

EMFW Vorlesung 01: Einführung

Wintersemester 2025/26

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 16. Dezember 2025

Vorlesungsinhalte

1. Organisatorisches

2. Maxwell'sche Gleichungen: Quasistationäre Felder

3. Wechselwirkungen von Feldern und Materialien

4. Maxwell'sche Gleichungen: Beliebige Zeitabhängigkeit

5. Anwendungen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Krummlinige Koordinatensysteme

Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Literatur

Vorlesungsinhalte

1. Organisatorisches

2. Maxwell'sche Gleichungen: Quasistationäre Felder

3. Wechselwirkungen von Feldern und Materialien

4. Maxwell'sche Gleichungen: Beliebige Zeitabhängigkeit

5. Anwendungen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Krummlinige Koordinatensysteme

Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Literatur

Allgemeine Informationen zur Lehrveranstaltung

- Die Vorlesungs- und Übungsmaterialien sowie alle anderen aktuellen Informationen zur Lehrveranstaltung (Umfragen, Klausurtermin, usw.) finden Sie in dem EMFW ILIAS-Kurs.
- Für Fragen zu der Vorlesung, der Übung oder den Tutorien stehen Ihnen die entsprechenden Foren im ILIAS-Kurs zur Verfügung.
- Mit den Lernfragen der letzten Folie einer jeden Vorlesung können Sie prüfen, ob Sie die jeweiligen Vorlesungsinhalte verstanden haben (keine Gewähr auf Vollständigkeit).
- Als begleitende Literatur zu der Lehrveranstaltung eignet sich z.B. Heino Henke. *Elektromagnetische Felder: Theorie und Anwendung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. doi: 10.1007/978-3-662-62235-3.

Allgemeine Informationen zu den Prüfungen

- Neben der Klausur in „Elektromagnetische Felder und Wellen“, wird auch eine Klausur in „Elektromagnetische Wellen“ angeboten:
 - Zweistündige Prüfung (120 min) in „Elektromagnetische Felder und Wellen“ am 11.03.2026:
7300063 - Elektromagnetische Felder und Wellen
 - Einstündige Prüfung (60 min) in „Elektromagnetische Wellen“ am 11.03.2026:
7300012 - Elektromagnetische Wellen
- An welcher der Prüfungen Sie teilnehmen müssen, entnehmen Sie bitte Ihrer Studien- und Prüfungsordnung.
- Nähere Informationen zu den einzelnen Prüfungen, etwa zur Uhrzeit oder den Hörsaalverteilungen, werden zu einem späteren Zeitpunkt an die Mitglieder des ILIAS-Kurses verteilt.

Hinweis

Voraussichtlich findet innerhalb von ein bis zwei Wochen vor der Klausur ein Lerncafé zu „Elektromagnetische Felder und Wellen“ statt. Nähere Informationen folgen zu einem späteren Zeitpunkt.

Agenda: Vorlesung & Übung

- Die Vorlesungen und **Übungen** finden im Wintersemester 2025/26 zu folgenden Terminen statt:

| KW | Dienstag 09:45-11:15 (Geb. 30.22) | Mittwoch 11:30-13:00 (Geb. 30.22) | Freitag 14:00-15:30 (Geb. 20.40) |
|----|--|---|--------------------------------------|
| 51 | 16.12.25 VL01: Einführung | 17.12.25 VL02: Ebene Wellen | 19.12.25 UE01: Ebene Wellen |
| 52 | - | - | - |
| 01 | - | - | - |
| 02 | - | 07.01.26 VL03: Poynting-Vektor | 09.01.26 UE02: Poynting-Vektor |
| 03 | 13.01.26 VL04: Dispersive Medien | 14.01.26 VL05: Hertzscher Dipol | 16.01.26 UE03: Dispersive Medien |
| 04 | 20.01.26 VL06: Grenzflächen | 21.01.26 VL07: Beugung & Interferenz | 23.01.26 UE04: Hertzscher Dipol |
| 05 | 27.01.26 VL08: Parallelplattenleiter | 28.01.26 VL09: Rechteckhohlleiter | 30.01.26 UE05: Grenzflächen |
| 06 | 03.02.26 VL10: Schichtwellenleiter (I) | 04.02.26 VL11: Schichtwellenleiter (II) | 06.02.26 UE06: Beugung & Interferenz |
| 07 | 10.02.26 Vorstellung IPQ & Labortour | 11.02.26 UE07: Hohlleiter | 13.02.26 UE08: Schichtwellenleiter |
| 08 | - | - | - |

Agenda: Tutorien

- Die **Tutorientermine** bleiben bezüglich Zeit und Ort unverändert gegenüber „Elektromagnetische Felder“ – das Angebot ist jedoch reduziert.
- Die Tutorien finden in den **Kalenderwochen 4 bis 7** in folgenden Zeitslots statt:

| Gruppe | Tag | Zeit | Gebäude & Raum |
|--------|---------------------|--------------------------|-------------------------|
| 01 | Montag | 08:00 – 09:30 | 30.96 SR 104 |
| 02 | Dienstag | 15:45 – 17:15 | 30.96 SR 006 |
| 03 | Dienstag | 17:30 – 19:00 | 30.96 SR 104 |
| 04 | Mittwoch | 14:00 – 15:30 | 11.10 SR 016 |
| 05 | Mittwoch | 17:30 – 19:00 | 30.96 SR 104 |
| 06 | Mittwoch | 17:30 – 19:00 | 30.96 SR 006 |
| 07 | Donnerstag | 17:30 – 19:00 | 30.96 SR 104 |
| 08 | Donnerstag | 17:30 – 19:00 | 30.96 SR 006 |
| 09 | Freitag | 11:30 – 13:00 | 11.10 SR 016 |
| 10 | Freitag | 15:45 – 17:15 | 30.96 SR 104 |
| 11 | Freitag | 15:45 – 17:15 | 30.96 SR 006 |

Vorlesungsinhalte

1. Organisatorisches

2. Maxwell'sche Gleichungen: Quasistationäre Felder

3. Wechselwirkungen von Feldern und Materialien

4. Maxwell'sche Gleichungen: Beliebige Zeitabhängigkeit

5. Anwendungen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Krummlinige Koordinatensysteme

Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Literatur

Maxwellsche Gleichungen: Physikalische Größen

- Die Maxwellschen Gleichungen bilden das Fundament der Elektrodynamik.
- Sie beschreiben unter gegebenen Randbedingungen den Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern untereinander sowie mit ruhenden und bewegten elektrischen Ladungen.
- Dabei verknüpfen sie die folgenden physikalischen Größen:

| Bezeichnung | Symbol | Einheit | alternative Bezeichnungen |
|--------------------------|--------|----------------------|---|
| elektrische Feldstärke | E | $\frac{V}{m}$ | E-Feld |
| Verschiebungsflusddichte | D | $\frac{As}{m^2}$ | elektrische Flusddichte, dielektrische Verschiebung |
| magnetische Feldstärke | H | $\frac{A}{m}$ | H-Feld |
| magnetische Flusddichte | B | $T = \frac{Vs}{m^2}$ | magnetische Induktion, Magnetfeld, B-Feld |
| Stromdichte | J | $\frac{A}{m^2}$ | Leitungsstromdichte, Dichte der freien Ströme |
| Raumladungsdichte | ρ | $\frac{As}{m^3}$ | |

Rückblick: Quasistationäre Felder

- Betrachten wir quasistationäre Felder, gehen wir von zeitlich „langsamen“ Änderungen aus.
- Mathematisch bedeutet „langsam“, dass die sogenannte *Verschiebungsstromdichte* $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ klein gegenüber der Stromdichte \mathbf{J} ist, d.h. $|\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}| \ll |\mathbf{J}|$ gilt.
- Dann lauten die Maxwell'schen Gleichungen in Integralform:

Wirbelfelder

(I) Ampèresches Gesetz $\oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_F \mathbf{J} \cdot d\mathbf{F} = I \implies$ Bewegte Ladungen erzeugen H-Felder

(II) Induktionsgesetz $\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} \implies$ Zeitveränderliche B-Felder erzeugen E-Felder

Quellenfelder

(III) Gaußsches Gesetz $\oint_O \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} = \int_V \rho dV = Q \implies$ Ladungen sind Quellen des E-Feldes

(IV) $\oint_O \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = 0 \implies$ B-Feld ist quellenfrei

