

# EMFW Vorlesung 04: Wellen in dispersiven Medien

Wintersemester 2025/26

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 13. Januar 2026

# Vorlesungsinhalte

## 1. Einleitung

## 2. Makroskopische Beschreibung dispersiver Medien

## 3. Ebene Wellen in dispersiven Medien

## 4. Lorentz-Drude-Resonatormodell

## 5. Dielektrische und leitende Medien

## 6. Was Sie gelernt haben sollten

## 7. Anhang

Fouriertransformation

Faltungstheorem

Kramers-Kronig-Beziehungen

Literatur

# Vorlesungsinhalte

## 1. Einleitung

## 2. Makroskopische Beschreibung dispersiver Medien

## 3. Ebene Wellen in dispersiven Medien

## 4. Lorentz-Drude-Resonatormodel

## 5. Dielektrische und leitende Medien

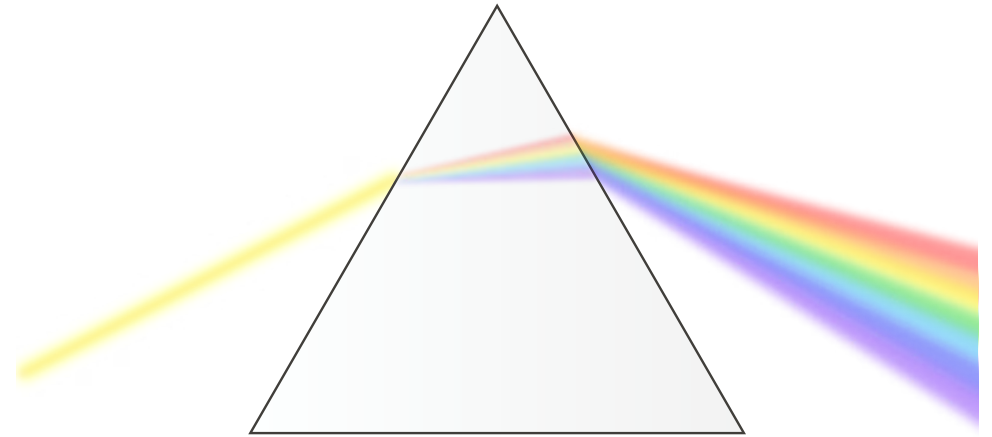
## 6. Was Sie gelernt haben sollten

## 7. Anhang

- Fouriertransformation
- Faltungstheorem
- Kramers-Kronig-Beziehungen
- Literatur

# Einleitung

- Reale Medien weisen unter dem Einfluss elektromagnetischer Felder im Allgemeinen *dispersives* Verhalten auf.
- Das heißt, dass die Reaktion des Mediums auf das Feld von der Frequenz der anregenden Welle abhängt.
- Bei der Signalübertragung führt diese Frequenzabhängigkeit dazu, dass breitbandige Signale in dispersiven Medien verzerrt werden.
- Die Ursache ist die Trägheit der Ladungsträger (Elektronen, Ionen, Moleküle), welche einem zeitveränderlichen Feld nicht instantan folgen, sondern nur verzögert reagieren können.
- Die Reaktion der meisten Medien auf H-Felder ist deutlich schwächer ausgeprägt als auf E-Felder.
- Daher beschränken wir uns in dieser Vorlesung auf letztere und nehmen stets nichtmagnetische Medien mit  $\mu = \mu_0$  an.



Das Prisma als klassisches Beispiel: Weißes Licht wird in seine Spektralfarben zerlegt. Referenz: Suidroot, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons

# Vorlesungsinhalte

## 1. Einleitung

## **2. Makroskopische Beschreibung dispersiver Medien**

## 3. Ebene Wellen in dispersiven Medien

## 4. Lorentz-Drude-Resonatormodel

## 5. Dielektrische und leitende Medien

## 6. Was Sie gelernt haben sollten

## 7. Anhang

- Fouriertransformation
- Faltungstheorem
- Kramers-Kronig-Beziehungen
- Literatur

# Wiederholung: Elektrische Polarisation

- Die elektrische Polarisation  $\mathbf{P}$  beschreibt makroskopisch die Reaktion eines dielektrischen Mediums auf ein externes elektrisches Feld  $\mathbf{E}$  (vgl. Vorlesung 01).
- Mikroskopisch betrachtet, übt das Feld Kräfte auf die Ladungsträger aus, was z. B. zur Verschiebung gebundener Ladungen (Verschiebungspolarisation) oder zur Ausrichtung permanenter Dipole (Orientierungspolarisation) führt.
- Wir beschränken uns auf lineare (feldstärkeunabhängige), homogene (ortsunabhängige) und isotrope (richtungsunabhängige) Medien.
- Bisher haben wir zudem Gedächtnisfreiheit angenommen, also eine *instantane* Reaktion des Mediums auf das externe Feld.
- Unter dieser Annahme ist die Polarisation direkt proportional zum momentanen Feld und mit der elektrischen Suszeptibilität  $\chi_e$  definiert als

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(t).$$

# Elektrische Polarisation gedächtnisbehafteter Medien

- Die einfache Proportionalität  $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$  gilt nur, solange sich das Feld viel langsamer ändert als die Ladungsträger reagieren können.
- Bei schnell veränderlichen Feldern wird die Trägheit der Ladungsträger im Medium signifikant und das Medium zeigt ein Gedächtnis: Die aktuelle Polarisation hängt nun auch von dem Feld zu vergangenen Zeitpunkten ab.
- Dieses Gedächtnis beschreiben wir mathematisch mit der zeitabhängigen elektrischen Suszeptibilität  $\hat{\chi}_e(t)$  durch das Faltungsintegral

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau .$$

- Wir können die zeitabhängige elektrische Suszeptibilität  $\hat{\chi}_e(t)$  also als Impulsantwort des Mediums interpretieren.

# Frequenzgang gedächtnisbehafteter Medien

- Die Beschreibung der Polarisierung mittels Faltungsintegral im Zeitbereich ist mathematisch aufwendig.
- Gemäß dem Faltungstheorem vereinfacht sich die Faltung im Frequenzbereich zu einer Multiplikation.
- Wir ermitteln zunächst die Fouriertransformation von  $\hat{\chi}_e(t)$  (vgl. Anhang S. 39), d. h. den Frequenzgang des Mediums

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \mathcal{F}\{\hat{\chi}_e(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

- Für eine zeitharmonische (monochromatische) Welle mit der Kreisfrequenz  $\omega$  können wir dann die komplexe Amplitude der elektrischen Polarisierung schreiben als

$$\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \underline{\chi}_e(\omega) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}).$$

- **Fazit:** Im Frequenzbereich wird auch ein dispersives Medium durch eine einfache lineare Beziehung beschrieben - allerdings ist der Proportionalitätsfaktor  $\underline{\chi}_e$  nun komplexwertig und frequenzabhängig.

# Kausalität und Kramers-Kronig-Beziehungen

- Jedes reale Medium verhält sich *kausal*: Es kann erst auf ein Feld reagieren, *nachdem* dieses anliegt.
- Folglich ist die zeitabhängige elektrische Suszeptibilität eine kausale Funktion und es gilt  $\hat{\chi}_e(t) = 0$  für alle  $t < 0$ .
- Daher verknüpfen die sogenannten *Kramers-Kronig-Beziehungen* (Herleitung im Anhang ab S. 49) den Real- und Imaginärteil des Frequenzgangs  $\underline{\chi}_e(\omega)$

$$\Re\{\underline{\chi}_e(\omega)\} = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega' \Im\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$

$$\Im\{\underline{\chi}_e(\omega)\} = -\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega \Re\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$

- Wie wir später sehen werden, bestimmen der Real- bzw. Imaginärteil von  $\underline{\chi}_e(\omega)$  die relative Permittivität bzw. die Absorption im Medium.
- **Konsequenz:** Ein Medium kann nicht dispersiv sein (frequenzabhängiger Realteil von  $\underline{\chi}_e$ ), ohne gleichzeitig in irgendeinem Frequenzbereich Verluste aufzuweisen (Imaginärteil  $\neq 0$ ).

## Wichtig:

Dispersion und Absorption (Dämpfung) sind physikalisch untrennbar miteinander verbunden.

# Komplexe Permittivität und Brechzahl

- Mit der komplexen relativen Permittivität  $\underline{\varepsilon}_r$  erhalten wir für die komplexe Amplitude der elektrischen Flussdichte

$$\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \left( 1 + \underline{\chi}_e \right) \underline{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \underline{\mathbf{E}} .$$

- Insbesondere in der Optik wird anstelle der (komplexen) relativen Permittivität oftmals die (komplexe) Brechzahl  $\underline{n}$  verwendet mit

$$\underline{n} = n_{\text{re}} + j n_{\text{im}} = \sqrt{\mu_r \underline{\varepsilon}_r} = \sqrt{\underline{\varepsilon}_r} = \sqrt{1 + \underline{\chi}_e} .$$

- Umgekehrt erhalten wir bei gegebener Brechzahl die Permittivität gemäß

$$\underline{\varepsilon}_r = \underline{n}^2 = \underbrace{\underline{n}_{\text{re}}^2 - \underline{n}_{\text{im}}^2}_{=\underline{\varepsilon}_{r,\text{re}}} + j \underbrace{2\underline{n}_{\text{re}}\underline{n}_{\text{im}}}_{=\underline{\varepsilon}_{r,\text{im}}} .$$

- *Wichtig:* Analog zu  $\underline{\chi}_e$  sind auch  $\underline{\varepsilon}_r$  und  $\underline{n}$  im Allgemeinen frequenzabhängig.

