

EMFW Vorlesung 02: Wellengleichung

Wintersemester 2025/26

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 17. Dezember 2025

Vorlesungsinhalte

1. Laplace-Operator

2. Wellengleichung

3. Lösungen der Wellengleichung: Ebene Wellen

4. Eigenschaften ebener Wellen

5. Zeitharmonische Felder und Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

Ziele & Motivation

- In der letzten Vorlesung haben wir die Maxwell'schen Gleichungen kennengelernt, welche aufgrund der gegenseitigen Erzeugung von E- und H-Feldern die Existenz elektromagnetischer Wellen erklären können.
- In linearen, homogenen, isotropen und näherungsweise gedächtnisfreien Medien können wir die Maxwell'schen Gleichungen für die Vektorfelder \mathbf{E} und \mathbf{H} mit dem ohmschen Gesetz ausdrücken als

Wirbelfelder

$$(I) \text{ Durchflutungsgesetz} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \kappa \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$(II) \text{ Induktionsgesetz} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Quellenfelder

$$(III) \text{ Gaußsches Gesetz} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$(IV) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

- **Frage:** Wie sehen die Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} elektromagnetischer Wellen in Raum und Zeit aus?

Ziele der Vorlesung

- Entkoppeln der Maxwell'schen Gleichungen \implies Herleitung der Wellengleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{H}
- Betrachten der einfachsten Lösung der Wellengleichungen in kartesischen Koordinaten: die ebene Welle

Vorlesungsinhalte

1. Laplace-Operator

2. Wellengleichung

3. Lösungen der Wellengleichung: Ebene Wellen

4. Eigenschaften ebener Wellen

5. Zeitharmonische Felder und Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

Wiederholung: Nabla-Operator

- Mithilfe des Nabla-Operators ∇ können für ein beliebiges Skalarfeld ϕ bzw. ein beliebiges Vektorfeld \mathbf{A} die drei Differentialoperatoren der Vektoranalysis geschrieben werden als:

Gradient

$$\text{grad}(\phi) \triangleq \nabla \phi$$

Divergenz

$$\text{div}(\mathbf{A}) \triangleq \nabla \cdot \mathbf{A}$$

Rotation ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$)

$$\text{rot}(\mathbf{A}) \triangleq \nabla \times \mathbf{A}$$

- Der Nabla-Operator kann als vektorielle Rechengröße betrachtet werden, deren Elemente an das jeweilige Koordinatensystem anzupassen sind:

Kartesische Koordinaten

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

- Allgemein gelten die folgenden Beziehungen:

$$\nabla \times (\nabla \phi) \equiv 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) \equiv (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) \equiv (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A}$$

Laplace-Operator für Skalarfelder

Definition

Für ein *Skalarfeld* ψ ist der *Laplace-Operator* Δ für *Skalarfelder* definiert als die Divergenz des Gradienten

$$\Delta\psi \triangleq \nabla \cdot (\nabla\psi) = (\nabla \cdot \nabla)\psi = \nabla^2\psi.$$

Dann gilt in ...

- ... kartesischen Koordinaten (x, y, z) :

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

- ... Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) :

$$\Delta\psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

- ... Kugelkoordinaten (r, ϑ, ϕ) :

$$\Delta\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}$$

Laplace-Operator für Vektorfelder (I)

Definition

Für ein dreidimensionales *Vektorfeld* \mathbf{A} ist der *Laplace-Operator* Δ für *Vektorfelder* definiert als

$$\Delta \mathbf{A} \triangleq \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}).$$

- Dann gilt in kartesischen Koordinaten mit $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix},$$

- ... in Zylinderkoordinaten mit $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z$

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_\rho}{\rho^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{\rho^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta A_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_\rho}{\rho^2} \\ \Delta A_\varphi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{\rho^2} \\ \Delta A_z \end{pmatrix},$$

Laplace-Operator für Vektorfelder (II)

- ... und in Kugelkoordinaten $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + A_\phi \mathbf{e}_\phi$

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rA_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2} A_\vartheta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rA_\vartheta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 A_\vartheta}{\partial \phi^2} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\vartheta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rA_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \phi} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2} A_\vartheta \\ \Delta A_\vartheta - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\vartheta \\ \Delta A_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \phi} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\phi \end{pmatrix}.$$

- *Beobachtung:* Im Allgemeinen verkoppelt der vektorielle Laplace-Operator Δ die einzelnen Komponenten von \mathbf{A} .
- Die Ausnahme bildet das kartesische Koordinatensystem, bei dem der vektorielle Laplace-Operator auf jede Komponente von \mathbf{A} wie der skalare Laplace-Operator wirkt.
- In Zylinderkoordinaten entspricht ausschließlich die z -Komponente des vektoriellen Laplace-Operators dem skalaren Laplace-Operator.