Nabla-Operator

- Mithilfe des Nabla-Operators ∇ können für ein beliebiges Skalarfeld ψ bzw. ein beliebiges Vektorfeld \mathbf{A} die drei Differentialoperatoren der Vektoranalysis geschrieben werden als:

Gradient

$$\text{grad}(\psi) \triangleq \nabla \psi$$

Divergenz

$$\text{div}(\mathbf{A}) \triangleq \nabla \cdot \mathbf{A}$$

Rotation ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$)

$$\text{rot}(\mathbf{A}) \triangleq \nabla \times \mathbf{A}$$

- Der Nabla-Operator kann als vektorielle Rechengröße betrachtet werden, deren Elemente an das jeweilige Koordinatensystem (vgl. Folien 39 und 40 im Anhang) anzupassen sind:

Kartesische Koordinaten (x, y, z)

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten (r, ϑ, ϕ)

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

- Allgemein gelten die folgenden Beziehungen:

$$\nabla \times (\nabla \psi) \equiv 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) \equiv (\nabla \psi) \cdot \mathbf{A} + \psi \nabla \cdot \mathbf{A}$$

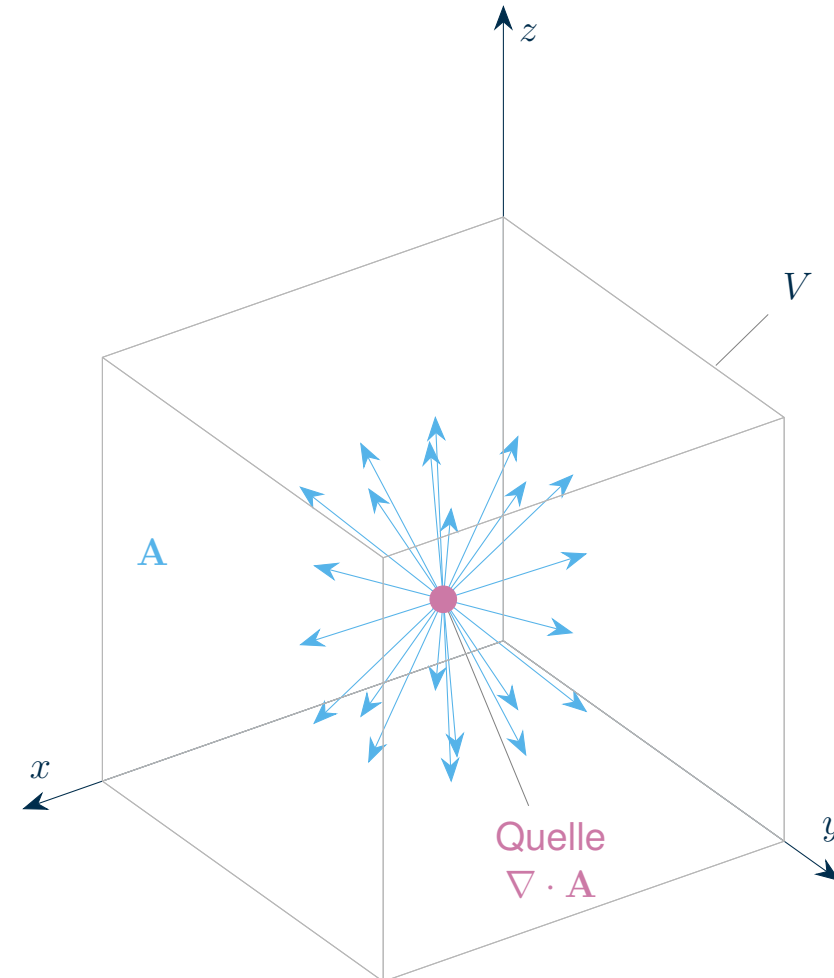
$$\nabla \times (\psi \mathbf{A}) \equiv (\nabla \psi) \times \mathbf{A} + \psi \nabla \times \mathbf{A}$$

Integralsätze der Vektorrechnung: Gaußscher Satz

- Der *Gaußsche Integralsatz* besagt, dass das Volumenintegral der Divergenz eines Vektorfeldes gleich dem Flächenintegral des Vektorfeldes über die geschlossene Oberfläche O des Volumens V ist. D.h.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \oint_O \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F}$$

- Anschaulich gesprochen: Der Fluss durch die Oberfläche ist gleich zu dem, was die Gesamtheit der Quellen innerhalb des von der Oberfläche eingeschlossenen Volumens hervorbringen.

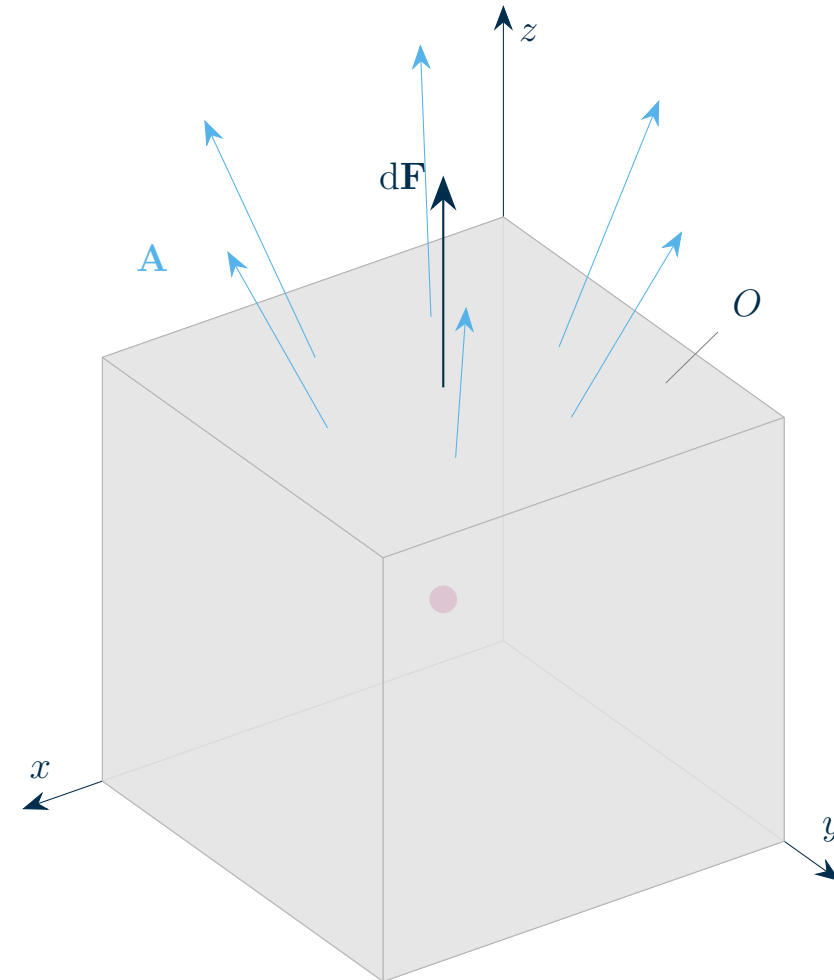


Integralsätze der Vektorrechnung: Gaußscher Satz

- Der *Gaußsche Integralsatz* besagt, dass das Volumenintegral der Divergenz eines Vektorfeldes gleich dem Flächenintegral des Vektorfeldes über die geschlossene Oberfläche O des Volumens V ist. D.h.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \oint_O \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F}$$

- Anschaulich gesprochen: Der Fluss durch die Oberfläche ist gleich zu dem, was die Gesamtheit der Quellen innerhalb des von der Oberfläche eingeschlossenen Volumens hervorbringen.