# Vorlesungsinhalte

1. Einleitung

2. Makroskopische Beschreibung dispersiver Medien

**3. Ebene Wellen in dispersiven Medien**

4. Lorentz-Drude-Resonatormodel

5. Dielektrische und leitende Medien

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

- Fouriertransformation
- Faltungstheorem
- Kramers-Kronig-Beziehungen
- Literatur

# Wiederholung: Zeitharmonische ebene Wellen

- Bisher haben wir zur Lösung der Helmholtzgleichung idealisierte, verlustfreie Medien vorausgesetzt.
- Dabei waren die Permittivität  $\varepsilon$  und die Wellenzahl  $k$  rein reelle Konstanten.
- Die elementarste Lösung dieser Gleichung ist die zeitharmonische ebene Welle.
- Für eine Ausbreitung in  $+z$ -Richtung lautet z. B. der komplexe Zeiger der  $x$ -Komponente des elektrischen Feldvektors

$$\underline{E}_x(z, t) = \underline{E}_{x,0} \exp(j[\omega t - kz]) .$$

- Für die Wellenzahl  $k$  gilt im idealen Medium mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$  und der Brechzahl  $n$

$$k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = n \frac{\omega}{c_0} .$$

## Neuerung in dieser Vorlesung:

- Wir erweitern die Betrachtung auf *dispersive Medien*.
- Wir werden zeigen, dass die Wellenzahl  $\underline{k}(\omega)$  nun komplexwertig und frequenzabhängig wird und analysieren, wie diese Eigenschaften die Wellenausbreitung beeinflussen.

# Gedämpfte zeitharmonische ebene Wellen

- In einem realen Medium mit der frequenzabhängigen komplexen Brechzahl  $\underline{n}$ , ist auch die Wellenzahl komplexwertig

$$\underline{k} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\omega}{c_0} \underline{n} = \frac{\omega}{c_0} (n_{\text{re}} + j n_{\text{im}}) = k_0 (n_{\text{re}} + j n_{\text{im}}) .$$

- Für den komplexen Zeiger der  $x$ -Komponente des E-Felds einer in  $+z$ -Richtung laufenden zeitharmonischen ebenen Welle gilt dann beispielsweise

$$\underline{E}_x(z, t) = \underline{E}_{x,0} \exp(j[\omega t - \underline{k}z]) = \underline{E}_{x,0} \exp(k_0 n_{\text{im}} z) \exp(j[\omega t - k_0 n_{\text{re}} z]) .$$

## Beobachtung:

- Der **Realteil der Brechzahl**  $n_{\text{re}}$  bestimmt also die **Entwicklung der Phase** von  $\underline{E}_x$  und damit die Wellenausbreitung.
- Der **Imaginärteil**  $n_{\text{im}}$  führt - je nach Vorzeichen - zu einem **exponentiellen Ab- oder Aufklingen der Feldamplitude** in Ausbreitungsrichtung.
- In der Regel gilt  $n_{\text{im}} < 0$  und der Imaginärteil der Brechzahl führt zu einer Dämpfung der Feldamplitude.

# Phasen- und Dämpfungskonstante

- Mit der *Phasenkonstante*  $\beta = k_0 n_{re}$  und der *Dämpfungskonstante*  $\alpha = -2k_0 n_{im}$  erhalten wir für die Wellenzahl

$$\underline{k} = \beta - j\alpha/2$$

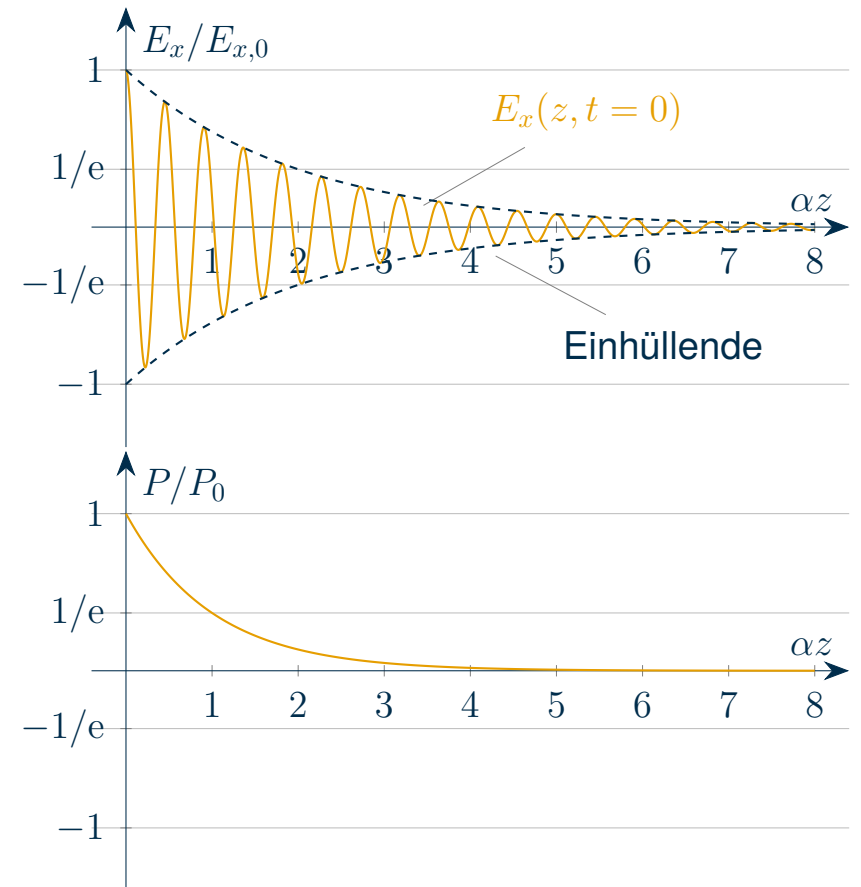
- Da  $\alpha$  über den  $1/e$ -Abfall der Leistung bestimmt wird, enthält die Definition den Vorfaktor 2.
- Der komplexen Zeiger  $\underline{E}_x$  nimmt dann folgende Form an

$$\underline{E}_x(z, t) = \underline{E}_{x,0} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}z\right) \exp(j[\omega t - \beta z]) .$$

- Mit  $\underline{E}_{x,0} = E_{x,0}$  ergibt sich die reellwertige Feldkomponente zu

$$E_x(z, t) = \Re\{\underline{E}_x(z, t)\} = E_{x,0} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}z\right) \cos(\omega t - \beta z) .$$

- Die mittlere Leistung  $P \propto \bar{S}_z$  (Poynting-Vektor  $\bar{\mathbf{S}}(z) = \bar{S}_z(z) \mathbf{e}_z$ ) fällt dann aufgrund von  $S_z(z, t) \propto |E_x(z, t)|^2$  gemäß  $\exp(-\alpha z)$  ab.



# Phasengeschwindigkeit

- Wir betrachten die  $E_x$ -Komponente einer in  $+z$ -Richtung laufenden zeitharmonischen ebenen Welle

$$E_x(z, t) = E_{x,0} \cos(\omega t - \beta z).$$

- In dispersiven Medien ist die Brechzahl und damit auch  $\beta = \beta(\omega)$  frequenzabhängig.
- Verfolgen wir eine Ebene konstanter Phase  $\phi_0$  (z. B. ein Wellenberg oder Nulldurchgang), erhalten wir also die Bedingung  $\omega t - \beta(\omega)z = \phi_0$ .
- Diese Ebene „bewegt“ sich mit der sogenannten *Phasengeschwindigkeit*  $v_{\text{ph}} = \frac{dz}{dt}$  in Ausbreitungsrichtung (hier  $+z$ ).
- Umstellen von  $\phi_0$  nach  $z$  und Ableiten nach der Zeit führt damit auf

