-j \underline{k}_{y,2}(y - d/2)) & y > +\frac{d}{2} \\ -\sin(\underline{k}_{y,1}d/2 - \psi) \exp(j \underline{k}_{y,2}(y + d/2)) & y < -\frac{d}{2} \end{cases} .$$

Stetigkeitsbedingungen für H-Wellen (II)

- Aus der H_z -Komponente erhalten wir für die ebenfalls tangential zur Grenzfläche orientierte E_x -Komponente den Ausdruck

$$\underline{E}_x = -j \frac{\omega \mu}{\underline{k}_t^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = -j \omega \mu_0 \underline{H}_0 \begin{cases} \frac{1}{\underline{k}_{y,1}} \cos(\underline{k}_{y,1} y + \psi) & |y| \leq \frac{d}{2} \\ \frac{-j}{\underline{k}_{y,2}} \sin(\underline{k}_{y,1} d/2 + \psi) \exp(-j \underline{k}_{y,2} (y - d/2)) & y > +\frac{d}{2} \\ \frac{-j}{\underline{k}_{y,2}} \sin(\underline{k}_{y,1} d/2 - \psi) \exp(j \underline{k}_{y,2} (y + d/2)) & y < -\frac{d}{2} \end{cases} .$$

- Auch diese muss an den Grenzflächen stetig sein, weshalb wir fordern, dass

$$\frac{1}{\underline{k}_{y,1}} \cos\left(\underline{k}_{y,1} \frac{d}{2} + \psi\right) = \frac{1}{j \underline{k}_{y,2}} \sin\left(\underline{k}_{y,1} \frac{d}{2} + \psi\right) \quad \Rightarrow \quad \tan\left(\underline{k}_{y,1} \frac{d}{2} + \psi\right) = \frac{j \underline{k}_{y,2}}{\underline{k}_{y,1}}$$

$$\frac{1}{\underline{k}_{y,1}} \cos\left(\underline{k}_{y,1} \frac{d}{2} - \psi\right) = \frac{1}{j \underline{k}_{y,2}} \sin\left(\underline{k}_{y,1} \frac{d}{2} - \psi\right) \quad \Rightarrow \quad \tan\left(\underline{k}_{y,1} \frac{d}{2} - \psi\right) = \frac{j \underline{k}_{y,2}}{\underline{k}_{y,1}}$$

Eigenwertgleichung für H-Wellen (I)

- Mithilfe der Variablen $U = \underline{k}_{y,1}d/2$ und $W = j \underline{k}_{y,2}d/2$ können wir die beiden Forderungen folgendermaßen ausdrücken (wobei wir die Periodizität des Tangens durch $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ berücksichtigen)

$$U + \psi = \arctan\left(\frac{W}{U}\right) + m_1\pi \quad \text{und} \quad U - \psi = \arctan\left(\frac{W}{U}\right) + m_2\pi$$

- Addieren bzw. subtrahieren wir beide Gleichungen, ergibt sich mit $m = m_1 + m_2$ und $m' = m_1 - m_2$

$$U = \arctan\left(\frac{W}{U}\right) + m\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \psi = m'\frac{\pi}{2}.$$

- Wegen $m' = 2m_1 - m$ erhalten wir für festes m lediglich Werte m' , welche sich um ein gerades Vielfaches $2m_1$ von m unterscheiden.
- Folglich unterscheiden sich auch die möglichen Werte von ψ für ein gegebenes m stets um ein ganzzahliges Vielfaches von π .

Eigenwertgleichung für H-Wellen (II)