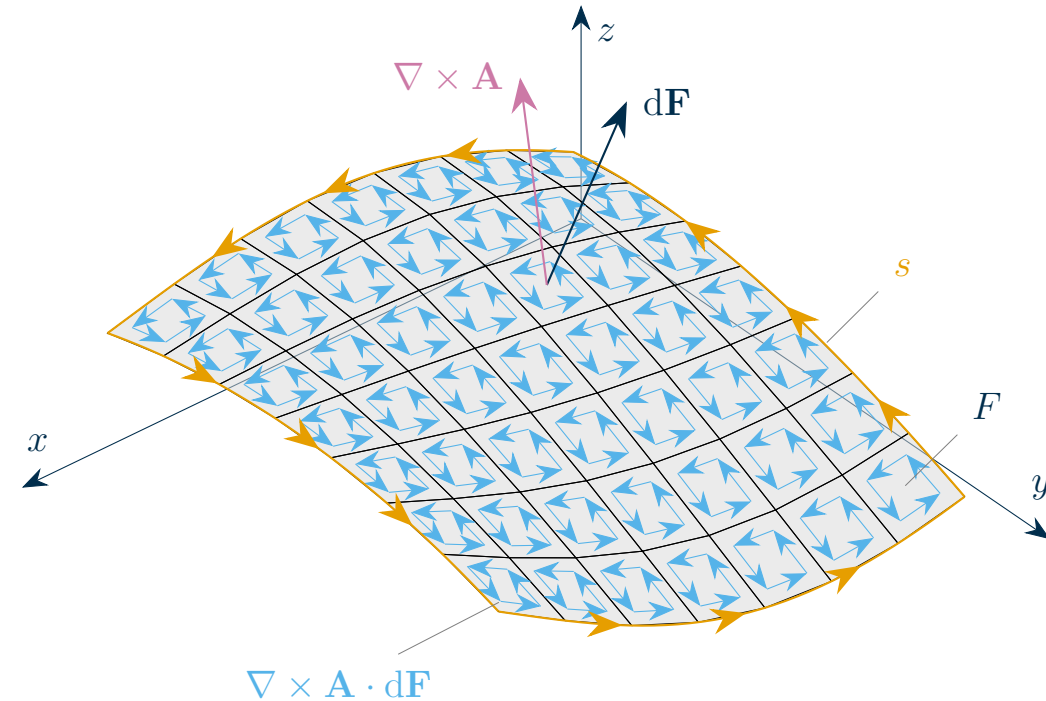


Integralsätze der Vektorrechnung: Stokescher Satz

- Der *Stokessche Integralsatz* besagt, dass das Flächenintegral der Rotation eines Vektorfeldes gleich dem Linienintegral des Vektorfeldes längs des Randes s der Fläche F ist. D.h.

$$\int_F \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F} = \oint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

- Anschaulich gesprochen: Die Wirkung der Wirbel $\nabla \times \mathbf{A}$ innerhalb einer Fläche hebt sich bei der Integration gegenseitig auf (entgegengesetzte Pfeilrichtungen), einzig die Beiträge am Rand tragen zum Integral bei.



Maxwellsche Gleichungen für quasistationäre Felder

- Mittels des Stokesschen und des Gaußschen Integralsatzes können die Maxwellschen Gleichungen aus der Integralform in die differentielle Form überführt werden.
- In differentieller Form lauten die Maxwellschen Gleichungen für quasistationäre Felder dann:

Wirbelfelder

(I) Ampèresches Gesetz $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \implies$ Bewegte Ladungen erzeugen H-Felder

(II) Induktionsgesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies$ Zeitveränderliche B-Felder erzeugen E-Felder

Quellenfelder

(III) Gaußsches Gesetz $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \implies$ Ladungen sind Quellen des E-Feldes

(IV) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies$ B-Feld ist quellenfrei

Vorlesungsinhalte

1. Organisatorisches

2. Maxwell'sche Gleichungen: Quasistationäre Felder

3. Wechselwirkungen von Feldern und Materialien

4. Maxwell'sche Gleichungen: Beliebige Zeitabhängigkeit

5. Anwendungen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Krummlinige Koordinatensysteme

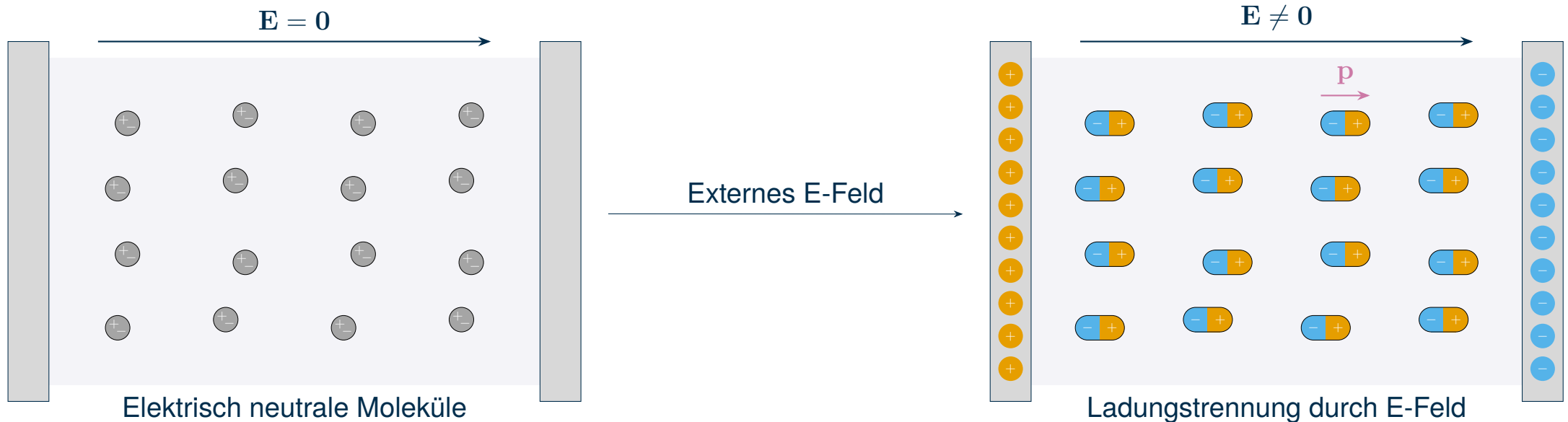
Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Literatur

Elektrische Polarisation

- Ein externes elektrisches Feld \mathbf{E} verschiebt in dielektrischen Materialien gebundene positive und negative Ladungen $\pm q$ leicht gegeneinander um $\Delta \mathbf{l}$, wodurch viele kleine elektrische Dipole entstehen.
- Die elektrische Polarisation \mathbf{P} ist das mittlere **Dipolmoment** \mathbf{p} pro Volumenelement ΔV :

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{p}_i = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i q_i \Delta \mathbf{l}_i.$$



Materialgleichungen: Elektrisches Feld (I)

- In den meisten Medien besteht ein *linearer*, *isotroper* und näherungsweise *gedächtnisfreier* Zusammenhang zwischen \mathbf{P} und \mathbf{E} .
- Diese drei Eigenschaften drücken dabei prinzipiell folgendes aus:
 - **Linearität:** Das elektrische Polarisationsfeld \mathbf{P} ist direkt proportional zu dem anliegenden elektrischen Feld. In nichtlinearen Medien hingegen, hängt das Polarisationsfeld von der Intensität des elektrischen Felds ab.
 - **Isotropie:** Die Materialeigenschaften sind unabhängig von der Richtung, in die der elektrische Feldvektor \mathbf{E} zeigt.
 - **Gedächtnisfreiheit:** Beeinflussungen der Materialeigenschaften durch externe Größen (z.B. die elektrische Polarisation durch ein externes E-Feld), bestehen instantan und nur so lange der beeinflussende Faktor wirkt.
- Vereinfacht ausgedrückt beschreibt das elektrische Polarisationsfeld \mathbf{P} also die Wechselwirkung zwischen dem Medium und dem externen elektrischen Feld \mathbf{E} .

Materialgleichungen: Elektrisches Feld (II)

- Nehmen wir ein lineares, isotropes und gedächtnisfreies Medium an, erhalten wir die Verschiebungsstromdichte

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

- Dabei bezeichnet ε die *Permittivität* des Mediums.

| Parameter | Wert |
|---|---|
| Elektrische Suszeptibilität χ_e | <i>Materialkonstante</i> |
| Elektrische Feldkonstante ε_0 | $8,854\,187\,812\,8(13) \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ |
| Permittivitätszahl ε_r | <i>Materialkonstante</i> |

Hinweis

- Insbesondere bei hohen Frequenzen kann ε in der Realität oft nicht als gedächtnisfrei angenommen werden.
- Dann ist ε abhängig von der Frequenz der Welle und es kommt zu Dispersion (Vorlesung 04).

