

EMFW Vorlesung 03: Poynting-Vektor & Polarisation

Wintersemester 2025/26

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 7. Januar 2026

Vorlesungsinhalte

1. Zeitharmonische Felder und Wellen

2. Zeitharmonische ebene Wellen

3. Poynting-Vektor

4. Komplexer Poynting-Vektor

5. Polarisation elektromagnetischer Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Mathematische Beschreibung Polarisationszustand

Ziele & Motivation

- In der letzten Vorlesung haben wir die Maxwell'schen Gleichungen entkoppelt und die Wellengleichung für das E- und H-Feld hergeleitet.
- Da in der technischen Anwendung (z. B. Mobilfunk, Radar) jedoch meist sinusförmige Signale dominieren, fokussieren wir uns nun auf den Spezialfall zeitharmonischer Felder.
- Dabei werden wir sehen, dass die Darstellung der Felder mittels komplexen Zeigern bzw. Amplituden, die Maxwell'schen Gleichungen vereinfacht.

Ziele der Vorlesung

- Wiederholung: Maxwell'schen Gleichungen für komplexe Amplituden
- Wellengleichung für zeitharmonische Felder: Helmholtz-Gleichung & Lösung
- Elektromagnetische Wellen als Energieträger: Beschreibung Energiefluss mittels Poynting-Vektor
- Schwingungsrichtung der Feldvektoren: Polarisation der Welle

Vorlesungsinhalte

1. Zeitharmonische Felder und Wellen

2. Zeitharmonische ebene Wellen

3. Poynting-Vektor

4. Komplexer Poynting-Vektor

5. Polarisation elektromagnetischer Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Mathematische Beschreibung Polarisationszustand

Rückblick: Komplexe Zeiger

- Bei zeitharmonischer Anregung mit der Frequenz $\omega = 2\pi/T$ lässt sich beispielsweise das Vektorfeld der elektrischen Feldstärke separieren in

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi)$$

wobei der Vektor \mathbf{r} den Ortsvektor in einem gegebenen Koordinatensystem darstellt.

- Es ist in vielen Fällen hilfreich, den obigen Ausdruck mittels des *komplexen Zeigers* darzustellen als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j[\omega t + \varphi])$$

- Dabei zeigt der Unterstrich an, dass es sich um eine komplexe Größe handelt.
- Der reellwertige Feldvektor ergibt sich als Realteil des komplexen Zeigers zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \} = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t)]$$

wobei der hochgestellte Asterisk * für die komplexe Konjugation steht.

Rückblick: Komplexe Amplituden

- Bei harmonischer Zeitabhängigkeit ergibt sich die Ableitung des komplexen Zeigers nach t zu

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j[\omega t + \varphi])}{\partial t} = j\omega \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$$

- Die komplexe Zeigerschreibweise für zeitharmonische Größen lässt sich noch weiter vereinfachen, indem die Zeitabhängigkeit nur noch durch die gegebene Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ impliziert wird.
- Wir können den komplexen Zeiger dann schreiben als

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j[\omega t + \varphi]) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j\varphi) \exp(j\omega t) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)$$

wobei $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j\varphi)$ die *komplexe Amplitude* implizit bezogen auf die Kreisfrequenz ω angibt.

Maxwellsche Gleichungen für komplexe Amplituden

- In linearen, homogenen, isotropen und näherungsweise gedächtnisfreien Medien gilt $\varepsilon = \text{const}$ und $\mu = \text{const}$.
- Bei harmonischer Anregung mit der Kreisfrequenz ω gelten mit $\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon \underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}}$ die Maxwellschen Gleichungen analog für die komplexen Amplituden:

$$\text{(I) Durchflutungsgesetz} \quad \nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = j\omega\varepsilon \left(1 - j\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$$

$$\text{(II) Induktionsgesetz} \quad \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$$

$$\text{(III) Gaußsches Gesetz} \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \underline{\rho}(\mathbf{r})$$

$$\text{(IV)} \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0$$

- Durch die Einführung der komplexen Amplituden eliminieren wir die explizite Zeitabhängigkeit.

Helmholtz-Gleichung

- Wir betrachten nun, wie sich die Herleitung der Wellengleichung (Vorlesung 02) für zeitharmonische Felder mit komplexen Amplituden $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ vereinfacht.
- Wir gehen von einem nichtleitenden ($\kappa = 0$) und raumladungsfreien ($\varrho = 0$) Medium aus.
- Daraus folgt direkt die Quellenfreiheit der Felder, also $\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0$ und $\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}} = 0$.
- Wenden wir nun die Rotation auf das Induktions- bzw. Durchflutungsgesetz an, erhalten wir mit $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) &= \nabla (\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}) - \Delta \underline{\mathbf{E}} = -\Delta \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu (\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) = -j\omega\mu (j\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}}) = \omega^2\mu\varepsilon \underline{\mathbf{E}} \\ \nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) &= \nabla (\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}) - \Delta \underline{\mathbf{H}} = -\Delta \underline{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) = j\omega\varepsilon (-j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}) = \omega^2\mu\varepsilon \underline{\mathbf{H}}\end{aligned}$$

Definition:

Durch Einführung der *Wellenzahl* $k \triangleq \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c}$ (Einheit rad/m) überführen wir diese Gleichungen in die *Helmholtz-Gleichungen* für die elektrische und magnetische Feldstärke zeitharmonischer Felder

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} + k^2 \underline{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{und} \quad \Delta \underline{\mathbf{H}} + k^2 \underline{\mathbf{H}} = 0$$

Vorlesungsinhalte

1. Zeitharmonische Felder und Wellen

2. Zeitharmonische ebene Wellen

3. Poynting-Vektor

4. Komplexer Poynting-Vektor

5. Polarisation elektromagnetischer Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Mathematische Beschreibung Polarisationszustand