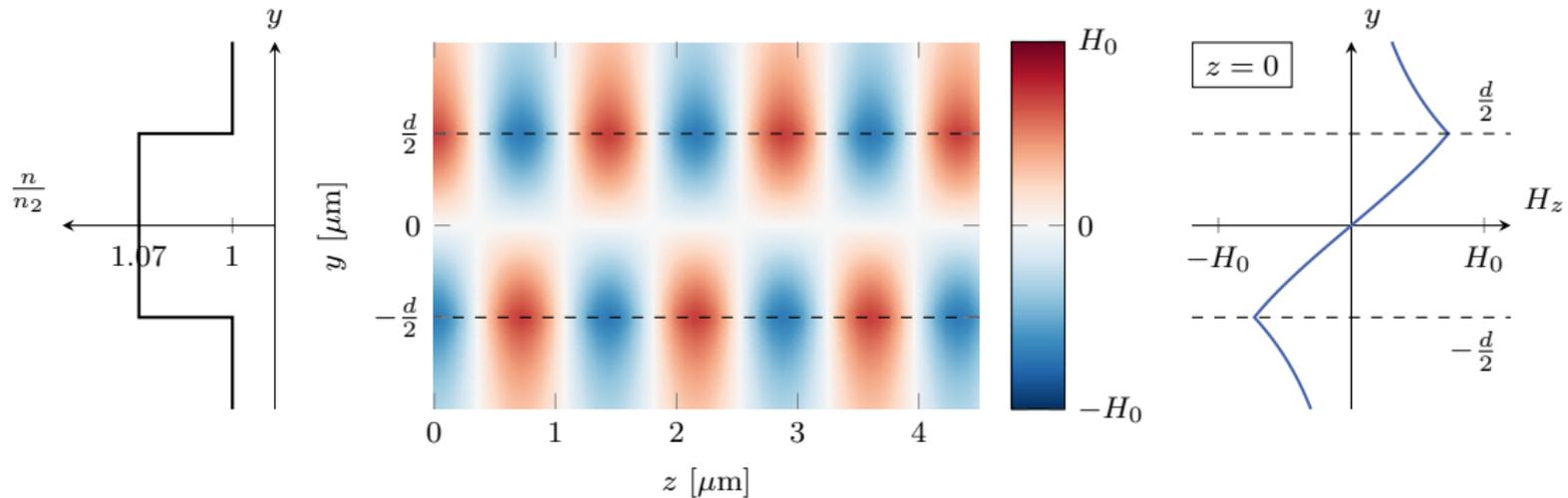
- Da wir für alle $\psi = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ das gleiche Modenfeld erhalten, können wir stets $\psi = -m\frac{\pi}{2}$ wählen.
- Abschließend führen wir $V^2 = U^2 + W^2 = \frac{d^2}{4} k_0^2 (n_1^2 - n_2^2)$ ein. Dann können wir die Gleichung mit dem Arkustangens so umformen, dass wir gerade das Ergebnis von Folie 12 erhalten

$$\tan\left(U - m\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{V^2 - U^2}}{U} \quad \Longleftrightarrow \quad U \tan\left(U - m\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{V^2 - U^2}.$$

- Lösen wir die Eigenwertgleichung, erhalten wir aus dem Resultat für U die transversalen Wellenzahlen $k_{y,1}$ sowie $k_{y,2}$ und wiederum daraus die Ausbreitungskonstante k_z .
- Mit $\psi = -m\frac{\pi}{2}$ können wir schließlich alle elektrischen und magnetischen Feldkomponenten der H-Welle erhalten.

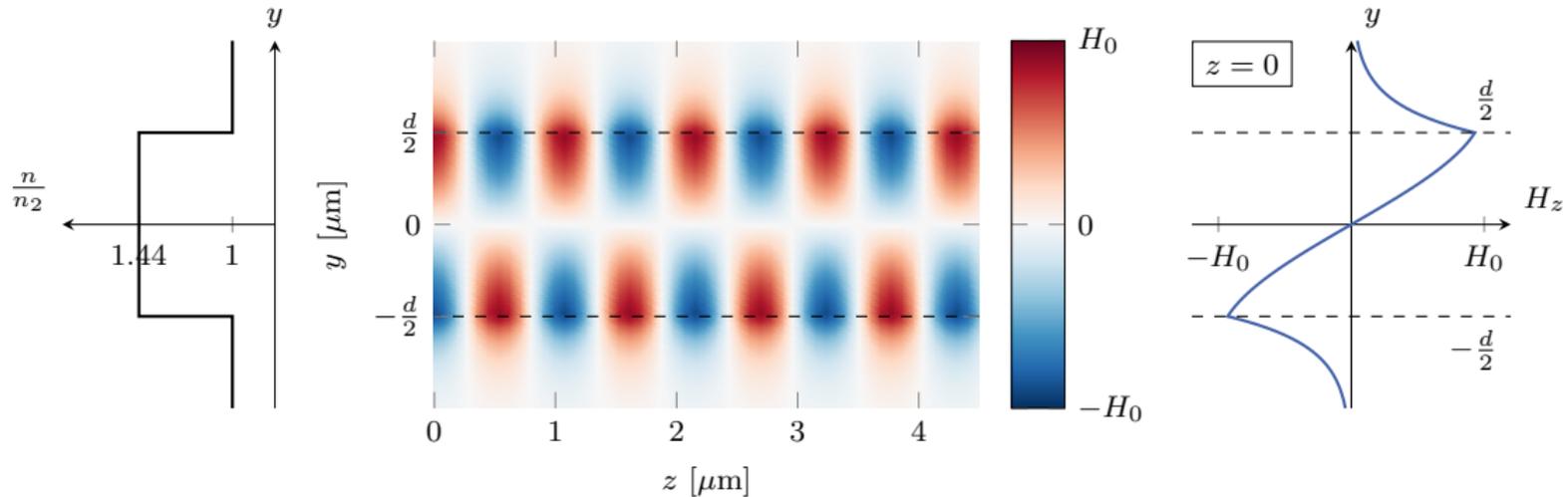
Amplitudenverteilung von H_z für $m = 0$ (I)