Materialgleichungen: Magnetisches Feld

- Analog zu der elektrischen Polarisation führt ein externes magnetisches Feld \mathbf{H} in magnetischen Medien zu der Ausbildung magnetischer Dipole.
- Die Magnetisierung \mathbf{M} beschreibt dabei diese Wechselwirkung von \mathbf{H} und dem Medium.
- In isotropen, gedächtnisfreien magnetischen Medien, deren Magnetismus durch ein externes Magnetfeld bestimmt wird, gilt somit für die magnetische Flussdichte

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

- Dabei bezeichnet μ die *magnetische Permeabilität* des Mediums.

| Parameter | Wert |
|--------------------------------------|---|
| Magnetische Suszeptibilität χ_m | <i>Materialkonstante</i> |
| Magnetische Feldkonstante μ_0 | $1,256\,637\,062\,12(19) \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ |
| Permeabilitätszahl μ_r | <i>Materialkonstante</i> |

Stromdichte und Ohmsches Gesetz

- Die Stromdichte \mathbf{J} beschreibt den gerichteten Transport von Ladungsträgern; mathematisch das Produkt aus der Raumladungsdichte ρ und deren Geschwindigkeit \mathbf{v} :

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

- Das Prinzip der Ladungserhaltung verknüpft die zeitliche Änderung der Raumladungsdichte ρ mit der Divergenz von \mathbf{J} durch die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- Das *Ohmsche Gesetz* beschreibt die Stromdichte als direkte Folge des auf die Ladungsträger wirkenden E-Felds, wobei mit der *elektrischen Leitfähigkeit* κ gilt, dass

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$$

- Die Leitfähigkeit wird durch die Dichte und die Beweglichkeit der freien Ladungsträger bestimmt und hat die Einheit

$$[\kappa] = \frac{\text{S}}{\text{m}} = \frac{1}{\Omega \text{ m}} = \frac{\text{A}}{\text{V m}}.$$

- Eine endliche Leitfähigkeit $0 < \kappa < \infty$ bedeutet stets eine Umwandlung von Feldenergie in Wärme.

Vorlesungsinhalte

1. Organisatorisches

2. Maxwell'sche Gleichungen: Quasistationäre Felder

3. Wechselwirkungen von Feldern und Materialien

4. Maxwell'sche Gleichungen: Beliebige Zeitabhängigkeit

5. Anwendungen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Krummlinige Koordinatensysteme

Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Literatur

James Clerk Maxwell (1831–1879)



- In seiner Arbeit „A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field“ formulierte Maxwell 1865 erstmals die später nach ihm benannten Maxwellschen Gleichungen.
- Seine Arbeit legte den Grundstein für die spezielle Relativitätstheorie und die moderne Funktechnik.
- Aus seinen Gleichungen leitete er die Existenz elektromagnetischer Wellen ab, die sich durch den Raum bewegen.
- Er berechnete deren Ausbreitungsgeschwindigkeit zu

$$c = 310\,740\,000 \text{ m/s} .$$

- Da dieser Wert erstaunlich genau mit der damals gemessenen Lichtgeschwindigkeit übereinstimmte, schlussfolgerte Maxwell:

Light [. . .] itself is an electromagnetic disturbance in the form of waves propagated through the electromagnetic field according to electromagnetic laws. [2]

Maxwellsche Gleichungen

- Maxwell ergänzte das Ampèresche Gesetz um die *Verschiebungsstromdichte* $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ und erweiterte es damit zum Durchflutungsgesetz.

Wirbelfelder

(I) Durchflutungsgesetz $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \implies$ **Zeitveränderliche D-Felder & Ströme erzeugen H-Felder**

(II) Induktionsgesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies$ **Zeitveränderliche B-Felder erzeugen E-Felder**

Quellenfelder

(III) Gaußsches Gesetz $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \implies$ **Ladungen sind Quellen des E-Feldes**

(IV) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies$ **B-Feld ist quellenfrei**

- In dieser Form werden die Maxwellschen Gleichungen auch als makroskopische Maxwellsche Gleichungen bezeichnet.
- Dabei werden mikroskopische Materialeigenschaften, wie etwa gebundene Ladungsträger, durch die Materialgleichungen beschrieben.

Maxwellsche Gleichungen im Vakuum

- Im Vakuum gilt $\rho = 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, wodurch sich die Maxwellschen Gleichungen vereinfachen.

Wirbelfelder

(I) Durchflutungsgesetz $\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \implies$ Zeitveränderliche E-Felder erzeugen H-Felder

(II) Induktionsgesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \implies$ Zeitveränderliche H-Felder erzeugen E-Felder

Quellenfelder

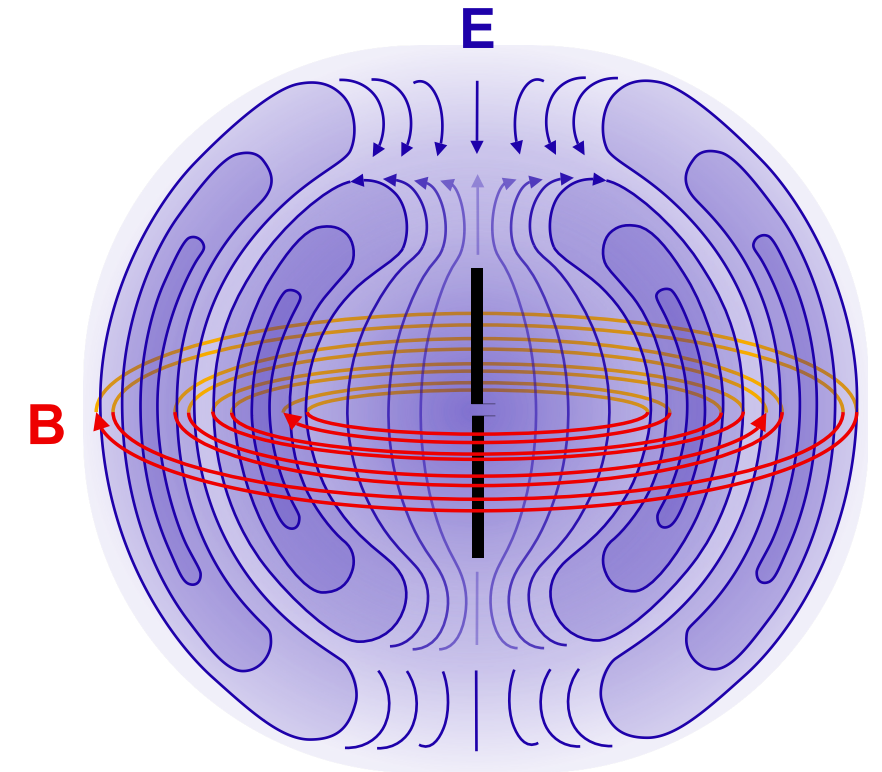
(III) Gaußsches Gesetz $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \implies$ E-Feld ist quellenfrei

(IV) $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \implies$ H-Feld ist quellenfrei

- **Kopplung:** Ein zeitveränderliches E-Feld induziert ein zeitveränderliches H-Feld (und umgekehrt).
- Aufgrund dieser gegenseitigen Erzeugung können sich die Felder von der Quelle ablösen.
- **Ergebnis:** Ausbreitung von *elektromagnetischen Wellen* im Raum.

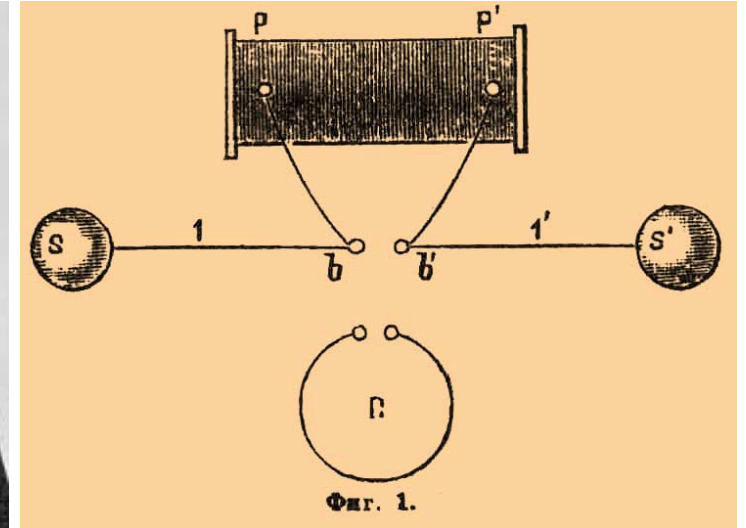
Ablösung elektromagnetischer Wellen

- Die Abbildung zeigt einen leitenden Stab (schwarze Linie), der von einem zeitlich veränderlichen elektrischen Strom durchflossen wird.
- Gemäß dem **Durchflutungsgesetz** erzeugt dieser Leitungsstrom (Stromdichte J) ein zeitvariantes **magnetisches Wirbelfeld B** in unmittelbarer Umgebung des Leiters.
- Die zeitliche Änderung dieses **Magnetfeldes** $\frac{\partial B}{\partial t}$ induziert nach dem **Induktionsgesetz** ein **elektrisches Wirbelfeld E** , dessen Feldlinien geschlossen um die des Magnetfeldes verlaufen.
- Da sich dieses elektrische Feld ebenfalls zeitlich ändert, resultiert eine **Verschiebungsstromdichte** $\frac{\partial D}{\partial t}$.
- Dieser **Verschiebungsstrom** erzeugt nun analog zum Leitungsstrom (aber auch im Vakuum) wieder ein magnetisches Wirbelfeld.
- Durch diese Verkopplung lösen sich die Felder von dem Stab ab und breiten sich als elektromagnetische Welle aus. (Animation: LMU).