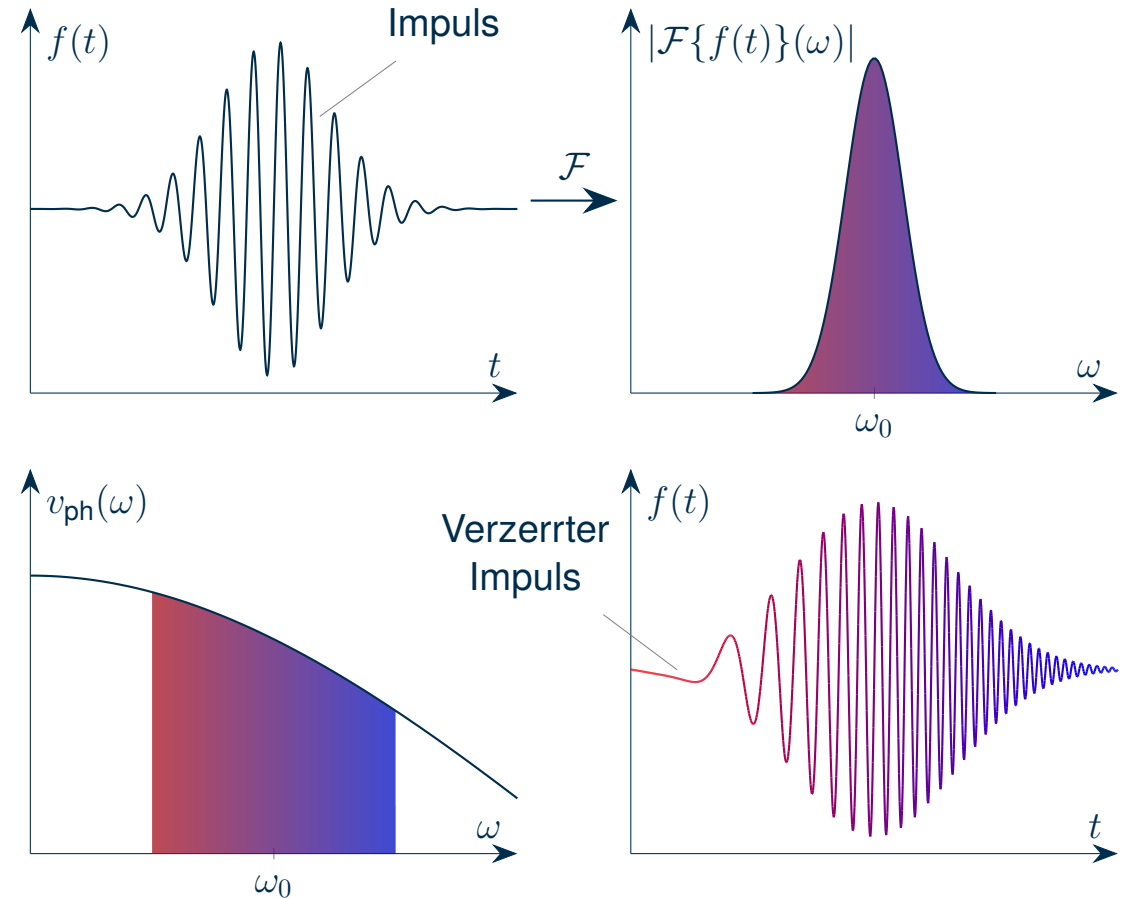
$$v_{\text{ph}}(\omega) = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega t - \phi_0}{\beta(\omega)} \right) = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{c_0}{n_{\text{re}}(\omega)}.$$

## Wichtig:

In dispersiven Medien breiten sich Wellen verschiedener Frequenz mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit aus. In der Optik wird diese Frequenzabhängigkeit auch als *chromatische Dispersion* bezeichnet.

# Signalübertragung in dispersiven Medien

- In der Kommunikationstechnik übertragen wir keine reinen Sinus-/Cosinuswellen, sondern zeitlich begrenzte Signale (Impulse) oder modulierte Trägerwellen (z. B. mit zeitlich veränderlicher Amplitude).
- Solche Signale sind nicht monochromatisch, sondern besitzen eine endliche Bandbreite - können also als Überlagerung vieler zeitharmonischer Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen verstanden werden.
- Da  $n(\omega)$  frequenzabhängig ist, „sieht“ jede spektrale Komponente  $\omega_i$  des Signals eine andere Brechzahl und breitet sich somit mit einer eigenen Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}}(\omega_i)$  aus (vgl. Folie 15).
- **Konsequenz:** Die verschiedenen Frequenzanteile laufen im Medium auseinander, was zu Signalverzerrungen führen kann.



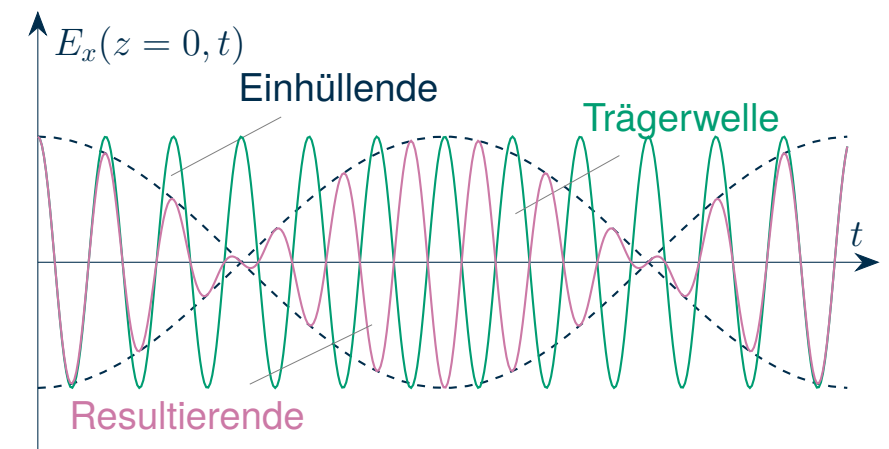
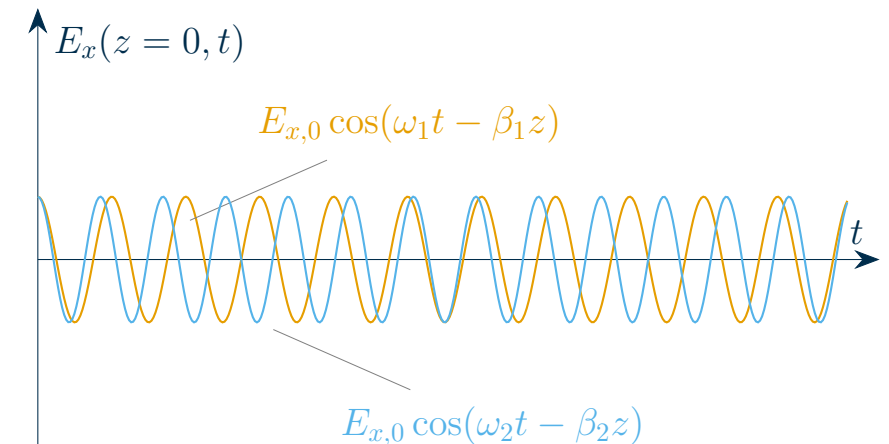
# Elementares Wellenpaket: Trägerwelle & Einhüllende

- Die einfachste Form einer nicht-monochromatischen Welle, einem *Wellenpaket*, erhalten wir durch Überlagerung zweier ungedämpfter zeitharmonischer Wellen unterschiedlicher Frequenz.
- Mit den Kreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  erhalten wir dann beispielsweise die elektrische Feldkomponente

$$E_x(z, t) = E_{x,0} \cos(\omega_1 t - \beta_1 z) + E_{x,0} \cos(\omega_2 t - \beta_2 z).$$

- Durch das Cosinus-Additionstheorem lässt sich der Ausdruck in das Produkt einer Trägerwelle bei  $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  mit der Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{ph},0} = \frac{\omega_0}{\beta_0} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\beta_1 + \beta_2}$  und einer Einhüllenden (Schwebung) bei  $\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$  mit der Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{gr}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta_1 - \beta_2}$  überführen

$$E_x(z, t) = \underbrace{2E_0 \cos\left(\omega_0 \left[t - \frac{z}{v_{\text{ph},0}}\right]\right)}_{\text{Trägerwelle}} \underbrace{\cos\left(\Delta\omega \left[t - \frac{z}{v_{\text{gr}}}\right]\right)}_{\text{Einhüllende}}$$



# Gruppengeschwindigkeit

- Betrachten wir ein Wellenpaket, mit einem kontinuierlichen Frequenzspektrum, verwenden wir anstelle des Differenzenquotienten  $\frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$  die Ableitung  $\frac{d\omega}{d\beta(\omega)}$  bei der Trägerfrequenz  $\omega_0$ .
- Die Geschwindigkeit, mit der sich die Einhüllende des Wellenpakets in Ausbreitungsrichtung bewegt, wird als *Gruppengeschwindigkeit*  $v_{gr}$  bezeichnet und ergibt sich mit der sogenannten Gruppenbrechzahl  $n_{gr}$  zu

$$v_{gr}(\omega) = \left( \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \right)^{-1} = c_0 \left( \frac{d\omega n_{re}(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \right)^{-1} = c_0 \underbrace{\left( n_{re}(\omega_0) + \omega \frac{dn_{re}(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \right)^{-1}}_{=:n_{gr}} = \frac{c_0}{n_{gr}}$$

- Dabei gilt stets  $n_{gr} \geq 1$  und somit  $v_{gr} \leq c_0$ .