Vorlesungsinhalte

1. Laplace-Operator

2. Wellengleichung

3. Lösungen der Wellengleichung: Ebene Wellen

4. Eigenschaften ebener Wellen

5. Zeitharmonische Felder und Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

Wiederholung: Maxwell'sche Gleichungen

- In linearen, homogenen, isotropen und näherungsweise gedächtnisfreien Medien gilt $\varepsilon = \text{const}$ und $\mu = \text{const}$.
- Dann können wir die Maxwell'schen Gleichungen für die Vektorfelder \mathbf{E} und \mathbf{H} mit dem ohmschen Gesetz ausdrücken als

Wirbelfelder

$$\begin{aligned} \text{(I) Durchflutungsgesetz} \quad \nabla \times \mathbf{H} &= \kappa \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \text{(II) Induktionsgesetz} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned}$$

Quellenfelder

$$\begin{aligned} \text{(III) Gaußsches Gesetz} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \text{(IV)} \quad \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \end{aligned}$$

- **Kopplung:** Ein zeitveränderliches E-Feld induziert ein zeitveränderliches H-Feld (und umgekehrt).
- Aufgrund dieser gegenseitigen Erzeugung können sich die Felder von der Quelle ablösen.
- **Ergebnis:** Ausbreitung von *elektromagnetischen Wellen* im Raum.
- Bevor wir Lösungen \mathbf{E} und \mathbf{H} zu diesen partiellen Differentialgleichungen ermitteln können, müssen wir zunächst das Durchflutungs- und Induktionsgesetz entkoppeln.

Wellengleichung der elektrischen Feldstärke

- Bilden wir die Rotation über das Induktionsgesetz, erhalten wir mit dem Durchflutungsgesetz und der Definition des Laplace-Operators für Vektorfelder (es gilt $\varepsilon, \mu = \text{const}$)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\kappa \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

- Nehmen wir ferner eine konstante Raumladungsdichte ϱ im Medium an, d.h. $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$, erhalten wir mit

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

die vektorielle *Telegraphengleichung* für das E-Feld.

Definition: Wellengleichung des E-Felds

Für ein nichtleitendes Medium mit $\kappa = 0$, vereinfacht sich diese Telegraphengleichung zu der vektoriellen *Wellengleichung* für das E-Feld

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Wellengleichung der magnetischen Feldstärke

- Bilden wir die Rotation über das Durchflutungsgesetz, erhalten wir mit dem Induktionsgesetz und der Definition des Laplace-Operators für Vektorfelder (es gilt $\varepsilon, \mu = \text{const}$)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \Delta \mathbf{H} = \kappa (\nabla \times \mathbf{E}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \kappa \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)$$

- Daraus resultiert mit

$$\Delta \mathbf{H} - \mu \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

die vektorielle *Telegraphengleichung* für das H-Feld.

Definition: Wellengleichung des H-Felds

Für ein nichtleitendes Medium mit $\kappa = 0$, vereinfacht sich diese Telegraphengleichung zu der vektoriellen *Wellengleichung* für das H-Feld

$$\Delta \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Vorlesungsinhalte

1. Laplace-Operator

2. Wellengleichung

3. Lösungen der Wellengleichung: Ebene Wellen

4. Eigenschaften ebener Wellen

5. Zeitharmonische Felder und Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

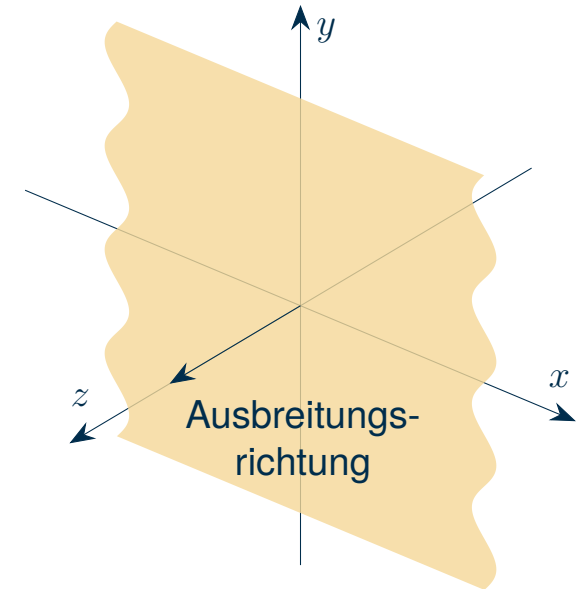
Ebene Wellen

Definition

- Eine *ebene Welle* ist eine idealisierte Wellenform, bei der die Flächen gleicher Phase (Wellenfronten) parallele Ebenen bilden, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen.
- In diesen Ebenen sind die Feldgrößen (hier: \mathbf{E} und \mathbf{H}) zu einem festen Zeitpunkt in Betrag und Richtung konstant.
- Ebene Wellen sind die einfachste Lösung der Wellengleichung in homogenen Medien ($\varepsilon, \mu = \text{const}$).
- **Beispiel in kartesischen Koordinaten:** Bei Ausbreitung in z -Richtung müssen für festes z und t alle Feldkomponenten in x - und y -Richtung konstant sein und wir erhalten