Experimenteller Nachweis: Heinrich Hertz

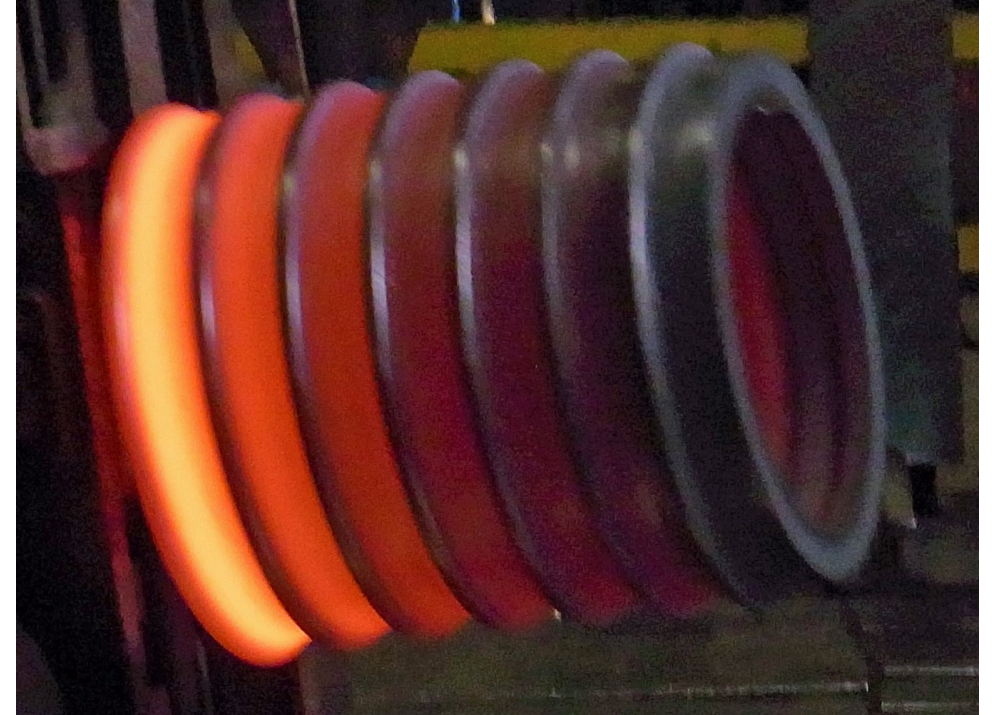
- Es dauerte über 20 Jahre bis Maxwells theoretische Vorhersage elektromagnetischer Wellen experimentell bestätigt wurde.
- Heinrich Hertz gelang 1886 dieser historische Durchbruch an der Technischen Hochschule Karlsruhe (heute KIT).
- Mittels eines Hochfrequenz-Dipols (~ 80 kHz) erzeugte er Wellen, die in einem entfernten Empfangsring Funken induzierten.
- Dieses Experiment belegte sowohl die Existenz der Wellen als auch das Auftreten typischer Wellenphänomene wie Reflexion und Interferenz.



Links: Portrait von Hertz. Rechts: Hertz'sche Versuchsanordnung mit Funkeninduktor, der als Generator dient, (oben) und durch Kugeln kapazitiv verlängerter Dipol-Sendeantenne (mittig) sowie unterbrochenem Metallring als Empfangsantenne (unten). Bildquelle.

Grenzen der Maxwell'schen Gleichungen

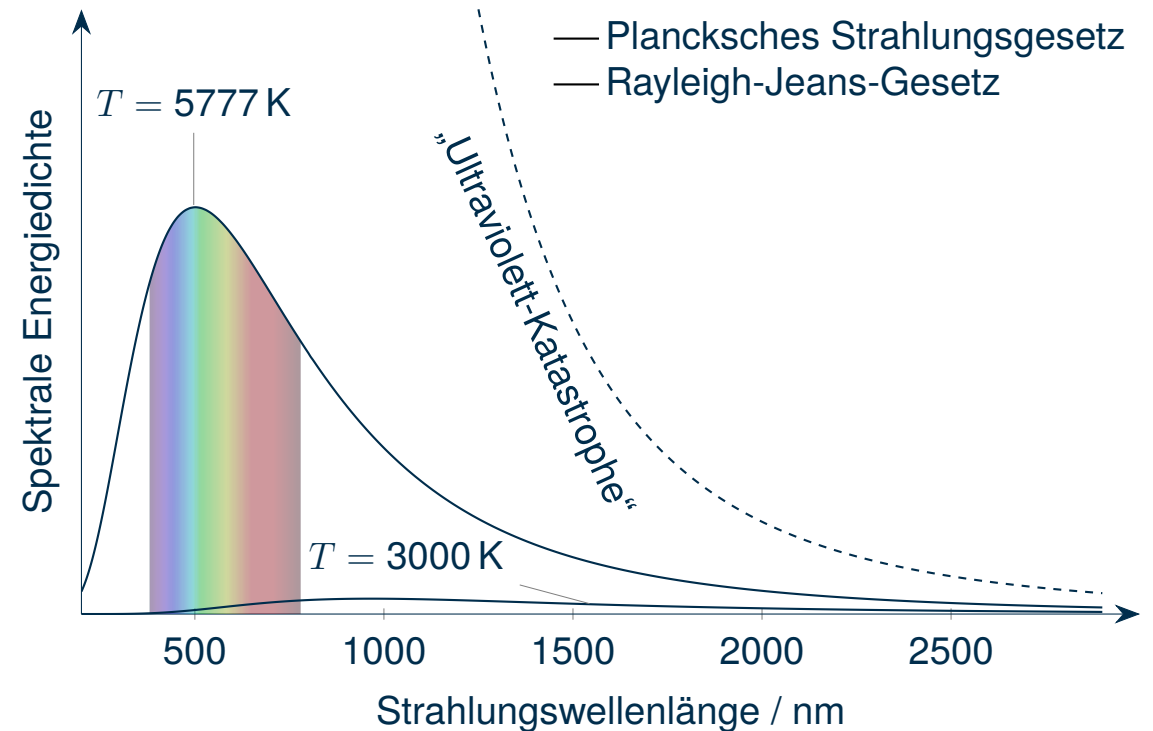
- Die klassische Elektrodynamik beschreibt makroskopische Wellenphänomene exzellent, versagt jedoch bei der mikroskopischen Wechselwirkung von Licht und Materie.
- Als Schlüsselproblem dient die Beschreibung der spektralen Verteilung der Wärmestrahlung eines *schwarzen Körpers* (idealisierte thermische Strahlungsquelle).
- Das *Rayleigh-Jeans-Gesetz* kombiniert hierzu die Thermodynamik mit der Maxwell'schen Theorie.
- Anstatt bei einer bestimmten Wellenlänge ein Maximum zu erreichen, nimmt die theoretisch vorhergesagte Abstrahlung quadratisch mit der Frequenz zu.
- Physikalisch würde das bedeuten: Jeder Gegenstand müsste große Mengen an UV- und Röntgenstrahlung abgeben.
- Dieses Scheitern der klassischen Physik ist als „Ultraviolett-Katastrophe“ bekannt.



Thermische Strahlung ausgehend von glühenden Radreifen in unterschiedlichem Abkühlzustand. Bild: Rainer Halama, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons.