- Die Abbildung in der Mitte zeigt die z -Komponente $H_z = \Re\{\underline{H}_z\}$ der TE_0 Mode zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ebene $x = 0$. Rechts ist zusätzlich die Verteilung bei $z = 0$ abgebildet.
- Die Abbildung links stellt das normierte Brechzahlprofil entlang y dar. Es gilt $n_1 = 1.07n_2$.



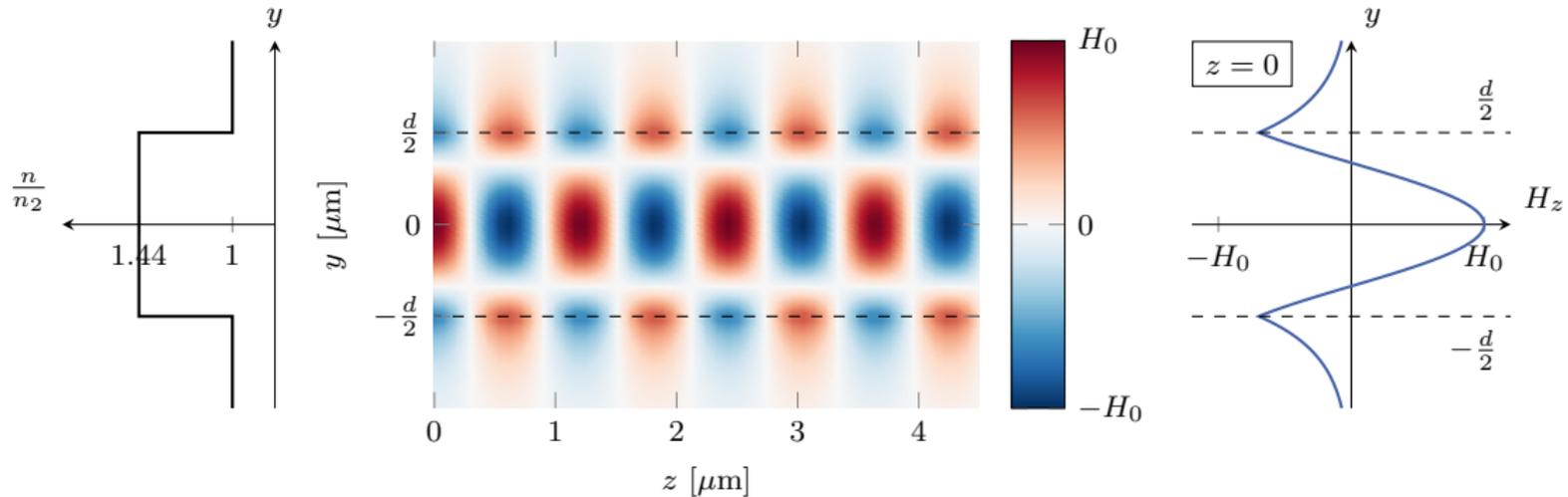
Amplitudenverteilung von H_z für $m = 0$ (II)

- Die Abbildung in der Mitte zeigt die z -Komponente $H_z = \Re\{\underline{H}_z\}$ der TE_0 Mode zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ebene $x = 0$. Rechts ist zusätzlich die Verteilung bei $z = 0$ abgebildet.
- Die Abbildung links stellt das normierte Brechzahlprofil entlang y dar. Es gilt $n_1 = 1.44n_2$.