Zeitharmonische ebene Wellen

- Analog zu Vorlesung 2 betrachten wir ebene Wellen, die sich in z -Richtung ausbreiten, jedoch zusätzlich zeitharmonisch sind.
- Dementsprechend beschreiben wir die Zeitabhängigkeit der Feldgrößen durch den Faktor $\exp(j\omega t)$ und erhalten mit den komplexen Amplituden $\underline{\mathbf{E}}(z)$ und $\underline{\mathbf{H}}(z)$ die komplexen Zeiger des E- und H-Feldes

$$\underline{\mathbf{E}}(z, t) = \underline{\mathbf{E}}(z) \exp(j\omega t) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}(z, t) = \underline{\mathbf{H}}(z) \exp(j\omega t) .$$

- Einsetzen in die Helmholtz-Gleichungen führt auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial z^2} + k^2 \underline{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial z^2} + k^2 \underline{\mathbf{H}} = 0 .$$

- Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen stellt - wie zuvor bei der beliebigen Zeitabhängigkeit - eine Superposition aus einer **hinlaufenden (+ z -Richtung)** und einer **rücklaufenden (- z -Richtung)** Welle dar

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}(z, t) &= \underline{\mathbf{E}}_0^+ \exp(j(\omega t - kz)) + \underline{\mathbf{E}}_0^- \exp(j(\omega t + kz)) \\ \underline{\mathbf{H}}(z, t) &= \underline{\mathbf{H}}_0^+ \exp(j(\omega t - kz)) + \underline{\mathbf{H}}_0^- \exp(j(\omega t + kz)) . \end{aligned}$$

- Die Vektoren $\underline{\mathbf{E}}_0^\pm$ und $\underline{\mathbf{H}}_0^\pm$ bezeichnen die komplexen Amplituden der Feldstärke zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $z = 0$.

Maxwellsche Gleichungen für zeitharmonische ebene Wellen

- Die Lösungen der Helmholtz-Gleichung betrachten die E- und H-Felder unabhängig voneinander.
- Um eine elektromagnetische Welle zu beschreiben, müssen $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ jedoch die Maxwellschen Gleichungen erfüllen.
- Für eine ebene Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet, sind die Feldgrößen definitionsgemäß unabhängig von den transversalen Koordinaten x und y , weshalb alle partiellen Ableitungen nach x und y verschwinden.
- Unter dieser Bedingung vereinfachen sich das Durchflutungs- und das Induktionsgesetz zu

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = j\omega\varepsilon \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = j\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}}$$

und

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = -j\omega\mu \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = -j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}$$

Feldkomponenten zeitharmonischer ebener Wellen

- Durch Einsetzen der Lösungsansätze für $\underline{\mathbf{E}}(z, t)$ und $\underline{\mathbf{H}}(z, t)$ in die reduzierten Maxwell'schen Gleichungen lassen sich die Beziehungen zwischen den transversalen Komponenten herleiten.
- Wir nutzen dabei den Wellenwiderstand $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ zur kompakten Darstellung der Kopplung und erhalten ...
- ... für die in **+z-Richtung** laufende Welle
- ... für die in **-z-Richtung** laufende Welle

$$\underline{E}_x^+ = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_y^+}{\partial z} = \frac{k}{\omega\varepsilon} \underline{H}_y^+ = Z \underline{H}_y^+$$

$$\underline{E}_y^+ = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_x^+}{\partial z} = -\frac{k}{\omega\varepsilon} \underline{H}_x^+ = -Z \underline{H}_x^+$$

$$\underline{E}_z^+ = 0$$

$$\underline{H}_z^+ = 0$$

$$\underline{E}_x^- = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_y^-}{\partial z} = -\frac{k}{\omega\varepsilon} \underline{H}_y^- = -Z \underline{H}_y^-$$

$$\underline{E}_y^- = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_x^-}{\partial z} = \frac{k}{\omega\varepsilon} \underline{H}_x^- = Z \underline{H}_x^-$$

$$\underline{E}_z^- = 0$$

$$\underline{H}_z^- = 0$$

- Da jeweils nur \underline{E}_x und \underline{H}_y bzw. \underline{E}_y und \underline{H}_x miteinander gekoppelt sind, lässt sich jede zeitharmonische ebene Welle als Superposition zweier unabhängiger Wellen darstellen.

Wellenvektor

- Bisher haben wir ausschließlich ebene Wellen betrachtet, welche sich entlang der z -Achse ausbreiten.
- Zur Beschreibung beliebiger Ausbreitungsrichtungen mit Einheitsvektor \mathbf{e}_a führen wir den Wellenvektor ein

$$\mathbf{k} = k \mathbf{e}_a .$$

- Die Ausbreitung im Raum lässt sich dann kompakt durch das Skalarprodukt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ im Exponenten ausdrücken.
- Mit der komplexen Amplitude $\underline{\mathbf{H}}_0$ bei $t = 0$ und $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ schreiben wir dann

$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{H}}_0 \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) .$$

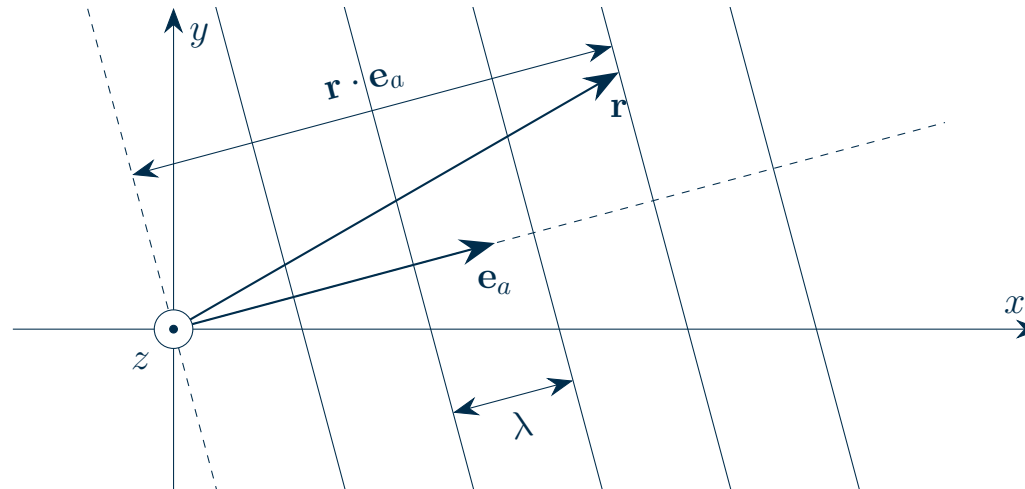
- Der zugehörige komplexe Zeiger des E-Felds berechnet sich direkt aus dem Kreuzprodukt der Ausbreitungsrichtung und des Magnetfeldes gemäß