Quantenhypothese

- Max Planck löste den Widerspruch durch einen radikalen Bruch mit der klassischen Physik: Er führte die *Quantenhypothese* ein.
- Laut dieser Hypothese kann der Energieaustausch zwischen Strahlung und Materie nur in diskreten Portionen, sogenannten *Quanten*, erfolgen.
- Die Energie E eines solchen Quants ist direkt proportional zur Strahlungsfrequenz f : $E = hf$.
- Die Proportionalitätskonstante $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ heißt *Plancksches Wirkungsquantum*.
- Auf dieser Grundlage leitete Planck das experimentell verifizierte Strahlungsgesetz her.
- Während die Maxwell'schen Gleichungen Felder als kontinuierliche Größen beschreiben, zeigt sich hier die *teilchenartige* Natur elektromagnetischer Wellen.



Mit der Lichtgeschwindigkeit in Vakuum $c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ kann eine Frequenz f auch als (Vakuum-)Wellenlänge $\lambda = \frac{c_0}{f}$ ausgedrückt werden. Die Effektivtemperatur der Sonne beträgt gerade $T = 5777 \text{ K}$. Die Glühwendel einer Glühlampe sind typischerweise etwa $T = 3000 \text{ K}$ heiß.

Vorlesungsinhalte

1. Organisatorisches

2. Maxwell'sche Gleichungen: Quasistationäre Felder

3. Wechselwirkungen von Feldern und Materialien

4. Maxwell'sche Gleichungen: Beliebige Zeitabhängigkeit

5. Anwendungen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Krummlinige Koordinatensysteme

Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Literatur

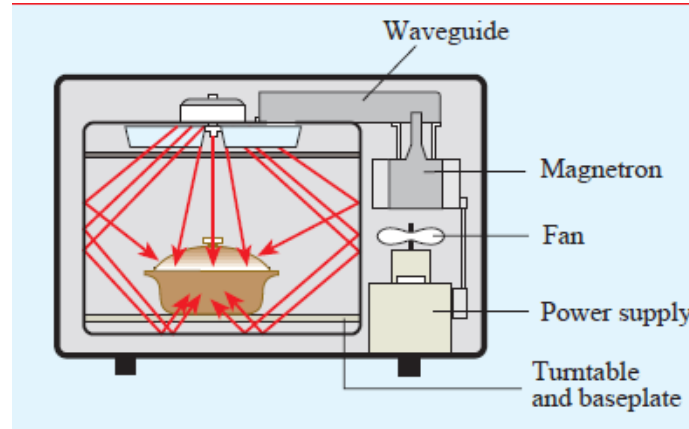
Frequenzbereiche und Anwendungen

- **Niederfrequenzen** (3 Hz - 30 kHz): Wechselstrom (50 Hz) zum Antrieb von Maschinen bzw. zur Übertragung elektrischer Energie, Telefonleitung
- **Radiowellen** (30 kHz - 3 GHz): Funkübertragung (Fernsehen, Radio, Flugfunk, Seefunk, Amateurfunk), MRT, Messtechnik, RFID
- **Mikrowellen** (3 GHz - 300 GHz): Funkübertragung (Mobilfunk, WLAN, Satellitenverbindungen, Punkt-zu-Punkt), Navigation (GPS), Mikrowellenherd, Radar, Spektroskopie, Hohlleiter
- **Terahertzstrahlung** (300 GHz - 3 THz): Ganzkörperscanner, ultrabreitbandige Richtfunkkommunikation (Mobilfunk der sechsten Generation 6G)
- **Infrarotstrahlung** (3 THz - 385 THz): Wärmestrahlung (Heizung), optische Kommunikationstechnik, Lasertechnik, Spektroskopie, Astronomie, Materialphysik, Fernbedienung
- **Sichtbares Licht** (385 THz - 789 THz): Beleuchtung, Visible Light Communications, Solarzellen, Photosynthese
- **UV-Strahlung** (789 THz - 30 PHz): Hautbräunung, Spektroskopie, Materialphysik, Fluoreszenz und Phosphoreszenz, Schwarzlicht
- **Röntgenstrahlung** (30 PHz - 30 EHz): Medizintechnik (CT, Krebstherapie), Werkstoffprüfung, Materialphysik
- **Gammastrahlung** (>30 EHz)

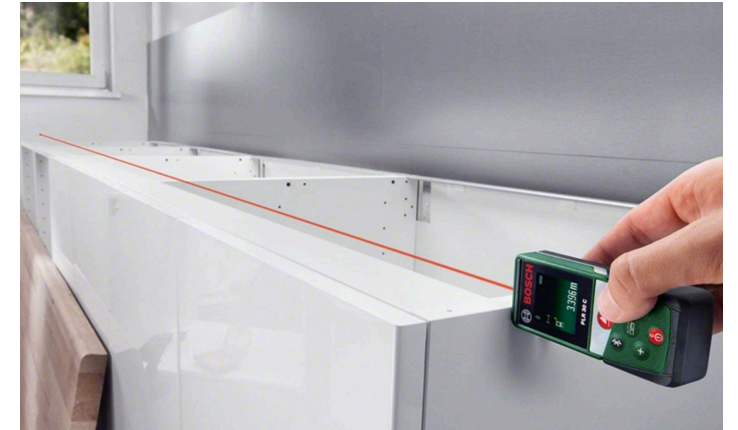
Anwendungsbereich: Täglicher Gebrauch



Radio



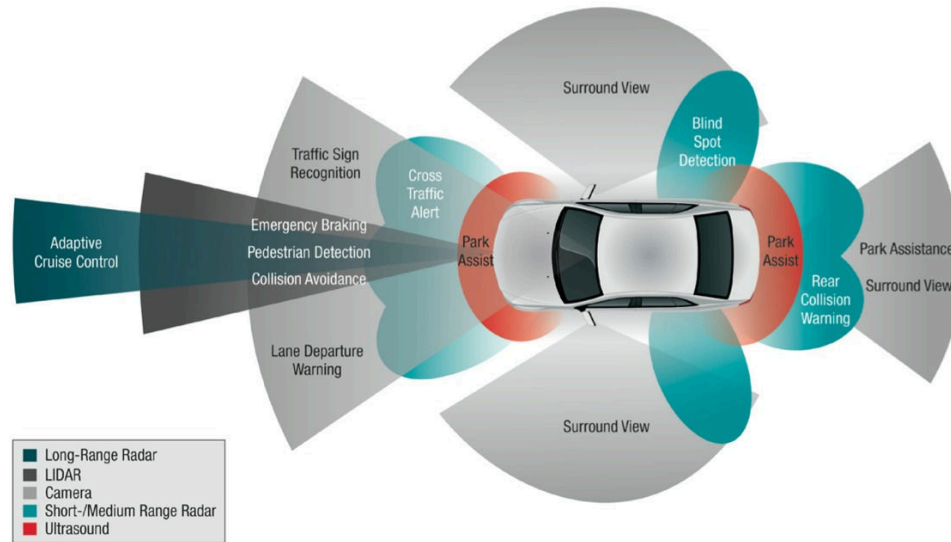
Mikrowellenofen



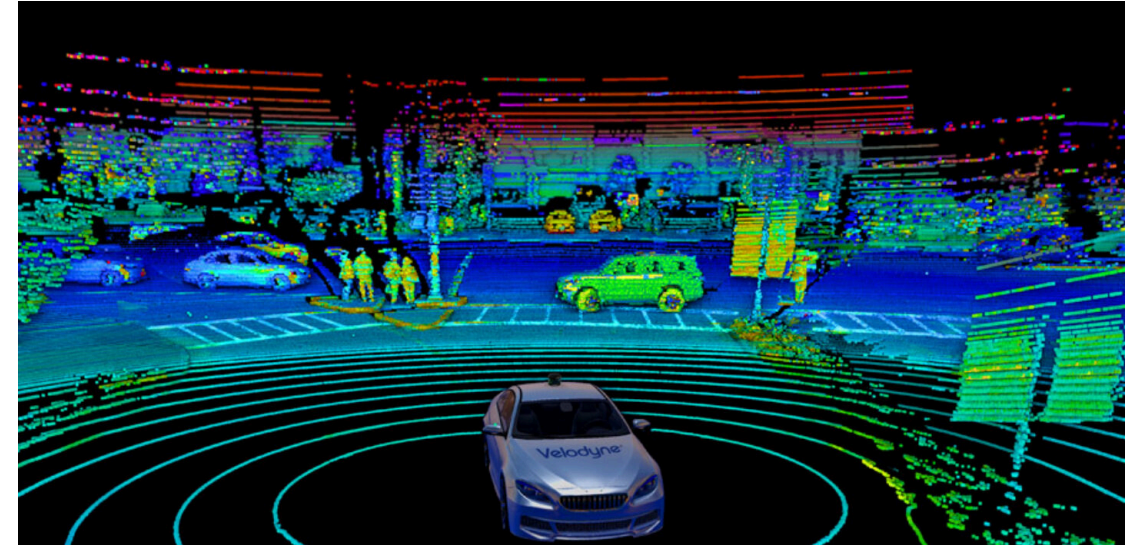
Laser-Entfernungsmessgerät

- Beispiele: Mikrowelle, Radio, Laser Entfernungsmessgerät, Laser Pointer, optische Technologien wie Lampen, Displays, VR/AR Brillen, usw.