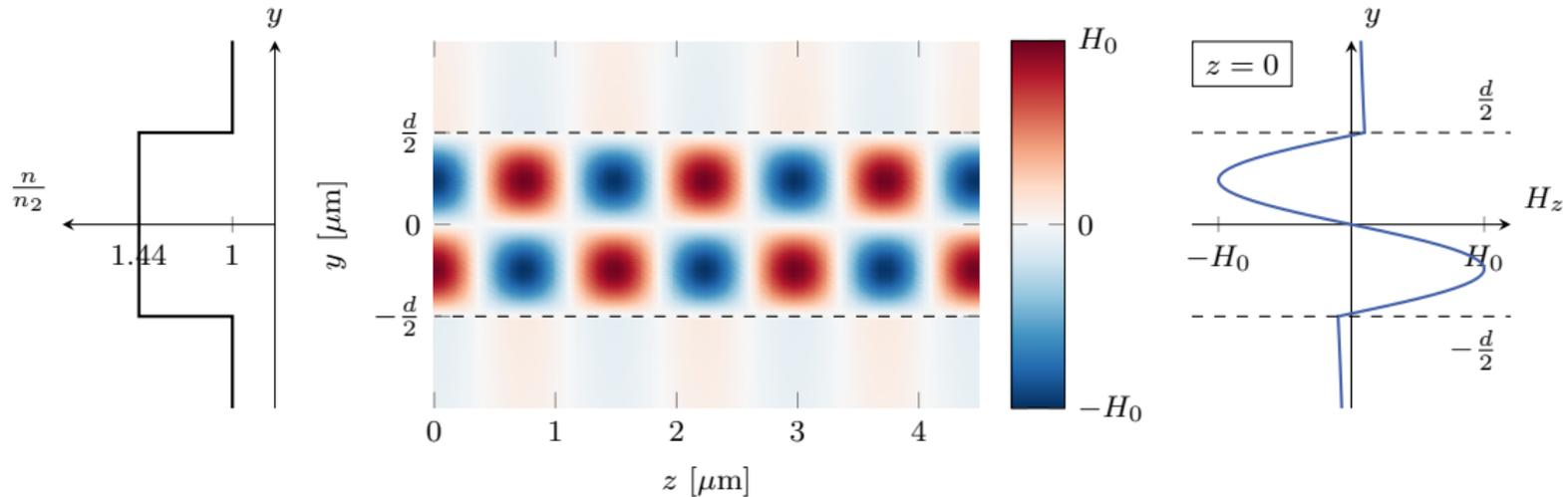
Amplitudenverteilung von H_z für $m = 1$

- Die Abbildung in der Mitte zeigt die z -Komponente $H_z = \Re\{\underline{H}_z\}$ der TE_1 Mode zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ebene $x = 0$. Rechts ist zusätzlich die Verteilung bei $z = 0$ abgebildet.
- Die Abbildung links stellt das normierte Brechzahlprofil entlang y dar. Es gilt $n_1 = 1.44n_2$.



Amplitudenverteilung von H_z für $m = 2$

- Die Abbildung in der Mitte zeigt die z -Komponente $H_z = \Re\{\underline{H}_z\}$ der TE_2 Mode zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ebene $x = 0$. Rechts ist zusätzlich die Verteilung bei $z = 0$ abgebildet.
- Die Abbildung links stellt das normierte Brechzahlprofil entlang y dar. Es gilt $n_1 = 1.44n_2$.