## Wichtig:

Da sich die *Einhüllende* einer Welle stets mit der *Gruppengeschwindigkeit* ausbreitet, können Informationen nie schneller als das Licht übertragen werden!

# Dispersion höherer Ordnung

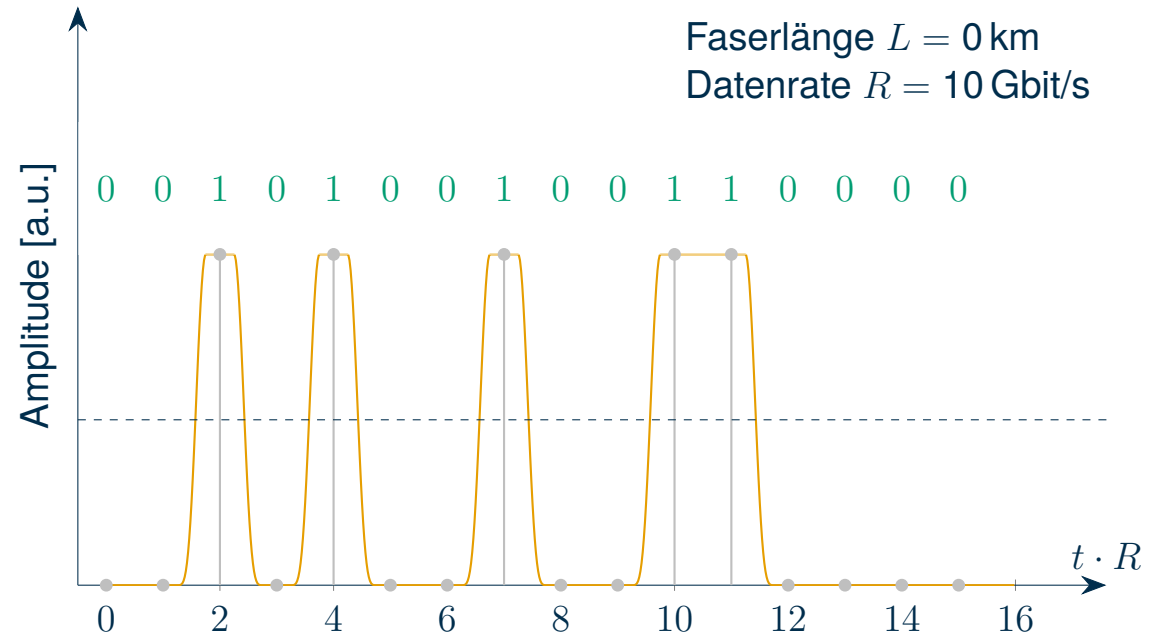
- Für Wellenpakete mit geringer Bandbreite ermöglichen die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit meist die vollständige Beschreibung der Ausbreitung.
- Wir betten die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in einen allgemeinen mathematischen Rahmen ein, indem wir  $\beta(\omega)$  um  $\omega_0$  in eine Taylorreihe entwickeln

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\beta_3}{6}(\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad \text{wobei} \quad \beta_m = \left. \frac{d^m \beta(\omega)}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0} .$$

- In dieser Beschreibung erhalten wir die Phasengeschwindigkeit durch  $\beta_0 = \frac{\omega_0}{v_{\text{ph}}(\omega_0)}$  und die Gruppengeschwindigkeit gemäß  $\beta_1 = \frac{1}{v_{\text{gr}}(\omega_0)}$ .
- Insbesondere für größere Bandbreiten können auch die Terme höherer Ordnung nicht vernachlässigt werden.
- Die höheren Terme  $\beta_2, \beta_3, \dots$  beschreiben die Frequenzabhängigkeit der Gruppengeschwindigkeit, welche auch als *Dispersion der Gruppengeschwindigkeit* bezeichnet wird und zu Signalverzerrungen führt.

# Exkurs: Dispersion der Gruppengeschwindigkeit

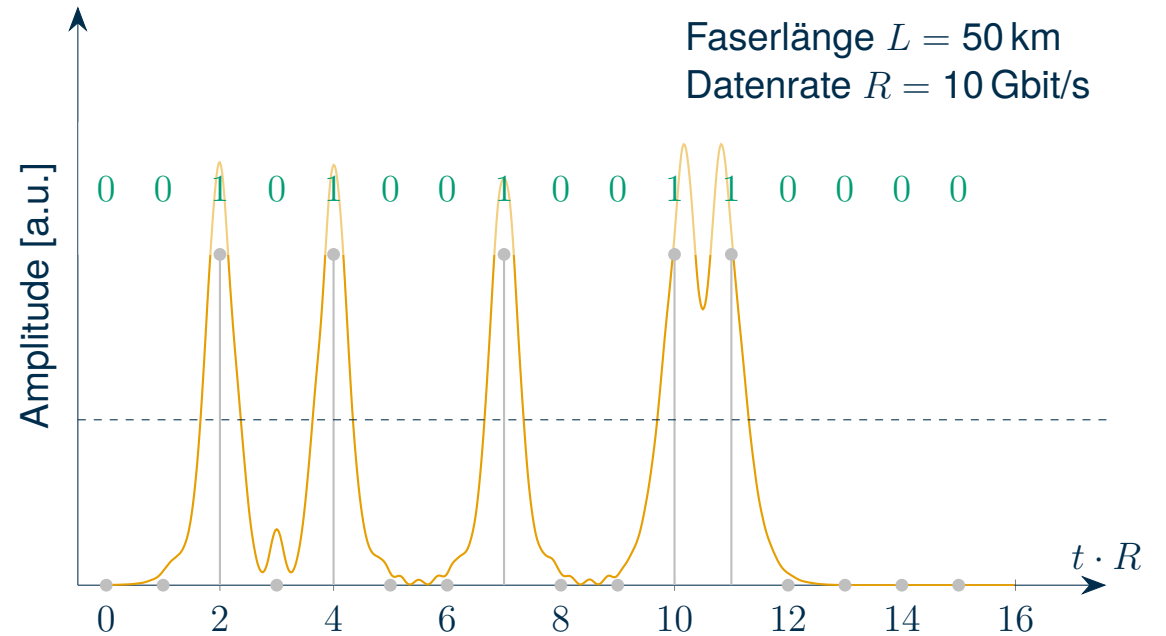
- In der Glasfaserkommunikation wird häufig die Intensität bzw. die Leistung des Lichts moduliert, um Information mit großer Bandbreite zu übertragen.
- Das übertragene Licht setzt sich daher aus vielzähligen zeitharmonischen Wellen unterschiedlicher Frequenz zusammen.
- Aufgrund der großen Bandbreite breiten sich diese Teilwellen mit unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten aus, wodurch das übertragene Signal verzerrt wird.
- Bei hohen Datenraten oder langen Übertragungsstrecken kann die übertragene Bitsequenz nicht mehr korrekt rekonstruiert werden.



Die grauen Pulse zeigen die gesendete Bitsequenz, die orange Kurve das Empfangssignal. Aufgrund der Dispersion der Gruppengeschwindigkeit fließt Energie in benachbarte Bit-Slots. Folge: Obwohl eine „1“ gesendet wurde, kann die Signalamplitude zur Abtastzeit unter-/oberhalb der gestrichelten Entscheidungsgrenze liegen  $\implies$  **Bitfehler** (rot markierte Ziffern in der Bitsequenz).