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, t) = E_x(z, t) \mathbf{e}_x + E_y(z, t) \mathbf{e}_y + E_z(z, t) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(z, t) = H_x(z, t) \mathbf{e}_x + H_y(z, t) \mathbf{e}_y + H_z(z, t) \mathbf{e}_z,$$



Achtung Idealisierung!

- Physikalisch unmöglich: Unendliche Ausdehnung bedingt unendliche Energie
- Anwendung: Lokale Näherung im Fernfeld realer Quellen

Wellengleichungen für ebene Wellen

- In kartesischen Koordinaten können wir die zwei vektoriellen Wellengleichungen

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

in sechs skalare Wellengleichungen aufteilen:

$$\Delta E_x - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta H_x - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta E_y - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta H_y - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta E_z - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta H_z - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0$$

- Also muss *jede* Komponente einer ebenen Welle die Wellengleichung erfüllen.
- Nehmen wir erneut Ausbreitung in z -Richtung an, müssen alle Feldkomponenten in x - und y -Richtung konstant sein, womit die Ableitungen nach x und y verschwinden.
- Dann gilt etwa für die x -Komponente des E-Feldes

$$\Delta E_x - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0.$$

Lösungsansatz nach d'Alembert

- Zur Lösung der Wellengleichung nach d'Alembert setzen wir die Überlagerung zweier beliebiger, zweifach differenzierbarer Funktionen f und g an.
- So erhalten wir z. B. für E_x mit der Konstante c den Ansatz

$$E_x(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct)$$

- Um die Gültigkeit dieses Ansatzes zu prüfen, bilden wir die zweiten Ableitungen nach dem Ort z und der Zeit t (unter Anwendung der Kettenregel):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}(f' + g') = f'' + g'' \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}(-cf' + cg') = c^2(f'' + g'')\end{aligned}$$

- Einsetzen dieser beiden Ableitungen in die Wellengleichung für E_x zeigt, dass die Wellengleichung für $\mu\epsilon c^2 = 1 \implies c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ erfüllt ist

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = (f'' + g'') - \mu\epsilon c^2(f'' + g'') = 0.$$

Lösungsansatz nach d'Alembert: Interpretation

- Zur Interpretation des Lösungsansatzes betrachten wir eine feste Phase (konstantes Argument) von f bzw. g .
- Für f muss also $z - ct = \text{const}$ und für g muss $z + ct = \text{const}$ gelten.
- Aus diesen Bedingungen folgt durch Ableiten nach der Zeit

$$\frac{dz}{dt} = v_z = +c \quad \text{bzw.} \quad \frac{dz}{dt} = v_z = -c$$

- Schlussfolgerungen:
 - f beschreibt eine Welle, die sich in positive z -Richtung ausbreitet (**hinlaufende Welle**).
 - g beschreibt eine Welle, die sich in negative z -Richtung ausbreitet (**rücklaufende Welle**).
 - Die Konstante c beschreibt jeweils die Ausbreitungsgeschwindigkeit.
- Jede Lösung der Wellengleichung lässt sich also als lineare Superposition einer hin- und einer rücklaufenden Welle darstellen.
- Am Beispiel von E_x führen wir daher die anschauliche Notation E_x^+ für f und E_x^- für g ein

$$E_x(z, t) = E_x^+(z - ct) + E_x^-(z + ct).$$

- Dieses Vorgehen lässt sich identisch auf die fünf weiteren Feldkomponenten übertragen, sodass für jede Komponente äquivalente Ausdrücke aus hin- und rücklaufenden Anteilen resultieren.