Lösungsansatz für E-Wellen

- Nun betrachten wir elektromagnetische E-Wellen innerhalb des dielektrischen Schichtwellenleiters.
- Damit wir eine geführte Welle mit räumlich konstanter transversaler Verteilung beobachten können, muss die Ausbreitungskonstante \underline{k}_z in allen Medien identisch sein, d.h. $\underline{k}_z = \underline{k}_{z,1} = \underline{k}_{z,2}$.
- Außerdem muss für die Führung innerhalb des Wellenleiters Totalreflexion an den Grenzflächen auftreten und daher $k_2 < k_z < k_1$ gelten.
- Wegen $k_2^2 = \underline{k}_{y,2}^2 + k_z^2$ ist die transversale Wellenzahlen $\underline{k}_{y,2}$ also rein imaginär.
- Damit erhalten wir für E-Wellen Lösungen der Form

$$\underline{E}_z = \underline{E}_0 \begin{cases} \sin(\underline{k}_{y,1}y + \psi) & |y| \leq \frac{d}{2} \\ A \exp(-j \underline{k}_{y,2}(y - d/2)) & y > +\frac{d}{2} \\ B \exp(j \underline{k}_{y,2}(y + d/2)) & y < -\frac{d}{2} \end{cases} .$$

Stetigkeitsbedingungen für E-Wellen (I)

- Um die Stetigkeitsbedingungen für das elektrische Feld an den Grenzfläche $y = \pm d/2$ zu erfüllen, muss auch \underline{E}_z in $y = \pm \frac{d}{2}$ stetig sein.
- Wir erhalten daher $A = \sin(\underline{k}_{y,1}d/2 + \psi)$ bzw. $B = \sin(-\underline{k}_{y,1}d/2 + \psi)$ und entsprechend

$$\underline{E}_z = \underline{E}_0 \begin{cases} \sin(\underline{k}_{y,1}y + \psi) & |y| \leq \frac{d}{2} \\ \sin(\underline{k}_{y,1}d/2 + \psi) \exp(-j \underline{k}_{y,2}(y - d/2)) & y > +\frac{d}{2} \\ -\sin(\underline{k}_{y,1}d/2 - \psi) \exp(j \underline{k}_{y,2}(y + d/2)) & y < -\frac{d}{2} \end{cases} .$$

Stetigkeitsbedingungen für E-Wellen (II)

- Aus der E_z -Komponente erhalten wir für die ebenfalls tangential zur Grenzfläche orientierte H_x -Komponente den Ausdruck

$$\underline{H}_x = j \frac{\omega \varepsilon}{\underline{k}_t^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} = j \omega \varepsilon_0 \underline{E}_0 \begin{cases} \frac{n_1^2}{\underline{k}_{y,1}} \cos(\underline{k}_{y,1} y + \psi) & |y| \leq \frac{d}{2} \\ \frac{-j n_2^2}{\underline{k}_{y,2}} \sin(\underline{k}_{y,1} d/2 + \psi) \exp(-j \underline{k}_{y,2} (y - d/2)) & y > +\frac{d}{2} \\ \frac{-j n_2^2}{\underline{k}_{y,2}} \sin(\underline{k}_{y,1} d/2 - \psi) \exp(j \underline{k}_{y,2} (y + d/2)) & y < -\frac{d}{2} \end{cases} .$$

- Auch diese muss an den Grenzflächen stetig sein, weshalb wir fordern, dass

$$\begin{aligned} \frac{n_1^2}{\underline{k}_{y,1}} \cos\left(\underline{k}_{y,1} \frac{d}{2} + \psi\right) &= \frac{n_2^2}{j \underline{k}_{y,2}} \sin\left(\underline{k}_{y,1} \frac{d}{2} + \psi\right) &\implies & \frac{n_2^2}{n_1^2} \tan\left(\underline{k}_{y,1} \frac{d}{2} + \psi\right) = \frac{j \underline{k}_{y,2}}{\underline{k}_{y,1}} \\ \frac{n_1^2}{\underline{k}_{y,1}} \cos\left(\underline{k}_{y,1} \frac{d}{2} - \psi\right) &= \frac{n_2^2}{j \underline{k}_{y,2}} \sin\left(\underline{k}_{y,1} \frac{d}{2} - \psi\right) &\implies & \frac{n_2^2}{n_1^2} \tan\left(\underline{k}_{y,1} \frac{d}{2} - \psi\right) = \frac{j \underline{k}_{y,2}}{\underline{k}_{y,1}} \end{aligned}$$