# Exkurs: Dispersion der Gruppengeschwindigkeit

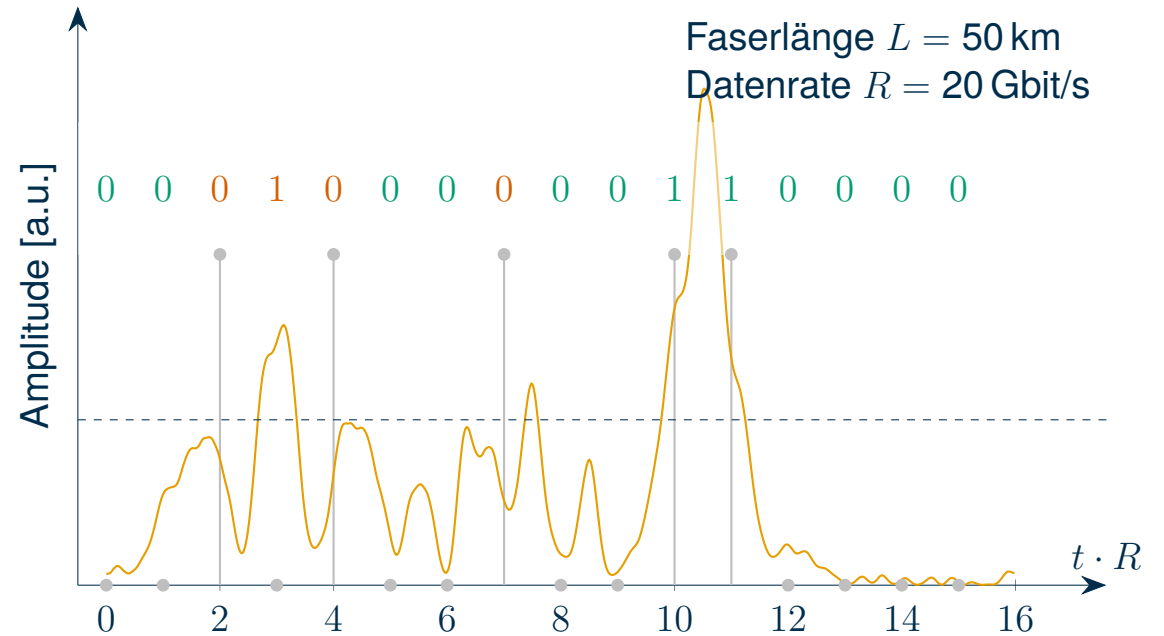
- In der Glasfaserkommunikation wird häufig die Intensität bzw. die Leistung des Lichts moduliert, um Information mit großer Bandbreite zu übertragen.
- Das übertragene Licht setzt sich daher aus vielzähligen zeitharmonischen Wellen unterschiedlicher Frequenz zusammen.
- Aufgrund der großen Bandbreite breiten sich diese Teilwellen mit unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten aus, wodurch das übertragene Signal verzerrt wird.
- Bei hohen Datenraten oder langen Übertragungsstrecken kann die übertragene Bitsequenz nicht mehr korrekt rekonstruiert werden.



Die grauen Pulse zeigen die gesendete Bitsequenz, die orange Kurve das Empfangssignal. Aufgrund der Dispersion der Gruppengeschwindigkeit fließt Energie in benachbarte Bit-Slots. Folge: Obwohl eine „1“ gesendet wurde, kann die Signalamplitude zur Abtastzeit unter-/oberhalb der gestrichelten Entscheidungsgrenze liegen  $\implies$  **Bitfehler** (rot markierte Ziffern in der Bitsequenz).

# Exkurs: Dispersion der Gruppengeschwindigkeit

- In der Glasfaserkommunikation wird häufig die Intensität bzw. die Leistung des Lichts moduliert, um Information mit großer Bandbreite zu übertragen.
- Das übertragene Licht setzt sich daher aus vielzähligen zeitharmonischen Wellen unterschiedlicher Frequenz zusammen.
- Aufgrund der großen Bandbreite breiten sich diese Teilwellen mit unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten aus, wodurch das übertragene Signal verzerrt wird.
- Bei hohen Datenraten oder langen Übertragungsstrecken kann die übertragene Bitsequenz nicht mehr korrekt rekonstruiert werden.



Die grauen Pulse zeigen die gesendete Bitsequenz, die orange Kurve das Empfangssignal. Aufgrund der Dispersion der Gruppengeschwindigkeit fließt Energie in benachbarte Bit-Slots. Folge: Obwohl eine „1“ gesendet wurde, kann die Signalamplitude zur Abtastzeit unter-/oberhalb der gestrichelten Entscheidungsgrenze liegen  $\implies$  **Bitfehler** (rot markierte Ziffern in der Bitsequenz).

# Vorlesungsinhalte

1. Einleitung

2. Makroskopische Beschreibung dispersiver Medien

3. Ebene Wellen in dispersiven Medien

**4. Lorentz-Drude-Resonatormodel**

5. Dielektrische und leitende Medien

6. Was Sie gelernt haben sollten

7. Anhang

Fouriertransformation

Faltungstheorem

Kramers-Kronig-Beziehungen

Literatur

# Lorentz-Drude-Resonatormodell (I)

- Die Wechselwirkung zwischen elektromagnetischen Feldern und Materie ist im Detail sehr komplex und nur mithilfe der Quantenphysik exakt zu beschreiben.
- Um ein prinzipielles Verständnis zu gewinnen, können wir jedoch das klassische Modell von Lorentz und Drude verwenden.
- Es geht von einem polarisierbaren linearen Medium aus, in dem Ladungen schwingungsfähige Systeme darstellen (vgl. RLC-Resonator aus der Vorlesung LEN).
- Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz erhalten wir dann die folgende Bewegungsgleichung für die räumliche Verschiebung  $\Delta\mathbf{s}$  einer Ladung  $q$  der Masse  $m$

$$m \frac{d^2 \Delta \mathbf{s}}{dt^2} = q \mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \frac{d \Delta \mathbf{s}}{dt} - m \omega_0^2 \Delta \mathbf{s}. \quad (1)$$

- Demnach setzt sich die Kraft auf die Ladung  $q$ ,  $m \frac{d^2 \Delta \mathbf{s}}{dt^2}$ , aus folgenden Beiträgen zusammen: Der **Lorentzkraft**  $q \mathbf{E}$  des anregenden E-Felds, einer **Reibungskraft**  $\frac{m}{\tau} \frac{d \Delta \mathbf{s}}{dt}$ , welche die Schwingung mit der Zeitkonstante  $\tau$  dämpft, und einer **Federkraft**  $m \omega_0^2 \Delta \mathbf{s}$ , welche die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  bestimmt.

# Lorentz-Drude-Resonatormodell (II)

- Betrachten wir ein Volumen mit einer Dipoldichte  $N$  (Einheit  $1/\text{m}^3$ ) und dem mittleren elektrischen Dipolmoment<sup>1</sup>  $\bar{\mathbf{p}}_{\text{el}} = q\Delta\mathbf{s}$ , so ergibt sich das Polarisationsfeld zu

$$\mathbf{P} = N\bar{\mathbf{p}}_{\text{el}} = Nq\Delta\mathbf{s}$$

- Setzen wir diesen Ausdruck in (1) ein, so ergibt sich

$$\frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \omega_0^2\mathbf{P} = \varepsilon_0\omega_{\text{P}}^2\mathbf{E}, \text{ wobei } \omega_{\text{P}} = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}}.$$

- Aufgrund ihrer Trägheit schießen die Ladungen unter dem Einfluss der Lorentzkraft an der elektrisch neutralen Lage vorbei und bauen so eine erneute Ladungsverschiebung auf, die zu einer periodischen Schwingung mit der sogenannten Plasmafrequenz  $\omega_{\text{P}}$  führt.

---

<sup>1</sup>Das elektrische Dipolmoment ist ein Maß für die Trennung der positiven und negativen Ladungen.

# Komplexe Permittivität des Lorentz-Oszillators (I)

- Für ein zeitharmonisches Feld mit der Kreisfrequenz  $\omega$  und den komplexen Amplituden  $\underline{\mathbf{E}}$  und  $\underline{\mathbf{P}}$  (beachte:  $d/dt \rightarrow j\omega$ ) lässt sich diese Differentialgleichung folgendermaßen vereinfachen

$$-\omega^2 \underline{\mathbf{P}} + j \frac{\omega}{\tau} \underline{\mathbf{P}} + \omega_0^2 \underline{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \omega_p^2 \underline{\mathbf{E}}$$

- Mit der bekannten Beziehung von dem elektrischen Feldvektor und dem Polarisationsfeld

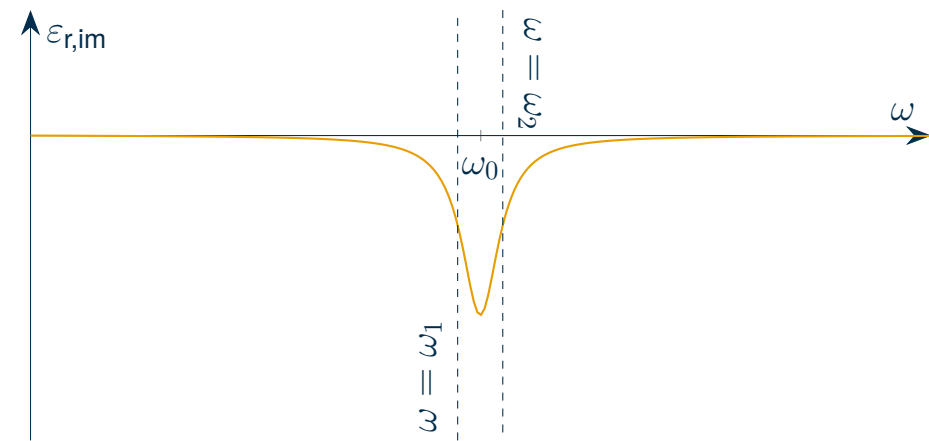
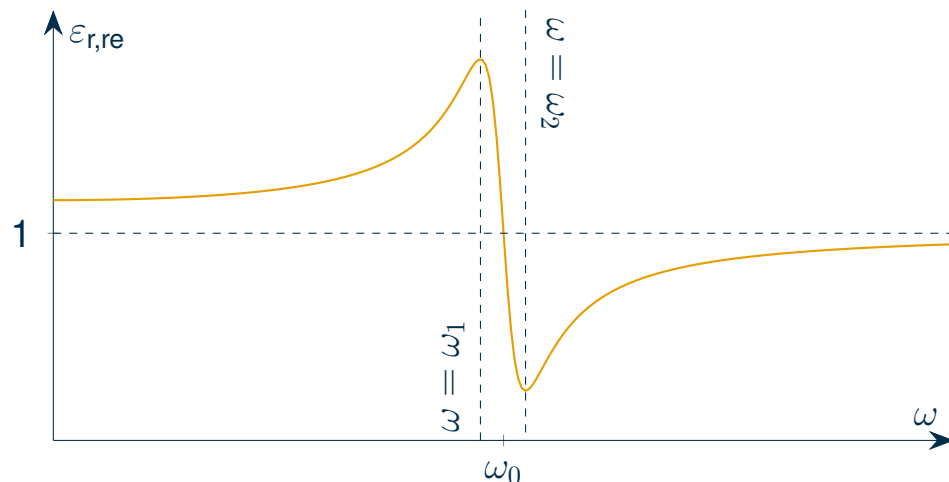
$$\underline{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi}_e(\omega) \underline{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 (\underline{\varepsilon}_r(\omega) - 1) \underline{\mathbf{E}},$$