Vorlesungsinhalte

1. Laplace-Operator

2. Wellengleichung

3. Lösungen der Wellengleichung: Ebene Wellen

4. Eigenschaften ebener Wellen

5. Zeitharmonische Felder und Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

Maxwellsche Gleichungen für ebene Wellen

- Die Lösung der Wellengleichung betrachtet die E- und H-Felder unabhängig voneinander.
- Um eine elektromagnetische Welle zu beschreiben, müssen \mathbf{E} und \mathbf{H} jedoch die Maxwellschen Gleichungen erfüllen.
- Für eine ebene Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet, sind die Feldgrößen definitionsgemäß unabhängig von den transversalen Koordinaten x und y , weshalb alle partiellen Ableitungen nach x und y verschwinden.
- Unter dieser Bedingung vereinfachen sich das Durchflutungs- und das Induktionsgesetz

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{pmatrix} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

und

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{pmatrix} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Transversale Feldkomponenten ebener Wellen (I)

- Die Feldkomponenten E_x , E_y , H_x und H_y , welche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (hier $\pm z$) orientiert sind, bezeichnen wir als *transversale Feldkomponenten*.
- Aus den Maxwell'schen Gleichungen für ebene Wellen erhalten wir folgende Beziehungen zwischen den Feldkomponenten E_x und H_y

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

- Betrachten wir zunächst eine sich in $+z$ -Richtung ausbreitende Welle und integrieren etwa die erste Gleichung über z , dann erhalten wir mit der Kettenregel

$$H_y^+(z - ct) = -\varepsilon \int (-c) E_x'^+(z - ct) dz = \varepsilon c E_x^+(z - ct) = \frac{1}{Z} E_x^+(z - ct),$$

wobei wir mit $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ den *Wellenwiderstand* (Einheit Ω) eingeführt haben.

Transversale Feldkomponenten ebener Wellen (II)

- Betrachten wir nun eine sich in $-z$ -Richtung ausbreitende Welle an und integrieren erneut die erste Gleichung über z , ergibt sich

$$H_y^-(z + ct) = -\varepsilon \int c E_x'^-(z + ct) dz = -\varepsilon c E_x^-(z + ct) = -\frac{1}{Z} E_x^-(z + ct).$$

- Analog ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen E_y und H_x

$$H_x^+(z - ct) = -\frac{1}{Z} E_y^+(z - ct) \quad \text{und} \quad H_x^-(z + ct) = \frac{1}{Z} E_y^-(z + ct).$$

Longitudinale Feldkomponenten ebener Wellen

- Die Feldkomponenten E_z und H_z , welche parallel zur Ausbreitungsrichtung (hier $\pm z$) orientiert sind, bezeichnen wir als *longitudinale Feldkomponenten*.
- Aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0.$$

- Diese Gleichungen besagen, dass E_z und H_z zeitlich konstant sein müssen.
- Zudem folgt aus den Gauß'schen Gesetzen für elektrische und magnetische Felder, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

und damit auch eine räumliche Invarianz der z -Komponenten.

- Allerdings ist für zeitlich und räumlich konstante Felder keine Wellenausbreitung möglich, weshalb bei ebenen Wellen keine longitudinalen Feldkomponenten existieren.

Ausbreitung ebener Wellen

- Im Allgemeinen lässt sich somit jede ebene Welle, die in $\pm z$ -Richtung propagiert, als Überlagerung zweier, voneinander unabhängiger Wellen darstellen.
- Bei der einen Welle verschwinden dabei alle Feldkomponenten außer E_x und H_y , bei der anderen Welle alle Komponenten außer E_y und H_x .
- Abhängig von der nicht-verschwindenden elektrischen Feldkomponente bezeichnen wir die Welle als linear in x - bzw. y -Richtung polarisiert (auf das Thema Polarisation von Wellen werden wir in einer späteren Vorlesung noch näher eingehen).
- Da bei ebenen Wellen weder das elektrische noch das magnetische Feld in Ausbreitungsrichtung schwingt, handelt es sich um transversalelektromagnetische Wellen (*TEM-Wellen*).
- Aus der Betrachtung der transversalen Feldkomponenten folgern wir, dass für eine sich in $\pm z$ -Richtung ausbreitende Welle gilt $\mathbf{E}^+ = Z(\mathbf{H}^+ \times \mathbf{e}_z)$ bzw. $\mathbf{E}^- = -Z(\mathbf{H}^- \times \mathbf{e}_z)$
- Allgemein bilden \mathbf{E} , \mathbf{H} und der Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung also ein *Rechtssystem* bzw. *rechtshändiges Koordinatensystem*.