$$\underline{\mathbf{E}} = Z (\underline{\mathbf{H}} \times \mathbf{e}_a)$$

- Die Feldvektoren $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{H}}$ und der Wellenvektor \mathbf{k} bilden *in dieser Reihenfolge* stets ein Rechtssystem.

Wellenfronten

- Wir bezeichnen die Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, in denen die Phase der Welle zu einem festen Zeitpunkt t_0 konstant ist, als *Wellenfronten*.
- Mathematisch entspricht diese Definition der Bedingung $\omega t_0 \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \phi_0 + n2\pi, n \in \mathbb{Z}$, was die Gleichung paralleler Ebenen (indiziert durch n) im dreidimensionalen Raum darstellt.
- Der räumliche Abstand zwischen zwei benachbarten Flächen gleicher Phase entspricht der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$.



Vorlesungsinhalte

1. Zeitharmonische Felder und Wellen

2. Zeitharmonische ebene Wellen

3. Poynting-Vektor

4. Komplexer Poynting-Vektor

5. Polarisation elektromagnetischer Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Mathematische Beschreibung Polarisationszustand

Elektromagnetische Feldenergie

- Elektrische und magnetische Felder speichern Energie (vgl. Plattenkondensator bzw. Spule).
- Die in einem Volumen V gespeicherte elektrische bzw. magnetische Energie kann bestimmt werden aus

$$W_e = \int_V w_e dV \quad \text{und} \quad W_m = \int_V w_m dV$$

- Dabei sind w_e und w_m auf das Volumen bezogene *Energiedichten*, die bestimmt werden können aus

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad \text{und} \quad w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

- Die gesamte elektromagnetische Feldenergie ergibt sich als Summe der elektrischen und der magnetischen Feldenergie zu $W_{em} = W_e + W_m$ und $w_{em} = w_e + w_m$

Satz von Poynting (I)

- Der *Satz von Poynting* besagt, dass jede Änderung dW_{em} der in einem Volumen V gespeicherten elektromagnetischen Feldenergie in einem Zeitintervall dt beschrieben werden kann als

$$dW_{\text{em}} = - \underbrace{\int_F \mathbf{S} \cdot d\mathbf{F} dt}_{\text{durch die Hüllfläche } F \text{ abgestrahlte Feldenergie}} - \underbrace{\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV dt}_{\text{in Wärme umgewandelte Feldenergie (d.h. Ohmsche Verluste)}}$$

- Der Vektor \mathbf{S} wird hierbei als *Poynting-Vektor* bezeichnet.
- Er beschreibt Betrag und Richtung der pro Flächenelement und Zeiteinheit abgestrahlten elektromagnetischen Feldenergie und hat somit die Einheit W/m^2 .

Satz von Poynting (II)

- Bezogen auf das Zeitintervall dt lässt sich der *Satz von Poynting* auch als Leistungsbilanz ausdrücken:

$$\frac{dW_{\text{em}}}{dt} = - \int_F \mathbf{S} \cdot d\mathbf{F} - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$$

- Mithilfe des Gaußschen Satzes und der Definition der Energiedichte ergibt sich daraus

$$\frac{d}{dt} \int_V w_{\text{em}} dV = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$$

- Dies lässt sich mit den Energiedichten für das elektrische und das magnetische Feld schreiben als

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (1)$$

Satz von Poynting (III)

- Mit $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ sowie unter der Annahme, dass ε und μ nicht von der Zeit abhängen, lässt sich mithilfe von

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \varepsilon \left(\frac{d\mathbf{E}}{dt} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt} \right) = 2\mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad \text{und analog dazu} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = 2\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt},$$

zeigen, dass

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) = \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (2)$$

- Aus (1) und (2) ergibt sich somit

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} - \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) - \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

- Und schließlich mit den Maxwellschen Gleichungen für die Rotation von \mathbf{E} und \mathbf{H}

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

Poynting-Vektor

- Wird nun die Divergenz auf beiden Seiten der Gleichung weggelassen, erhalten wir einen Ausdruck für den Poynting-Vektor.

Definition:

Der *Poynting-Vektor* \mathbf{S} beschreibt Betrag und Richtung der pro Flächenelement und Zeiteinheit abgestrahlten Feldenergie gemäß

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Er hat die Einheit J/s/m^2 bzw. W/m^2 .

Vorlesungsinhalte

1. Zeitharmonische Felder und Wellen

2. Zeitharmonische ebene Wellen

3. Poynting-Vektor

4. Komplexer Poynting-Vektor

5. Polarisation elektromagnetischer Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Mathematische Beschreibung Polarisationszustand

Poynting-Vektor bei harmonischer Zeitabhängigkeit

- Nehmen wir nun eine harmonische Zeitabhängigkeit mit Kreisfrequenz ω sowie (zur Vereinfachung) $\varphi = 0$ an, erhalten wir die reellen Feldvektoren

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi),$$

wobei ϕ eine beliebige Phasenverschiebung zwischen dem E- und H-Feld beschreibe.