erhalten wir für die frequenzabhängige komplexe relative Permittivität

$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega/\tau} = 1 + \underbrace{\frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}}_{=:\varepsilon_{r,\text{re}}(\omega)} + j \underbrace{\frac{-\omega_p^2 \omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}}_{=:\varepsilon_{r,\text{im}}(\omega)}. \quad (2)$$

# Komplexe Permittivität des Lorentz-Oszillators (II)

- Gemäß der Bewegungsgleichung tritt bei  $\omega = \omega_0$  eine Resonanz auf, wodurch elektrische Feldenergie an das schwingungsfähige System übertragen wird.
- Der Imaginärteil der relativen Permittivität erreicht dementsprechend ein Minimum, womit die Verluste im Medium (lokal) maximal werden.
- Den Verlauf des Realteils können wir in drei Bereiche aufteilen: Für  $\omega < \omega_1$  und  $\omega > \omega_2$  ist die Steigung von  $\epsilon_{r,\text{re}}$  positiv, im Intervall  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  ist die Steigung hingegen negativ.
- Da die Steigung von  $\epsilon_{r,\text{re}}$  die Gruppengeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen bestimmt, beeinflusst eine solche Resonanz auch die Übertragung von Informationssignalen.



# Beispiel Wasser: Komplexe Permittivität

- Im Allgemeinen weisen Medien, wie die Permittivität bzw. Brechzahl von Wasser unten zeigt, vielzählige Resonanzen mit unterschiedlichen Plasma- und Resonanzfrequenzen sowie Zeitkonstanten auf.
- Für die relative Permittivität ergeben sich entsprechend Ausdrücke der Form

$$\underline{\epsilon}_r(\omega) = 1 + \sum_i \frac{\omega_{P,i}^2}{\omega_{0,i}^2 - \omega^2 + j\omega/\tau_i}$$

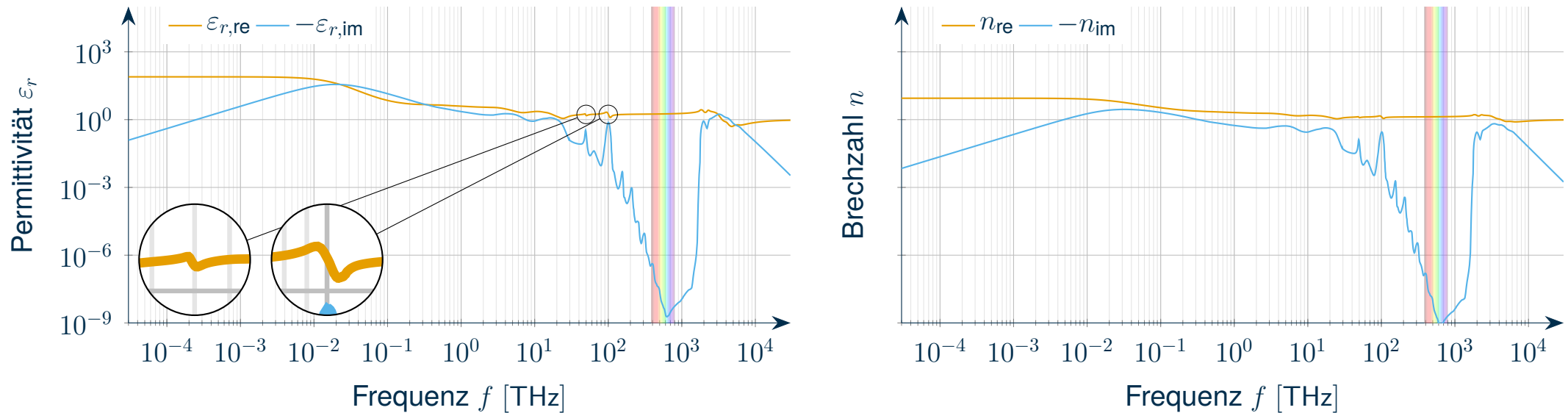


Abbildung: Daten aus [1]; können hier gesammelt heruntergeladen werden.

# Vorlesungsinhalte

## 1. Einleitung

## 2. Makroskopische Beschreibung dispersiver Medien

## 3. Ebene Wellen in dispersiven Medien

## 4. Lorentz-Drude-Resonatormodel

## **5. Dielektrische und leitende Medien**

## 6. Was Sie gelernt haben sollten

## 7. Anhang

- Fouriertransformation
- Faltungstheorem
- Kramers-Kronig-Beziehungen
- Literatur

# Dielektrische Medien

- In dielektrischen Medien (auch Dielektrika genannt) sind die vorhandenen Ladungsträger nicht frei beweglich, weshalb die Stromdichte  $\mathbf{J}$  und die Raumladungsdichte  $\rho = 0$  verschwinden.
- Dementsprechend haben Dielektrika auch eine sehr geringe elektrische Leitfähigkeit, etwa  $\kappa < 1 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\Omega \text{m}}$ , welche häufig als  $\kappa \approx 0$  angenähert wird.
- Wird ein äußeres elektrisches Feld angelegt, so können sich allerdings gebundene Ladungsträger (Moleküle, Ionen oder Elektronen) ausrichten. Ist das elektrische Feld zeitlich veränderlich, führt dies zu einem Verschiebungsstrom.
- Auch in dielektrischen Medien können Verluste auftreten, etwa aufgrund von elektromagnetischer Strahlung der schwingenden Ladungen und „internen Reibungskräften“ (z.B. durch Kollisionen).
- Diese Verluste sind jedoch häufig klein, weshalb der Imaginärteil der Permittivität bzw. der Brechzahl in vielen Szenarien gegenüber dem Realteil vernachlässigt werden kann.
- Dielektrika können dabei gasförmig, flüssig und fest sein. Beispiele für dielektrische Medien sind Gläser, Polymere, Keramiken sowie Gase.

# Beispiel Glas: Phasen- und Dämpfungskonstante

- Mithilfe der komplexen Brechzahl eines Mediums (eine Übersicht gibt es z.B. hier), können wir die Phasen- und Dämpfungskonstante als Funktion der Frequenz ermitteln.
- Die Abbildung zeigt beispielhaft die Phasen- und Dämpfungskonstante von Borosilikat-Kronglas (Schott N-BK7), welches etwa für die Herstellung fokussierender Linsen verwendet wird.
- Dieses Glas weist im sichtbaren Bereich mit  $\alpha < 1/m$  geringe Verluste auf, dementsprechend erscheint es bei der Betrachtung transparent.