Lichtgeschwindigkeit und Wellenwiderstand

- Im Vakuum werden die Permittivität und die Permeabilität zu

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,854\,187\,812\,8(13) \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$
$$\mu = \mu_0 = 1,256\,637\,062\,12(19) \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

- Für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum gilt

$$c = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx \left(\frac{4\pi}{36\pi} \cdot 10^{-16} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- und für den Wellenwiderstand im Vakuum

$$Z = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx \left(4\pi \cdot 36\pi \cdot 1 \cdot 10^2 \frac{\text{V}^2}{\text{A}^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$$

Vorlesungsinhalte

1. Laplace-Operator

2. Wellengleichung

3. Lösungen der Wellengleichung: Ebene Wellen

4. Eigenschaften ebener Wellen

5. Zeitharmonische Felder und Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

Exkurs: Fourierreihe

- Jede periodische reellwertige Funktion $f(t)$ mit der Periode T kann angenähert werden durch die Fourierreihe

$$f(t) \approx f_N(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cos(2\pi nt/T - \varphi_n)$$

wobei $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ und $\varphi_n = \arctan(b_n/a_n)$ und

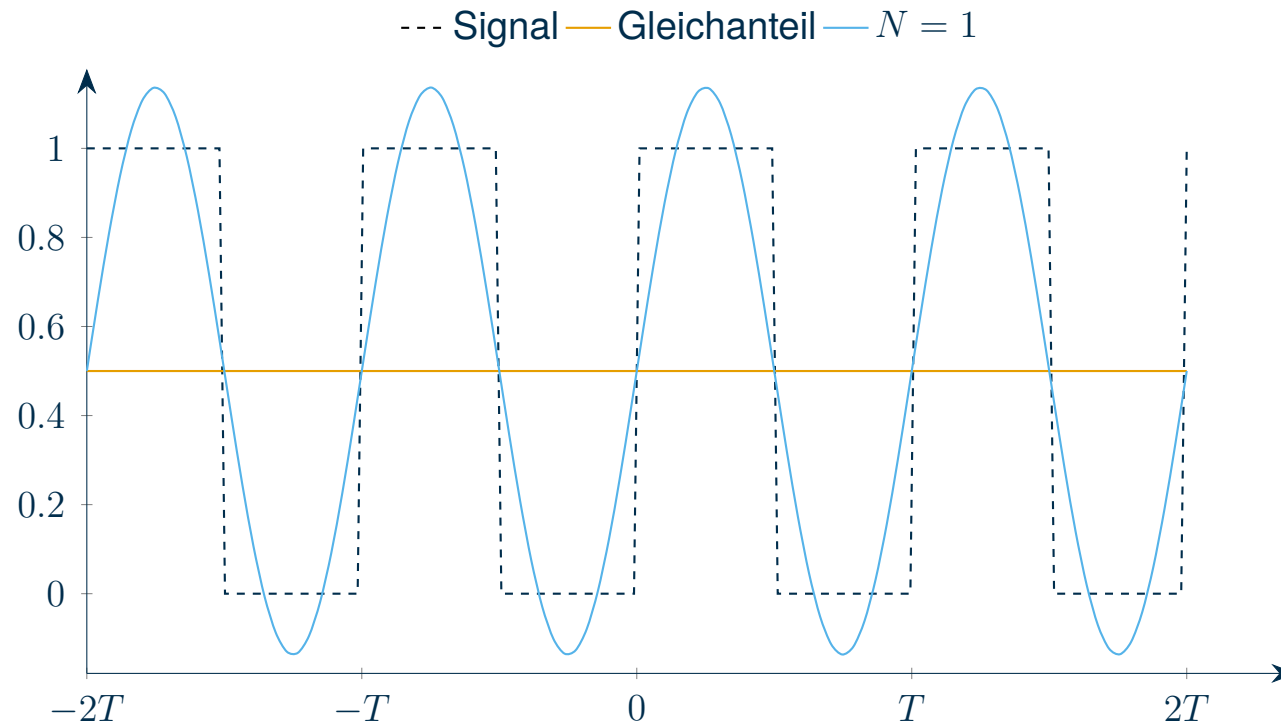
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi nt/T) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi nt/T) dt$$

- Die Funktion $f(t)$ kann also als Überlagerung von N gewichteten zeitharmonischen Schwingungen und ihrem Mittelwert angenähert werden.
- Für nicht-periodische Funktionen wird anstelle der Fourierreihe die Fouriertransformation verwendet.