- Der instantane Poynting-Vektor ergibt sich dementsprechend zu

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi)$$

- Mit den Rechenregeln der Trigonometrie lässt sich dieser Ausdruck auch schreiben als

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \left[\underbrace{\left(1 + \cos(2\omega t)\right) \cos(\phi)}_{\text{Wirkleistungsanteil}} - \underbrace{\sin(2\omega t) \sin(\phi)}_{\text{Blindleistungsanteil}} \right]$$

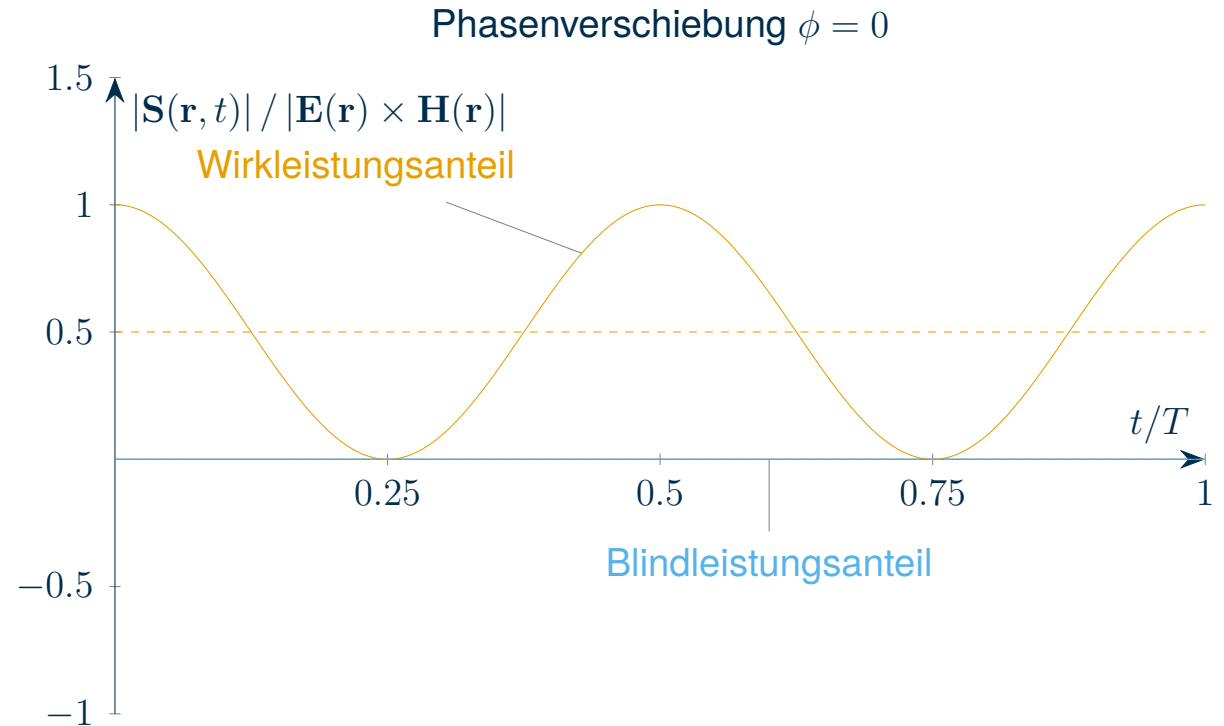
- Abhängig von der Phasenverschiebung ϕ ergibt sich ein Wirkleistungs- und ein Blindleistungsanteil.

Wirk- & Blindleistungsanteil

- Der Wirkleistungs- und der Blindleistungsanteil oszillieren also mit der Kreisfrequenz 2ω .
- Im zeitlichen Mittel über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ verschwinden alle oszillierenden Terme und es verbleibt allein der Wirkanteil

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) dt = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \cos(\phi)$$

- Abbildung: Normierte Darstellung des instantanen Poynting-Vektors $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ aufgeteilt in **Wirkleistungs-** und **Blindleistungsanteil**.
- Die gestrichelten Linien stellen den jeweiligen zeitlichen Mittelwert dar.