Eigenwertgleichung für E-Wellen

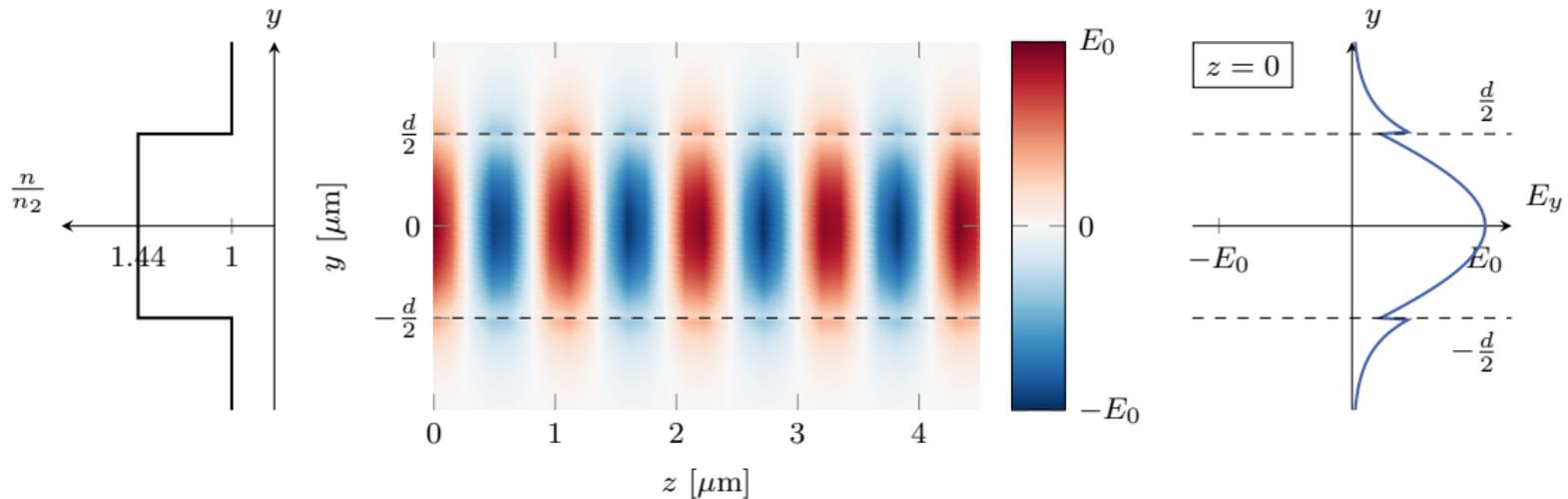
- Mithilfe der Variablen $U = \underline{k}_{y,1}d/2$, $W = j\underline{k}_{y,2}d/2$ und $V^2 = U^2 + W^2 = \frac{d^2}{4}k_0^2(n_1^2 - n_2^2)$ erhalten wir analog zu den H-Wellen

$$\tan\left(U - m\frac{\pi}{2}\right) = \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\sqrt{V^2 - U^2}}{U} \quad \Longleftrightarrow \quad U \tan\left(U - m\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sqrt{V^2 - U^2}.$$

- Erwartungsgemäß ist dieses Ergebnis identisch zu dem von Folie 13.
- Mit $\psi = -m\frac{\pi}{2}$ können wir schließlich aus der Lösung U alle elektrischen und magnetischen Feldkomponenten der E-Welle erhalten.

Amplitudenverteilung von E_y für $m = 0$

- Die Abbildung in der Mitte zeigt die normierte y -Komponente $\frac{k_{y,i}^2}{k_z^2} E_y = \Re\{\frac{k_{y,i}^2}{k_z^2} \underline{E}_y\}$ der TM_0 Mode zum Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{2\omega}$ in der Ebene $x = 0$. Rechts ist zusätzlich die Verteilung bei $z = 0$ abgebildet.
- Die Abbildung links stellt das normierte Brechzahlprofil entlang y dar. Es gilt $n_1 = 1.44n_2$.