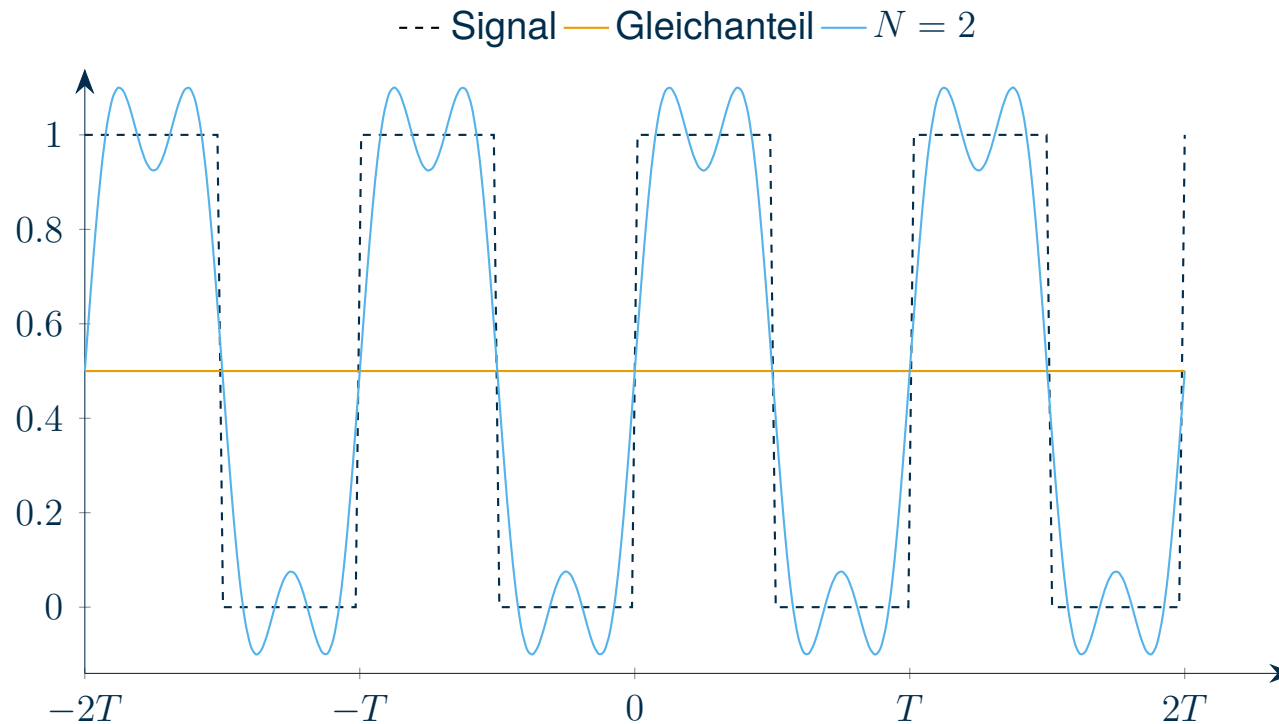
Beispiel: Fourierreihenentwicklung Rechtecksignal

- Mithilfe der Fourierreihe kann ein Rechtecksignal der Periode T durch Überlagerung seines Gleichanteils und gewichteter Sinusschwingungen angenähert werden



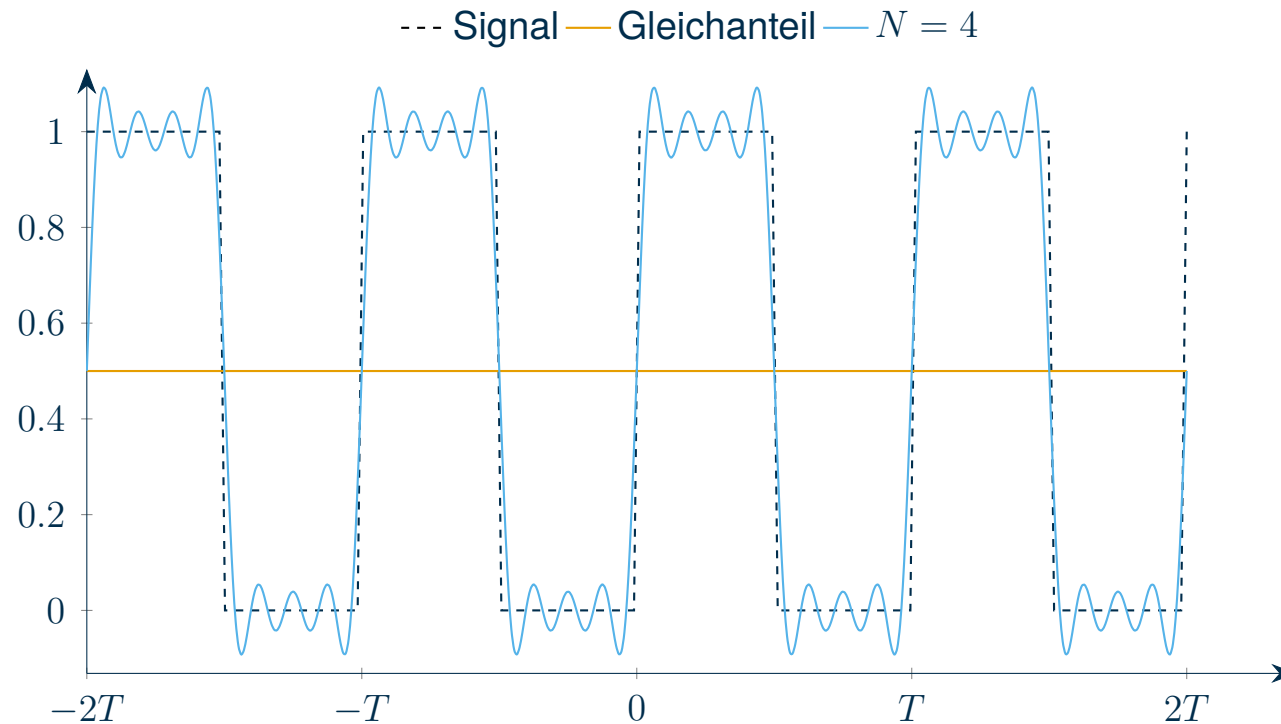
Beispiel: Fourierreihenentwicklung Rechtecksignal