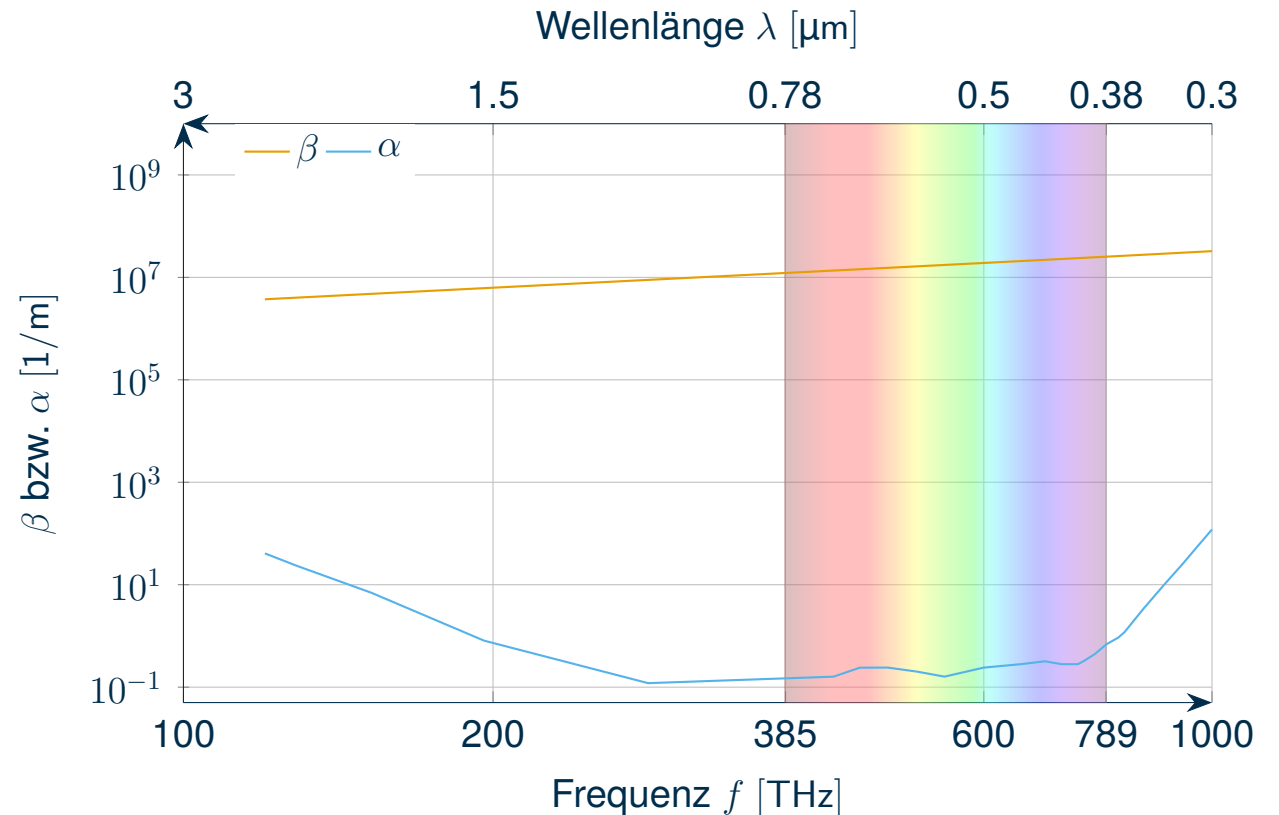


Abbildung: Rohdaten aus [2]

# Leitende Medien: Lorentz-Drude-Modell (I)

- In leitenden Materialien, insbesondere in Metallen, gibt es frei bewegliche Elektronen.
- Mithilfe des Lorentz-Drude-Modells können wir auch das Verhalten der freien Elektronen unter dem Einfluss eines externen E-Felds beschreiben.
- Da die Elektronen frei sind, verschwindet die Federkraft und für die Resonanzfrequenz gilt  $\omega_0 = 0$ .
- Die Bewegungsgleichung (vgl. (1)) eines freien Elektrons mit Ladung  $q = -e$  und Masse  $m_e$  lautet also

$$m_e \frac{d^2 \Delta \mathbf{s}}{dt^2} = -e \mathbf{E} - \frac{m_e}{\tau} \frac{d \Delta \mathbf{s}}{dt}.$$

- Ein elektrisches Feld führt im Leiter zu einem Ladungstransport mit der Stromdichte  $\mathbf{J}$ , die wir mit der Elektronendichte  $N_e$  und dem Ohmschen Gesetz  $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$  schreiben als

$$\mathbf{J} = -N_e e \frac{d \Delta \mathbf{s}}{dt} = \kappa \mathbf{E} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d \Delta \mathbf{s}}{dt} = -\frac{\kappa}{N_e e} \mathbf{E}.$$

# Leitende Medien: Lorentz-Drude-Modell (II)

- Einsetzen in die Bewegungsgleichung führt dann auf

$$-\frac{m_e \kappa}{N_e e} \frac{d\mathbf{E}}{dt} = -e\mathbf{E} + \frac{m_e \kappa}{\tau N_e e} \mathbf{E}.$$

- Für ein zeitharmonisches Feld mit der Kreisfrequenz  $\omega$  ( $\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$ ) und der komplexen Amplitude  $\underline{\mathbf{E}}$  vereinfacht sich diese Gleichung mit der komplexen frequenzabhängigen Leitfähigkeit  $\underline{\kappa}$  zu

$$-j\omega \frac{m_e \underline{\kappa}}{N_e e} \underline{\mathbf{E}} = -e\underline{\mathbf{E}} + \frac{m_e \underline{\kappa}}{\tau N_e e} \underline{\mathbf{E}}.$$

- Mit der Plasmafrequenz  $\omega_p$  erhalten wir daraus für die frequenzabhängige komplexe Leitfähigkeit

$$\underline{\kappa}(\omega) = \frac{\kappa_0}{1 + j\omega\tau} \quad \text{wobei} \quad \kappa_0 = \frac{N_e e^2}{m_e} \tau = \varepsilon_0 \omega_p^2 \tau$$

die Gleichstromleitfähigkeit bezeichnet.

- Diese Frequenzabhängigkeit entspricht einem Tiefpass erster Ordnung.

# Leitende Medien und komplexe Wellenzahl

- Obwohl sich dielektrische und leitende Medien auf mikroskopischer Ebene unterschiedlich verhalten, können wir die makroskopischen Auswirkungen der komplexen Leitfähigkeit mithilfe einer komplexen frequenzabhängigen Permittivität  $\underline{\varepsilon}'_r$  charakterisieren.
- Dazu betrachten wir das Durchflutungsgesetz für leitfähige Medien und erhalten

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = (\underline{\kappa} + j\omega\varepsilon_0)\underline{\mathbf{E}} = j\omega\varepsilon_0 \underbrace{\left(1 - j\frac{\underline{\kappa}}{\omega\varepsilon_0}\right)}_{\underline{\varepsilon}'_r} \underline{\mathbf{E}}.$$

- Setzen wir für  $\underline{\kappa}$  ein und vereinfachen, erhalten wir gerade den Ausdruck (2) im Fall  $\omega_0 = 0$

$$\underline{\varepsilon}'_r = 1 - j\frac{\underline{\kappa}}{\omega\varepsilon_0} = 1 - j\frac{\varepsilon_0\omega_p^2\tau}{(1 + j\omega\tau)\omega\varepsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} - j\frac{\omega_p^2\tau/\omega}{1 + \omega^2\tau^2}.$$

- So können wir auch in Leitern die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen wie auf S. 13 beschreiben.

# Ideale Leiter

- Ein idealer Leiter bezeichnet ein idealisiertes Medium, in welchem freie Elektronen vorhanden sind, die verlust- und trägheitsfrei einem elektrischen Feld folgen.
- Im zuvor eingeführten Oszillatormodell entspricht diese Annahme dem Fall  $\tau \rightarrow \infty$  und  $\omega_P \rightarrow \infty$ .
- Innerhalb des idealen Leiters kann kein elektrisches Feld existieren, weshalb gemäß den Maxwellschen Gleichungen auch kein zeitabhängiges Magnetfeld existieren kann (ein statisches Magnetfeld ist jedoch zulässig).
- Demzufolge ist in einem idealen Leiter die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen nicht möglich!

# Beispiel Kupfer: Phasen- und Dämpfungskonstante

- Die Abbildung zeigt die Phasen- und Dämpfungskonstante von Kupfer.
- Im sichtbaren Bereich ist die Dämpfungskonstante etwa acht Größenordnungen größer als die von Glas, dementsprechend können wir durch Metalle nicht hindurchsehen.
- Aufgrund der großen Dämpfungskonstante, ist es in vielen Anwendungsfällen bei hohen Frequenzen gerechtfertigt, Leiter wie Kupfer durch einen idealen Leiter zu approximieren.