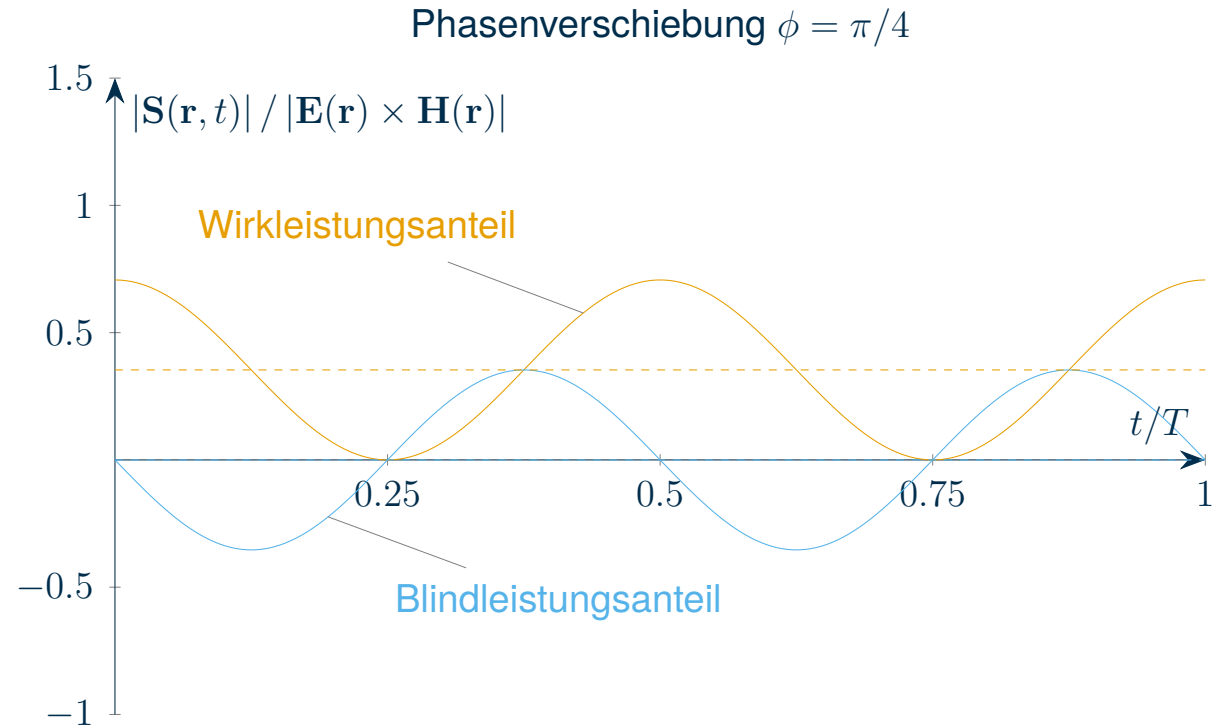


Wirk- & Blindleistungsanteil

- Der Wirkleistungs- und der Blindleistungsanteil oszillieren also mit der Kreisfrequenz 2ω .
- Im zeitlichen Mittel über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ verschwinden alle oszillierenden Terme und es verbleibt allein der Wirkanteil

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) dt = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \cos(\phi)$$

- Abbildung: Normierte Darstellung des instantanen Poynting-Vektors $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ aufgeteilt in **Wirkleistungs-** und **Blindleistungsanteil**.
- Die gestrichelten Linien stellen den jeweiligen zeitlichen Mittelwert dar.

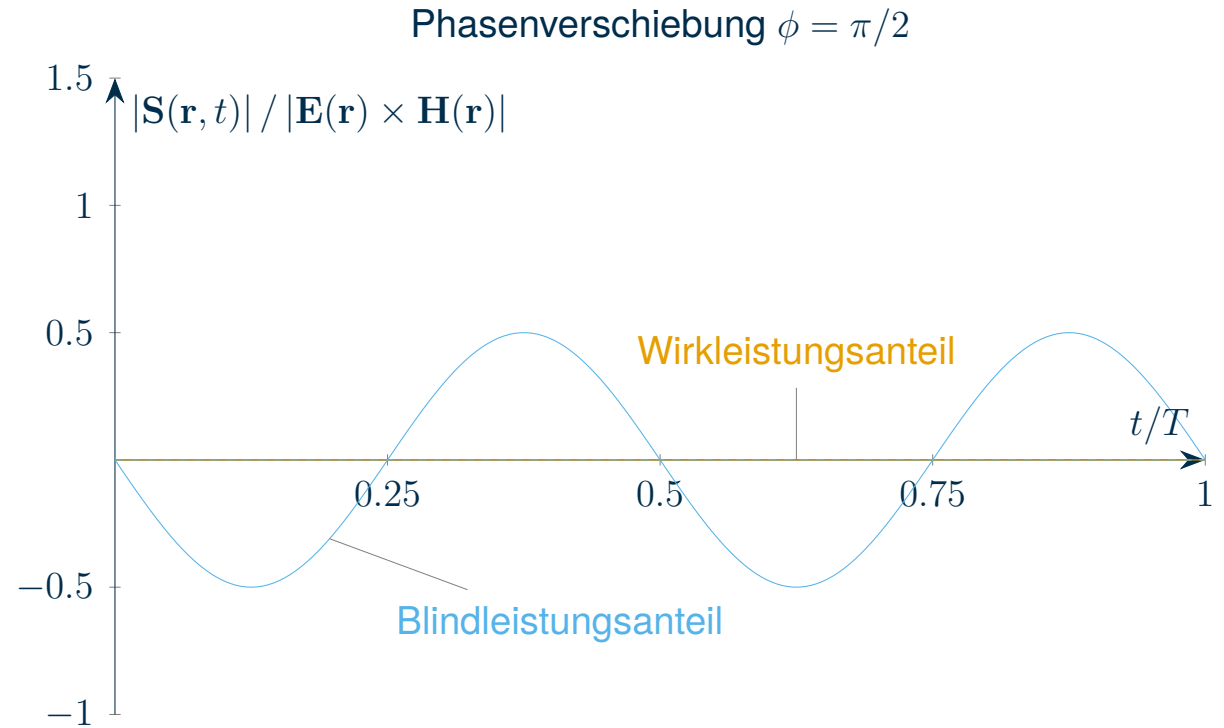


Wirk- & Blindleistungsanteil

- Der Wirkleistungs- und der Blindleistungsanteil oszillieren also mit der Kreisfrequenz 2ω .
- Im zeitlichen Mittel über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ verschwinden alle oszillierenden Terme und es verbleibt allein der Wirkanteil

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) dt = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \cos(\phi)$$

- Abbildung: Normierte Darstellung des instantanen Poynting-Vektors $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ aufgeteilt in **Wirkleistungs-** und **Blindleistungsanteil**.
- Die gestrichelten Linien stellen den jeweiligen zeitlichen Mittelwert dar.



Berechnung mittels komplexer Zeiger

- Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit können wir mithilfe komplexer Zeiger darstellen:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \Re \{ \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j \omega t) \} = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j \omega t) + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \exp(-j \omega t)] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \Re \{ \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \exp(j \omega t) \} = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \exp(j \omega t) + \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) \exp(-j \omega t)]\end{aligned}$$

- In dieser Darstellung ergibt sich der instantane Poynting-Vektor zu

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{4} \left[\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j \omega t) + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \exp(-j \omega t) \right] \times \left[\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \exp(j \omega t) + \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) \exp(-j \omega t) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) + \underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) + (\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})) \exp(j 2\omega t) + (\underline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})) \exp(-j 2\omega t) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re \left\{ \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) + (\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})) \exp(j 2\omega t) \right\}\end{aligned}$$

- Bestimmen wir nun den zeitlichen Mittelwert, erhalten wir folgenden Ausdruck

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \Re \{ \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}) \} .$$

Komplexer Poynting-Vektor

Definition:

Wir definieren den *komplexen Poynting-Vektor* als

$$\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})] .$$

Sein Realteil gibt das zeitliche Mittel (und damit die Amplitude) des Wirkleistungsanteils, sein Imaginärteil die Amplitude des Blindleistungsanteils an.