- Mithilfe der Fourierreihe kann ein Rechtecksignal der Periode T durch Überlagerung seines Gleichanteils und gewichteter Sinusschwingungen angenähert werden



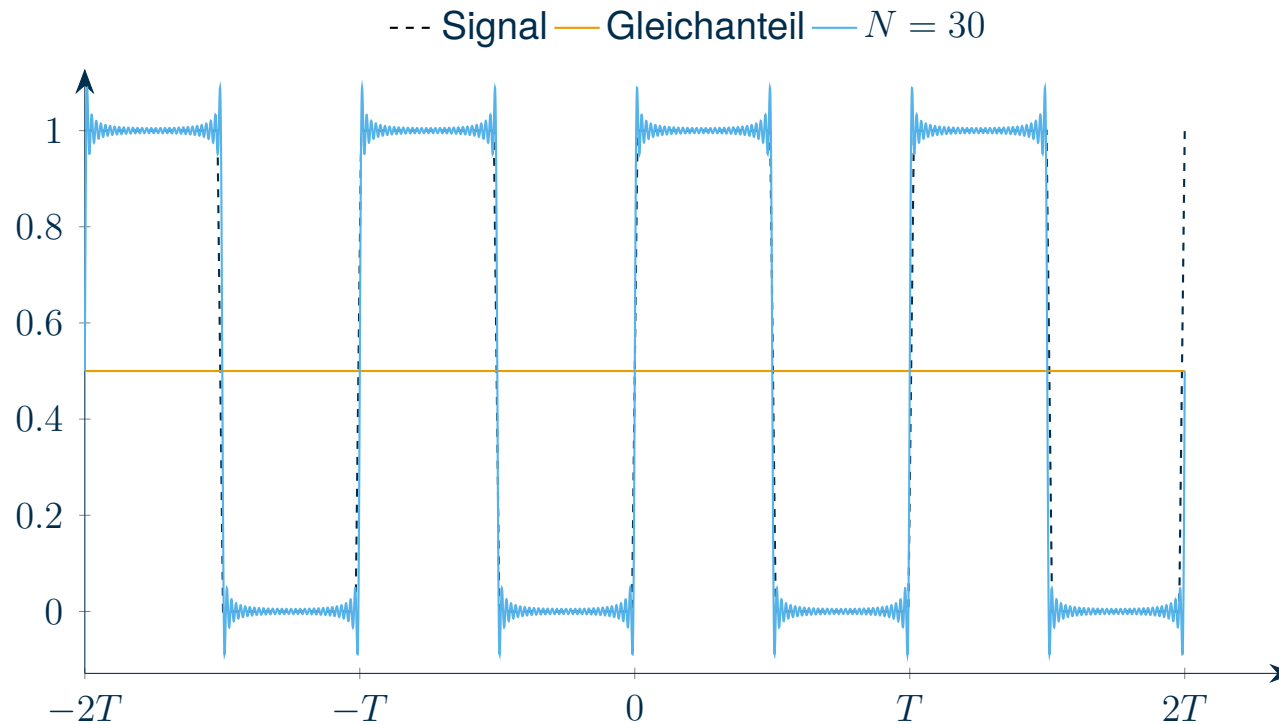
Beispiel: Fourierreihenentwicklung Rechtecksignal

- Mithilfe der Fourierreihe kann ein Rechtecksignal der Periode T durch Überlagerung seines Gleichanteils und gewichteter Sinusschwingungen angenähert werden



Beispiel: Fourierreihenentwicklung Rechtecksignal

- Mithilfe der Fourierreihe kann ein Rechtecksignal der Periode T durch Überlagerung seines Gleichanteils und gewichteter Sinusschwingungen angenähert werden