Vorlesungsinhalte

1. Dielektrischer Schichtwellenleiter
2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter
3. Geführte E-Wellen und H-Wellen
- 4. Was Sie gelernt haben sollten**
5. Anhang
 - Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion

Was Sie gelernt haben sollten

- Welche Bedingungen für die Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter erfüllt sein müssen.
- Wie sich die Totalreflexion an einer Grenzfläche auf elektromagnetische Wellen auswirkt.
- Wieso nur für diskrete Winkel gegenüber der Grenzflächen Wellenausbreitung möglich ist.
- Wie die Eigenwertgleichung für senkrechte bzw. parallele Polarisation graphisch gelöst werden und wie daraus auf die Anzahl ausbreitungsfähiger Moden geschlossen werden kann.
- Welche Parameter des Wellenleiters bzw. der Welle die Zahl der ausbreitungsfähigen Moden bestimmen.
- Dass die Ausbreitungskonstanten bei paralleler Polarisation i.A. kleiner sind als bei senkrechter Polarisation.
- Wie sich elektromagnetische Wellen an der Grenzfläche zweier Dielektrika verhalten.
- Wie wir die Wellengleichung im Schichtwellenleiter lösen können und welche Bedingungen die Lösungen erfüllen müssen.
- Welchen Einfluss das Brechzahlprofil auf die Feldbilder der Wellenleitermoden hat.

Vorlesungsinhalte

1. Dielektrischer Schichtwellenleiter
2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter
3. Geführte E-Wellen und H-Wellen
4. Was Sie gelernt haben sollten
- 5. Anhang**
 - Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion

Fresnelsche Beziehungen und Totalreflexion (I)

- Die Fresnelschen Beziehungen hatten wir zuvor hergeleitet als

$$\underline{r}_s = \frac{n_1 \cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{r}_p = \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - n_1 \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{t}_s = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{t}_p = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)}$$

- Im Fall $n_1 \leq n_2$ gilt für alle Einfallswinkel $\alpha_1 \in [0, \pi/2]$ nach dem Brechungsgesetz $\sin(\alpha_2) = \frac{n_1}{n_2} \sin(\alpha_1) \leq 1$ und somit $\cos(\alpha_2) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha_2)} \leq 1$. Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sind reellwertig, also gilt

$$\arg(\underline{r}) = \arg(\underline{t}) = 0$$

- Letzteres gilt auch im Fall $n_1 > n_2$ für Einfallswinkel kleiner dem Grenzwinkel der Totalreflexion $\alpha_1 \leq \alpha_{1,G} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$.

Fresnelsche Beziehungen und Totalreflexion (II)

- Für den Fall $n_1 > n_2$ und $\alpha_1 > \alpha_{1,G}$ kommt es jedoch zur Totalreflexion und wir erhalten $\sin(\alpha_2) > 1$. Daraus folgt, dass der folgende Ausdruck rein imaginär wird

$$\cos(\alpha_2) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha_2)} = j \sqrt{\sin^2(\alpha_2) - 1} = j \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2(\alpha_1) - 1}.$$

- Mit $a = n_1 \cos(\alpha_1)$ und $b = -j n_2 \cos(\alpha_2) = \sqrt{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}$ erhalten wir für senkrechte Polarisation

$$\underline{r}_s = \frac{a - j b}{a + j b} \quad \text{und} \quad \underline{t}_s = \frac{2a}{a + j b}$$

und somit nach kurzer Nebenrechnung $\arg(\underline{t}_s) = \frac{1}{2} \arg(\underline{r}_s)$ und

$$\arg(\underline{r}_s) = -2 \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -2 \arctan\left(\sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_1^2 \cos^2(\alpha_1)}}\right)$$

Fresnelsche Beziehungen und Totalreflexion (III)

- Führen wir $c = n_2 \cos(\alpha_1)$ und $d = -j n_1 \cos(\alpha_2) = n_1 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2(\alpha_1) - 1}$ ein, erhalten wir für parallele Polarisation

$$\underline{r}_p = \frac{c - j d}{c + j d} \quad \text{und} \quad \underline{t}_p = \frac{2a}{c + j d}$$

und somit nach kurzer Nebenrechnung $\arg(\underline{t}_p) = \frac{1}{2} \arg(\underline{r}_p)$ und

$$\arg(\underline{r}_p) = -2 \arctan\left(\frac{d}{c}\right) = -2 \arctan\left(\frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_2^2 \cos^2(\alpha_1)}}\right)$$