Wichtig: Bei der Herleitung dieses Ausdrucks werden zwei komplexe Zeiger über das Kreuzprodukt nichtlinear verknüpft. Daher können wir den Poynting-Vektor *nicht* gemäß $\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}$ aus den komplexen Zeigern ermitteln!

- Setzen wir analog zu Folie 22 $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ und $\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(j\phi)$, erhalten wir wie auf Folie 23

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \Re \{ \underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) \} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \cos(\phi)$$

- Betrachten wir den Imaginärteil, ergibt sich entsprechend

$$\Im \{ \underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) \} = -\frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \sin(\phi)$$

Vorlesungsinhalte

1. Zeitharmonische Felder und Wellen

2. Zeitharmonische ebene Wellen

3. Poynting-Vektor

4. Komplexer Poynting-Vektor

5. Polarisation elektromagnetischer Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Mathematische Beschreibung Polarisationszustand

Polarisation zeitharmonischer ebener Wellen (I)

Definition:

Die *Polarisation* einer elektromagnetischen Welle beschreibt die Schwingungsrichtung ihres elektrischen Feldvektors und deren zeitliche bzw. räumliche Entwicklung.

- *Wichtig:* Die Polarisation einer Welle ist nicht zu verwechseln mit dem elektrischen Polarisationsfeld in einem Medium, das die Wechselwirkung dieses Mediums mit einem elektrischen Feld beschreibt.
- Betrachten wir eine sich in z -Richtung ausbreitende zeitharmonische ebene Welle, z.B. bei $z = 0$, wobei die transversalen Komponenten des elektrischen Feldes gegeben sind durch

$$E_x(t) = E_x \cos(\omega t + \varphi_x) = E_0 a_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$

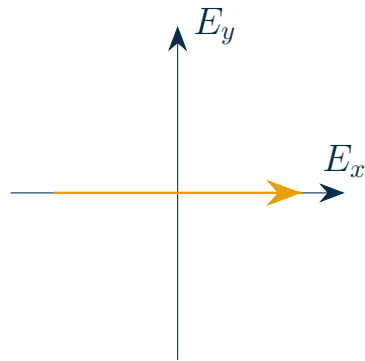
$$E_y(t) = E_y \cos(\omega t + \varphi_y) = E_0 a_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

mit den Amplituden E_x und E_y , der Normierung $E_0 = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ sowie den Phasen φ_x und φ_y .

Polarisation zeitharmonischer ebener Wellen (II)

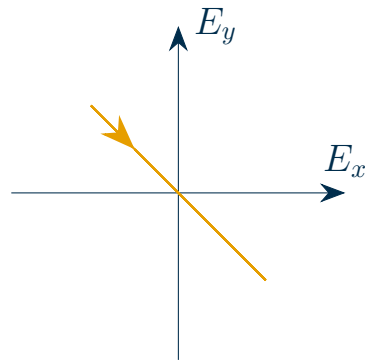
- Tragen wir $E_x(t)$ und $E_y(t)$ im Intervall $0 \leq t < \frac{2\pi}{\omega}$ in einem E_x - E_y -Graphen auf, erhalten wir abhängig von a_x , a_y , φ_x und φ_y lineare, kreisförmige oder elliptische Verläufe.
- Die folgenden Graphen zeigen Beispiele, wobei die Spitze des Pfeils den Wert bei $t = 0$ angibt:

linear in x -Richtung



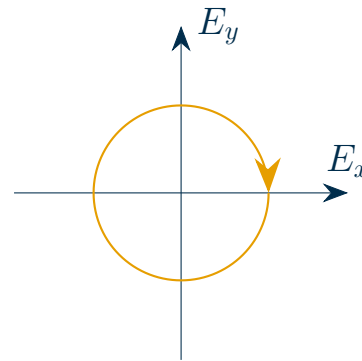
$$\begin{aligned} a_x &= 1 & \varphi_x &= 0 \\ a_y &= 0 & \varphi_y &= 0 \end{aligned}$$

-45° linear



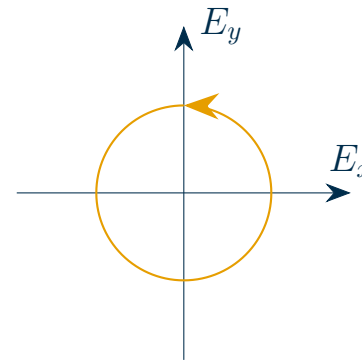
$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \varphi_x &= \frac{4\pi}{3} \\ a_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \varphi_y &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

rechtszirkular



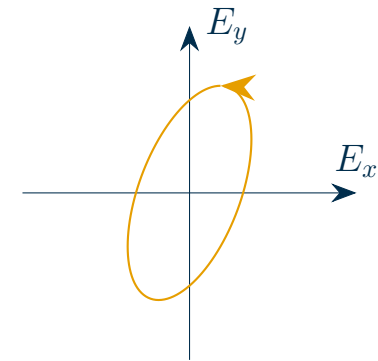
$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \varphi_x &= 0 \\ a_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \varphi_y &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

linkszirkular



$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \varphi_x &= \frac{\pi}{2} \\ a_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \varphi_y &= 0 \end{aligned}$$

elliptisch



$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{2} & \varphi_x &= \frac{\pi}{3} \\ a_y &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \varphi_y &= 0 \end{aligned}$$

Polarisationszustände

- Also ergeben sich in Abhängigkeit von φ_x und φ_y verschiedene Drehrichtungen des Feldvektors.
- Diese Drehrichtung geben wir stets aus der Perspektive eines Beobachters an, *auf den die Welle zuläuft*.