Anwendungsbereich: Sensorik



Senorik zur Abstandsmessung im Automobil



Lidar Punktwolke

- Beispiele: Automobil, Medizintechnik, GPS Positionsbestimmung, Weltraum Observatorien, uvm.
- Radar (Radio detection and ranging) erlaubt aufgrund der niedrigen Frequenz (10-100 GHz) eine grobe, aber weite Distanzmessung, während Lidar (light detection and ranging) aufgrund der hohen Frequenz (200-300 THz) eine mikrometergenaue Distanzmessung ermöglicht.

Anwendungsbereich: Kommunikation



Untersee-Glasfaserkabel



Basisstation für 3G/4G/5G

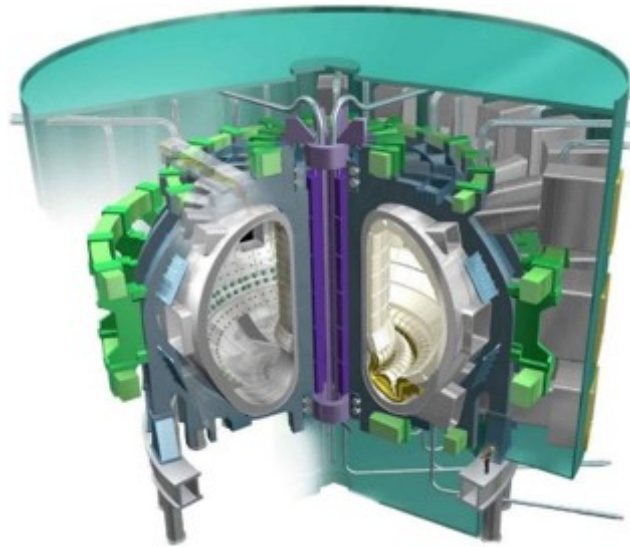


WLAN-Modem

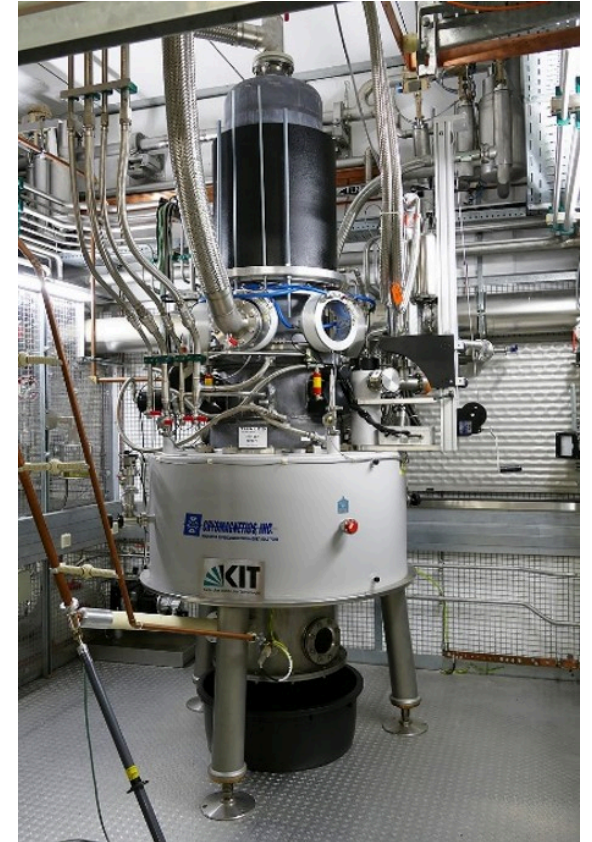
- Funkübertragungssysteme (Bluetooth, WLAN, LoRaWAN, 3G, 4G/LTE, 5G) basieren auf Trägerfrequenzen im niedrigen GHz-Bereich und decken meist „die letzten Meter“ zum Endgerät ab.
- Die EM-Welle kann daher Wände durchdringen und wird in alle Richtungen abgestrahlt (Rundfunk).
- Bei der optischen Kommunikation liegt die Trägerfrequenz (Glasfaserkommunikation, Li-Fi) im Bereich hunderter Terahertz.
- So können gerichtete oder kabelgebundene Übertragungen bei sehr hohen Datenraten realisiert werden.

Anwendungsbereich: Fusionsforschung

- Gyrotrons sind Mikrowellen-Oszillatoren, welche Leistungen bis 2 MW bei Frequenzen von bis zu 170 GHz abstrahlen.
- In Form einer EM-Welle wird diese Energie in den Reaktor geführt, um die Kernfusion zu starten.



Aufbau eines Kernfusions-Reaktors



Gyrotron @ KIT, Campus Nord

Vorlesungsinhalte

1. Organisatorisches

2. Maxwell'sche Gleichungen: Quasistationäre Felder

3. Wechselwirkungen von Feldern und Materialien

4. Maxwell'sche Gleichungen: Beliebige Zeitabhängigkeit

5. Anwendungen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Krummlinige Koordinatensysteme

Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Literatur

Was Sie gelernt haben sollten

- Welche Bedeutung, Eigenschaften und Einheiten die in den Maxwellschen Gleichungen auftretenden physikalischen Größen haben.
- Wie die einzelnen Maxwellschen Gleichungen physikalisch interpretiert werden können.
- Welche mathematischen Sätze benötigt werden, um die Maxwellschen Gleichungen von der Integral- in die Differentialform zu überführen.
- Worum es sich bei der elektrischen Polarisation handelt.
- Was die Eigenschaften *linear*, *isotrop* und *gedächtnisfrei* im Kontext der Materialgleichungen bedeuten.
- Unter welcher Bedingung Felder als „quasistationär“ betrachtet werden dürfen und welche physikalische Größe dabei vernachlässigt wird.
- Welchen Term Maxwell dem Ampèreschen Gesetz bei der Erweiterung zum Durchflutungsgesetz hinzufügte und warum dieser essenziell für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ist.
- Wie entsteht die „Kopplung der Wirbelfelder“, die eine Ablösung der Welle von der Quelle ermöglicht?
- Welche Vereinfachungen der Maxwellschen Gleichungen mit der Annahme von Vakuum möglich sind.
- Was unter der „Ultraviolett-Katastrophe“ zu verstehen ist und wie Planck diesen Widerspruch zur klassischen Elektrodynamik löste.

Vorlesungsinhalte

1. Organisatorisches

2. Maxwell'sche Gleichungen: Quasistationäre Felder

3. Wechselwirkungen von Feldern und Materialien

4. Maxwell'sche Gleichungen: Beliebige Zeitabhängigkeit

5. Anwendungen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Krummlinige Koordinatensysteme

Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Literatur

Vorlesungsinhalte: Anhang

7. Anhang

Krummlinige Koordinatensysteme

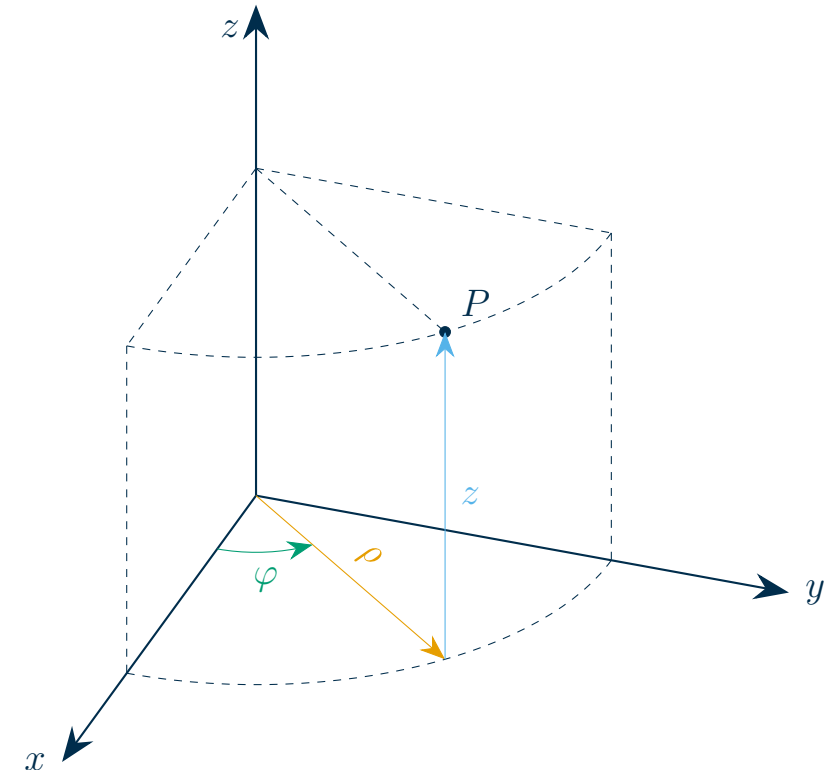
Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Literatur