Superpositionsprinzip

- Bei einer Vielzahl von Problemstellungen soll die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen ausgehend von einem zeitabhängigen Quellenfeld mit den Feldvektoren $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r}_0, t)$ am Ort \mathbf{r}_0 berechnet werden.
- Sofern das Ausbreitungsmedium *linear* ist, kann dabei das Superpositionsprinzip verwendet werden.
- Hierbei kann das Quellensignal in eine beliebige Reihendarstellung überführt werden, z.B. in die Fourierreihendarstellung.
- Die Wellenausbreitung kann nun für einzeln jeden Summanden berechnet werden.
- Die Gesamtlösung ergibt sich dann als Überlagerung bzw. Superposition der Einzellösungen.
- Bei vielen Problemstellungen lässt sich die Berechnung auf diese Weise deutlich vereinfachen.
- Es gilt zu beachten, dass das Superpositionsprinzip für *nichtlineare* Medien nicht gilt!

Komplexe Zeiger

- Bei zeitharmonischer Anregung mit der Frequenz $\omega = 2\pi/T$ lässt sich beispielsweise das Vektorfeld der elektrischen Feldstärke separieren in

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi)$$

wobei der Vektor \mathbf{r} den Ortsvektor in einem gegebenen Koordinatensystem darstellt.

- Es ist in vielen Fällen hilfreich, den obigen Ausdruck mittels des *komplexen Zeigers* darzustellen als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j [\omega t + \varphi])$$

- Dabei zeigt der Unterstrich an, dass es sich um eine komplexe Größe handelt.
- Der reellwertige Feldvektor ergibt sich als Realteil des komplexen Zeigers zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \} = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t)]$$

wobei der hochgestellte Asterisk * für die komplexe Konjugation steht.

Komplexe Amplituden

- Bei harmonischer Zeitabhängigkeit ergibt sich die Ableitung des komplexen Zeigers nach t zu

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j[\omega t + \varphi])}{\partial t} = j\omega \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$$

- Die komplexe Zeigerschreibweise für zeitharmonische Größen lässt sich noch weiter vereinfachen, indem die Zeitabhängigkeit nur noch durch die gegebene Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ impliziert wird.
- Wir können den komplexen Zeiger dann schreiben als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j[\omega t + \varphi]) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j\varphi) \exp(j\omega t) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)$$

wobei $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j\varphi)$ die *komplexe Amplitude* implizit bezogen auf die Kreisfrequenz ω angibt.

Maxwellsche Gleichungen für komplexe Amplituden

- Die Maxwellschen Gleichungen für homogene Medien mit $\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon \underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}}$ gelten also, bei harmonischer Anregung mit der Kreisfrequenz ω , entsprechend auch für die komplexen Amplituden:

Wirbelfelder

$$(I) \text{ Durchflutungsgesetz} \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \kappa \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + j\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = j\omega\varepsilon \left(1 - j\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$$

$$(II) \text{ Induktionsgesetz} \quad \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$$

Quellenfelder

$$(III) \text{ Gaußsches Gesetz} \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \underline{\rho}(\mathbf{r})$$

$$(IV) \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0$$

- Bei der Verwendung der komplexen Amplitude entfällt also die explizite Zeitabhängigkeit.

Vorlesungsinhalte

1. Laplace-Operator

2. Wellengleichung

3. Lösungen der Wellengleichung: Ebene Wellen

4. Eigenschaften ebener Wellen

5. Zeitharmonische Felder und Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

Was Sie gelernt haben sollten

- Wie die vektoriellen Wellengleichungen für die elektrische und magnetische Feldstärke durch Entkopplung der Maxwell'schen Gleichungen hergeleitet werden.
- Warum der Ansatz von d'Alembert physikalisch als Superposition einer hin- und einer rücklaufenden Welle interpretiert werden kann.
- Dass ebene Wellen transversalelektromagnetische (TEM) Wellen sind und wie \mathbf{E} und \mathbf{H} über den Wellenwiderstand Z verknüpft sind.
- Wie die Permittivität ε und die Permeabilität μ die Ausbreitungsgeschwindigkeit c und den Wellenwiderstand des Mediums bestimmen.
- Das Prinzip, beliebige periodische Signale (z. B. ein Rechtecksignal) durch eine Fourierreihe als Superposition von Sinus- und Cosinusschwingungen darzustellen.
- Welchen Vorteil die Verwendung komplexer Zeiger bei zeitharmonischen Feldern bietet.
- Wie die Maxwell'schen Gleichungen für komplexe Amplituden formuliert werden können.