Polarisationszustand	a_x	a_y	$\Delta\varphi = (\varphi_y - \varphi_x) \bmod 2\pi$
Linear (x-Richtung)	1	0	beliebig
Linear (y-Richtung)	0	1	beliebig
Linear (sonstige)	$0 < a_x < 1$	$\sqrt{1 - a_x^2}$	$m\pi, m \in \mathbb{Z}$
Rechtszirkular	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{2}$
Linkszirkular	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3\pi}{2}$
Elliptisch (rechtsdrehend)	$0 < a_x < 1$	$\sqrt{1 - a_x^2}$	$0 < \Delta\varphi < \pi$
Elliptisch (linksdrehend)	$0 < a_x < 1$	$\sqrt{1 - a_x^2}$	$\pi < \Delta\varphi < 2\pi$

Jones-Vektor Darstellung

- In komplexer Zeigerschreibweise lassen sich die transversalen Feldkomponenten darstellen als

$$\underline{E}_x(t) = E_x \exp(j \omega t + j \varphi_x) = \underline{E}_x \exp(j \omega t) = E_0 \underline{a}_x \exp(j \omega t)$$

$$\underline{E}_y(t) = E_y \exp(j \omega t + j \varphi_y) = \underline{E}_y \exp(j \omega t) = E_0 \underline{a}_y \exp(j \omega t)$$

- Aus den normierten komplexen Amplituden $\underline{a}_x = a_x \exp(j \varphi_x)$ und $\underline{a}_y = a_y \exp(j \varphi_y)$ ergibt sich der Jones-Vektor

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \end{pmatrix},$$

wobei aufgrund obiger Normierung $|\underline{a}_x|^2 + |\underline{a}_y|^2 = 1$ gilt.

- Mithilfe des Jones-Vektors und einer Jones-Matrix können wir den Einfluss polarisationsabhängiger Elemente auf vollständig polarisierte Wellen beschreiben.
- *Hinweis:* Nicht alle elektromagnetischen Wellen sind vollständig polarisiert.
- Beispielsweise lässt sich Sonnenlicht als Überlagerung vieler Wellen zufälliger Polarisation auffassen und ist damit unpolarisiert.

Vorlesungsinhalte

1. Zeitharmonische Felder und Wellen

2. Zeitharmonische ebene Wellen

3. Poynting-Vektor

4. Komplexer Poynting-Vektor

5. Polarisation elektromagnetischer Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Mathematische Beschreibung Polarisationszustand

Was Sie gelernt haben sollten

- Unter welchen Bedingungen die Maxwell'schen Gleichungen ohne explizite Zeitabhängigkeit und nur mit komplexen Amplituden formuliert werden können.
- Wie die Wellengleichung und die Helmholtz-Gleichung zusammenhängen.
- Wie zeitharmonische ebene Wellen mithilfe von komplexen Zeigern und dem Wellenvektor bzw. der Wellenzahl beschrieben werden können.
- Wie die abgestrahlte Feldenergie durch den Poynting-Vektor beschrieben wird.
- Wie der reelle und komplexe Poynting-Vektor zusammenhängen.
- Auf welche Weise Wirk- und Blindleistungstransport durch den Poynting-Vektor beschrieben werden.
- Welche Bedeutung die Polarisation einer Welle hat.
- Wie die verschiedenen Polarisationszustände zustande kommen und wie diese mathematisch beschrieben werden können.

Vorlesungsinhalte

1. Zeitharmonische Felder und Wellen

2. Zeitharmonische ebene Wellen

3. Poynting-Vektor

4. Komplexer Poynting-Vektor

5. Polarisation elektromagnetischer Wellen

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Mathematische Beschreibung Polarisationszustand

Vorlesungsinhalte: Anhang

7. Anhang

Mathematische Beschreibung Polarisationszustand

Einführung

- Wir definieren den transversalen elektrischen Feldvektor \mathbf{E}^\perp in $z = \text{const}$

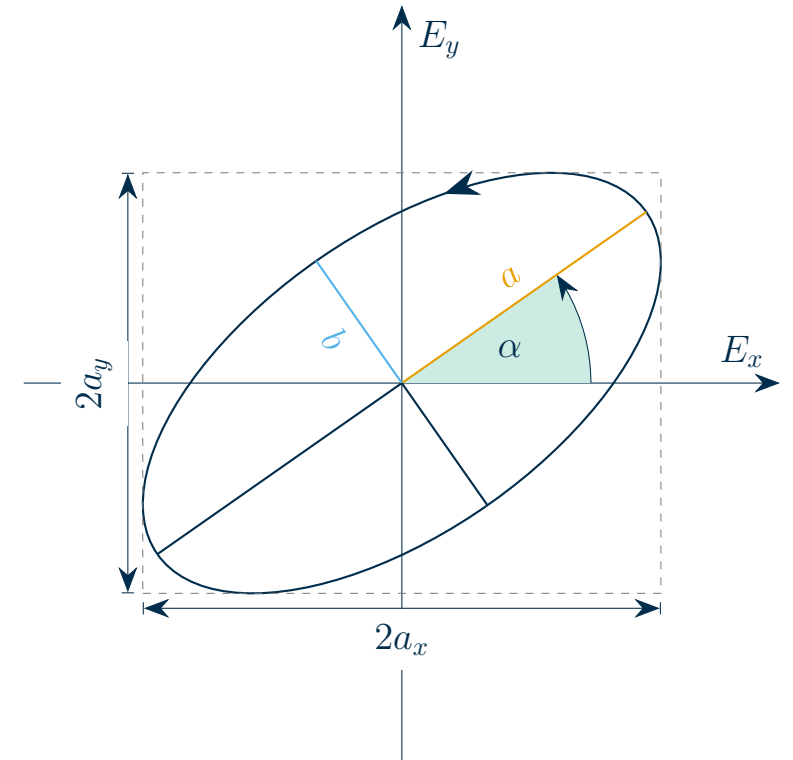
$$\mathbf{E}^\perp(t) = \begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \cos(\omega t + \varphi_x) \\ a_y \cos(\omega t + \varphi_y) \end{pmatrix}$$