Zylinderkoordinaten

- In Zylinderkoordinaten wird ein Punkt P durch den Abstand zur z -Achse ρ , den Azimutwinkel φ gegenüber der x -Achse in der xy -Ebene und die Höhe z definiert.
- Daher bieten sie sich zur Beschreibung von *Zylinderwellen* an, d.h. Wellen, die sich von einer Linienquelle ausgehend ausbreiten.
- Jede ihrer Feldkomponenten ist zu einem gegebenen Zeitpunkt auf Zylindermänteln um die Symmetrieachse konstant.
- Zylinderkoordinaten behalten die kartesische z -Koordinate bei.

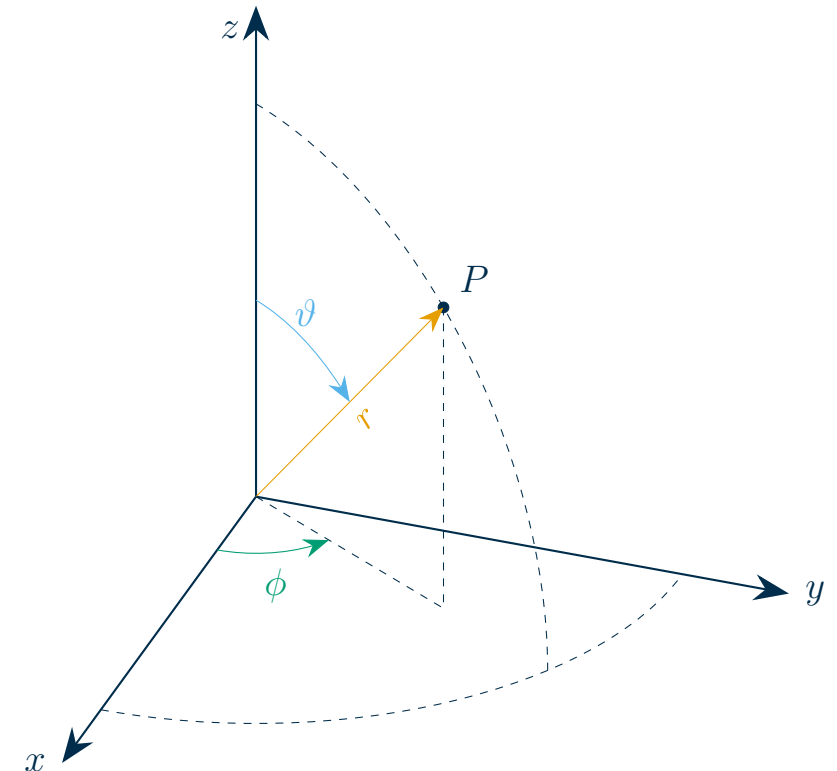
| Koordinate | Bedeutung | Bereich |
|------------|--------------|---------------------|
| ρ | Radius | $[0, \infty)$ |
| φ | Azimutwinkel | $[0, 2\pi)$ |
| z | Höhe | $(-\infty, \infty)$ |



Kugelkoordinaten

- In Kugelkoordinaten wird ein Punkt P im Raum durch seinen Abstand vom Ursprung r , den Azimutwinkel φ gegenüber der x -Achse in der xy -Ebene und den Polarwinkel ϑ gegenüber der z -Achse definiert.
- Jede ihrer Feldkomponenten ist zu einem gegebenen Zeitpunkt auf Kugelschalen um den Ausgangspunkt konstant.
- In Kugelkoordinaten gibt es - im Gegensatz zu den Zylinderkoordinaten - *keine* kartesische Koordinate.

| Koordinate | Bedeutung | Bereich |
|-------------|--------------|---------------|
| r | Radius | $[0, \infty)$ |
| ϑ | Polarwinkel | $[0, \pi]$ |
| ϕ | Azimutwinkel | $[0, 2\pi)$ |



Vorlesungsinhalte: Anhang

7. Anhang

Krummlinige Koordinatensysteme

Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Literatur

Nabla-Operator in krummlinigen Koordinaten

- Der Gradient $\nabla\psi$ eines Skalarfelds ψ muss stets die folgende Beziehung zum totalen Differential $d\psi$ erfüllen

$$d\psi = \nabla\psi \cdot ds.$$

- Mithilfe dieser Beziehung und dem entsprechenden Linienelement ds können wir den Nabla-Operator in beliebigen krummlinigen Koordinaten ermitteln.
- Für Zylinderkoordinaten erhalten wir für das totale Differential unter Anwendung der Kettenregel

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz$$

- Das Linienelement ds in Zylinderkoordinaten berücksichtigt die Bogenlänge in φ -Richtung (Faktor ρ)

$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \underbrace{\rho d\varphi}_{\text{Bogenlänge}} \mathbf{e}_\varphi + dz \mathbf{e}_z \quad (1)$$

- Damit das Skalarprodukt $\nabla\psi \cdot ds$ wieder auf den Ausdruck für das totale Differential führt, muss der φ -Anteil des Nabla-Operators den Faktor ρ aus (1) kompensieren und wir erhalten

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Divergenz in krummlinigen Koordinaten (I)

- Im Gegensatz zu den kartesischen Koordinaten ist in *krummlinigen* Koordinaten, wie den Zylinder- oder Kugelkoordinaten, die Richtung der Basisvektoren *ortsabhängig*.
- Wir betrachten nun beispielhaft für die Divergenz in Zylinderkoordinaten, wie sich diese Abhängigkeit auf die Form von Differenzialoperatoren auswirkt.
- Wir definieren zunächst das Vektorfeld \mathbf{A} in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) mit den Einheitsvektoren $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$:

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z$$

- Der Nabla-Operator in Zylinderkoordinaten lautet

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

- Stellen wir die orthonormalen Einheitsvektoren mithilfe der kartesischen Basis dar

$$\mathbf{e}_\rho = \cos(\varphi) \mathbf{e}_x + \sin(\varphi) \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \mathbf{e}_x + \cos(\varphi) \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

erkennen wir, dass sich die Richtung von \mathbf{e}_ρ und \mathbf{e}_φ mit dem Winkel φ ändert.

Divergenz in krummlinigen Koordinaten (II)

- Offenbar gilt also

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_\rho.$$

- Um die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{A}$ zu berechnen, bestimmen wir formal das Skalarprodukt von \mathbf{A} mit dem Nabla-Operator.
- Bei dem mittleren Term (der φ -Ableitung) müssen wir die Produktregel beachten und erhalten so unter Ausnutzung der Orthonormalität der Basisvektoren

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_\rho \cdot \frac{\partial(A_\rho \mathbf{e}_\rho)}{\partial \rho} \right) + \left(\mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial(A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi)}{\partial \varphi} \right) + \left(\mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial(A_z \mathbf{e}_z)}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi \cdot \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\rho + A_\rho \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + A_\varphi \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi \cdot \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\rho + A_\rho \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi - A_\varphi \mathbf{e}_\rho \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Vorlesungsinhalte: Anhang

7. Anhang

Krummlinige Koordinatensysteme

Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Literatur

Literatur

- [1] Heino Henke. *Elektromagnetische Felder: Theorie und Anwendung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. DOI: 10.1007/978-3-662-62235-3.
- [2] James Clerk Maxwell. „A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155 (1865), S. 459–512. DOI: 10.1098/rstl.1865.0008.