- Mithilfe der Additionstheoreme zerlegen wir \mathbf{E}^\perp in eine Überlagerung von Sinus- und Cosinusschwingungen

$$\mathbf{E}^\perp(t) = \begin{pmatrix} a_x \cos(\varphi_x) \cos(\omega t) - a_x \sin(\varphi_x) \sin(\omega t) \\ a_y \cos(\varphi_y) \cos(\omega t) - a_y \sin(\varphi_y) \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

- \mathbf{E}^\perp beschreibt also eine Ellipse in Parameterform mit den Halbachsen a und b , die gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel α gedreht wurde:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ b \sin(\omega t) \end{pmatrix}}_{\text{Ellipse}} = \begin{pmatrix} a \cos(\alpha) \cos(\omega t) - b \sin(\alpha) \sin(\omega t) \\ a \sin(\alpha) \cos(\omega t) + b \cos(\alpha) \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$



Parameter der Polarisationsellipse

- Um die Parameter der Ellipse zu bestimmen, führen wir einen Koeffizientenvergleich zwischen dem Feldvektor und der gedrehten Ellipsenform durch.
- Das Ziel ist es, den Drehwinkel α sowie die Halbachsen a, b durch a_x, a_y und $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ auszudrücken.
- Mithilfe dieser Parameter, können wir die Polarisationsellipse grafisch darstellen.

Koeffizientenvergleich

Durch Vergleich der Terme vor $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ erhalten wir vier Gleichungen

$$a \cos(\alpha) = a_x \cos(\varphi_x) \quad (3)$$

$$b \sin(\alpha) = a_x \sin(\varphi_x) \quad (4)$$

$$a \sin(\alpha) = a_y \cos(\varphi_y) \quad (5)$$

$$-b \cos(\alpha) = a_y \sin(\varphi_y) \quad (6)$$

Durch geschickte Verknüpfung dieser Terme werden wir im Folgenden die gesuchten Parameter der Polarisationsellipse herleiten.

Drehwinkel der Polarisationsellipse

- Unser Ziel ist es, auf der rechten Seite einen Ausdruck zu erhalten, der von $\Delta\varphi$ abhängt, also dem Additionstheorem für den Cosinus ähnelt $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$.

- Dazu addieren wir die Produkte (3) · (5) sowie (4) · (6) und erhalten mit $\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$

$$(a^2 - b^2)\sin(2\alpha) = 2a_x a_y \cos(\varphi_y - \varphi_x) = 2a_x a_y \cos(\Delta\varphi) \quad (7)$$

- Im nächsten Schritt eliminieren wir auf der rechten Seite φ_x und φ_y .

- Dazu quadrieren wir alle vier Gleichungen und addieren zunächst (3) und (4) sowie (5) und (6):

$$a^2 \cos^2(\alpha) + b^2 \sin^2(\alpha) = a_x^2 \cos^2(\varphi_x) + a_x^2 \sin^2(\varphi_x) = a_x^2 \quad (8)$$

$$a^2 \sin^2(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha) = a_y^2 \cos^2(\varphi_y) + a_y^2 \sin^2(\varphi_y) = a_y^2 \quad (9)$$

- Bilden der Differenz von (8) und (9) liefert mit $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha)$

$$a^2(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) + b^2(\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)) = (a^2 - b^2)\cos(2\alpha) = a_x^2 - a_y^2 \quad (10)$$

- Division von (7) durch (10) eliminiert schließlich die Halbachsen a, b auf der linken Seite

$$\tan(2\alpha) = \frac{2a_x a_y}{a_x^2 - a_y^2} \cos(\Delta\varphi), \text{ wobei } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

Halbachsenlängen der Polarisationsellipse

- Um nun die Längen der Halbachsen a und b explizit zu bestimmen, bestimmen wir zunächst $a^2 + b^2$ durch die Addition von (8) und (9)

$$a^2 + b^2 = (a^2 \cos^2(\alpha) + b^2 \sin^2(\alpha)) + (a^2 \sin^2(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha)) = a_x^2 + a_y^2 \quad (11)$$

- Mit der Identität $\cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha) = 1$ erhalten wir aus (7) und (10)

$$(a^2 - b^2)^2 = (a_x^2 - a_y^2)^2 + (2a_x a_y \cos(\Delta\varphi))^2$$

- Somit erhalten wir für die Differenz der quadrierten Halbachsen

$$a^2 - b^2 = \sqrt{(a_x^2 - a_y^2)^2 + (2a_x a_y \cos(\Delta\varphi))^2} \quad (12)$$

- Durch Addition bzw. Subtraktion der Summe (11) und der Differenz (12) erhalten wir

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + \sqrt{(a_x^2 - a_y^2)^2 + (2a_x a_y \cos(\Delta\varphi))^2}}$$
$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a_x^2 + a_y^2 - \sqrt{(a_x^2 - a_y^2)^2 + (2a_x a_y \cos(\Delta\varphi))^2}}$$

Vereinfachung bei vollständiger Polarisation

- Für vollständig polarisierte Wellen gilt $a_x^2 + a_y^2 = 1$, weshalb es sich anbietet, das Verhältnis von a_x und a_y durch einen Winkel θ mit $0 \leq \theta \leq \pi/2$ zu beschreiben:

$$a_x = \cos(\theta) \quad \text{und} \quad a_y = \sin(\theta)$$

- Dann folgt mithilfe trigonometrischer Beziehungen

$$\begin{aligned} 2a_x a_y &= 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \sin(2\theta) \\ a_x^2 + a_y^2 &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \\ a_x^2 - a_y^2 &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta) \end{aligned}$$

- In dieser Schreibweise erhalten wir mit $\cos^2(2\theta) = 1 - \sin^2(2\theta)$ und $1 - \cos^2(\Delta\varphi) = \sin^2(\Delta\varphi)$

$$\tan(2\alpha) = \tan(2\theta) \cos(\Delta\varphi)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \sin^2(2\theta) \sin^2(\Delta\varphi)}}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sin^2(2\theta) \sin^2(\Delta\varphi)}}$$