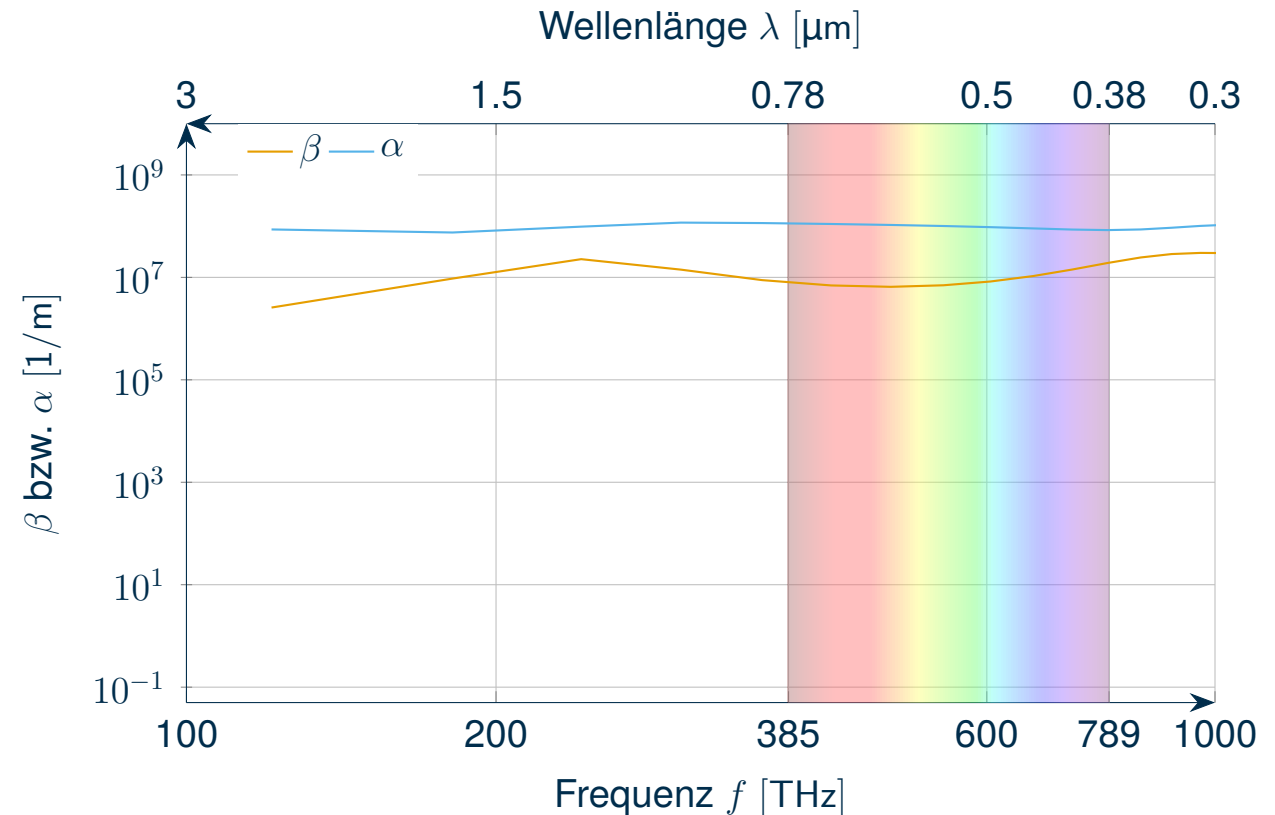


Abbildung: Rohdaten aus [2]

# Vorlesungsinhalte

## 1. Einleitung

## 2. Makroskopische Beschreibung dispersiver Medien

## 3. Ebene Wellen in dispersiven Medien

## 4. Lorentz-Drude-Resonatormodel

## 5. Dielektrische und leitende Medien

## 6. Was Sie gelernt haben sollten

## 7. Anhang

- Fouriertransformation
- Faltungstheorem
- Kramers-Kronig-Beziehungen
- Literatur

# Was Sie gelernt haben sollten

- Weshalb wir die zeitabhängige Suszeptibilität eingeführt haben und welche Eigenschaften diese aufweist.
- Wie die komplexe Wellenzahl definiert ist und welche Bedeutung der Real- und Imaginärteil bei der Ausbreitung (ebener) Wellen haben.
- Welche Rolle die Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeit spielen und wie sich die Größen unterscheiden.
- Wie die höheren Terme der Taylorentwicklung der Phasenkonstante die Wellenausbreitung beeinflussen.
- Welche Aussagen das Lorentz-Drude-Resonatormodell über die komplexe Permittivität zulässt.
- Was ein Dielektrikum ist und welche Eigenschaften dessen relative elektrische Permittivität aufweist.
- Was ein (idealer) Leiter ist und welche Eigenschaften dessen Leitfähigkeit bzw. relative elektrische Permittivität aufweist.
- Inwiefern sich Dielektrika bzw. Leiter hinsichtlich der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen unterscheiden.

# Vorlesungsinhalte

1. Einleitung

2. Makroskopische Beschreibung dispersiver Medien

3. Ebene Wellen in dispersiven Medien

4. Lorentz-Drude-Resonatormodel

5. Dielektrische und leitende Medien

6. Was Sie gelernt haben sollten

**7. Anhang**

Fouriertransformation

Faltungstheorem

Kramers-Kronig-Beziehungen

Literatur

# Vorlesungsinhalte: Anhang

## 7. Anhang

Fouriertransformation  
Faltungstheorem  
Kramers-Kronig-Beziehungen  
Literatur

# Fouriertransformation

- Wir definieren die Fouriertransformation  $f(\omega)$  einer zeitabhängigen Funktion  $f(t)$  mit der Kreisfrequenz  $\omega$  mit

$$f(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

- Dementsprechend verwenden wir die folgende Konvention für die inverse Fouriertransformation:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{f(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

# Fouriertransformation des Dirac-Impulses

- Der Dirac-Impuls  $\delta(t)$  ist implizit definiert durch seine Abtasteigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0).$$

- Aus dieser Eigenschaft erhalten wir auch direkt seine Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = \exp(-j\omega \cdot 0) = 1.$$

- Wenden wir nun die inverse Fouriertransformation auf  $\mathcal{F}\{\delta(t)\}$  an, erhalten wir

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\delta(t)\}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t) d\omega \stackrel{!}{=} \delta(t) \quad \iff \quad \mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega).$$

# Fouriertransformation der Heaviside-Funktion (I)

- Für die folgende Herleitung beziehen wir uns auf [3]. Die Heaviside-Funktion ist definiert als

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} .$$

- Im Folgenden, verwenden wir die Vorzeichenfunktion

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} ,$$

um die Heaviside-Funktion darstellen zu können als

$$\Theta(t) = \frac{1}{2} (1 + \text{sgn}(t)) .$$

# Fouriertransformation der Heaviside-Funktion (II)

- Aus der Beziehung

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sgn}(t) = 2\delta(t)$$

folgt mit den Eigenschaften der Fouriertransformation und der Definition des Dirac-Impulses

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d}{dt} \operatorname{sgn}(t) \right\} = 2\mathcal{F}\{\delta(t)\} \quad \iff \quad j\omega \mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = 2.$$

- Sofern das Teilen durch  $\omega$  zulässig ist, erhalten wir also

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = -j \frac{2}{\omega}$$

und damit

$$\mathcal{F}\{\Theta(t)\} = \frac{1}{2} (\mathcal{F}\{1\} + \mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\}) = \frac{1}{2} \left( 2\pi\delta(\omega) - j \frac{2}{\omega} \right) = \pi\delta(\omega) - j \frac{1}{\omega}. \quad (3)$$

# Vorlesungsinhalte: Anhang

## 7. Anhang

Fouriertransformation  
Faltungstheorem  
Kramers-Kronig-Beziehungen  
Literatur

# Faltungstheorem: Vorwärts (I)

- Im Folgenden möchten wir das Faltungstheorem herleiten. Wir betrachten dafür die Faltung zweier Funktionen  $f$  bzw.  $g$  mit den Fouriertransformierten  $\tilde{f}$  bzw.  $\tilde{g}$ :

$$\{f * g\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

- Drücken wir nun die beiden Funktionen mithilfe der inversen Fouriertransformation aus, erhalten wir

$$\begin{aligned} \{f * g\}(t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega_1) \exp(j\omega_1\tau) d\omega_1 \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega_2) \exp(j\omega_2(t - \tau)) d\omega_2 \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega_1) \tilde{g}(\omega_2) \exp(j\omega_2 t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j(\omega_1 - \omega_2)\tau) d\tau d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned}$$

# Faltungstheorem: Vorwärts (II)

- Vergleichen wir mit Folie 40 unten, erkennen wir, dass

$$\{f * g\}(t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega_1) \tilde{g}(\omega_2) \exp(j\omega_2 t) \delta(\omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2.$$

- Integrieren wir also über  $\omega_2$ , ergibt sich

$$\{f * g\}(t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega_1) \tilde{g}(\omega_1) \exp(j\omega_1 t) d\omega_1,$$

also gerade die inverse Fouriertransformation von  $\tilde{f}(\omega_1) \tilde{g}(\omega_1)$ .

- Folglich gilt die bekannte Beziehung

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f} \tilde{g}\} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{f} \tilde{g} = \mathcal{F}\{f * g\}.$$

# Faltungstheorem: Rückwärts (I)

- Im Folgenden möchten wir das Faltungstheorem in umgekehrter Richtung herleiten. Wir betrachten dafür das Produkt  $f g$ .
- Drücken wir nun die beiden Funktionen mithilfe der inversen Fouriertransformation aus, erhalten wir

$$f(t) g(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega_1) \tilde{g}(\omega_2) \exp(j(\omega_1 + \omega_2)t) d\omega_1 d\omega_2 .$$

- Mit den Substitutionen  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  und  $\omega' = \omega_2$  ergibt sich daraus

$$f(t) g(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega - \omega') \tilde{g}(\omega') \exp(j\omega t) d\omega' d\omega .$$

# Faltungstheorem: Rückwärts (II)

- An dieser Stelle erkennen wir, dass wir Integral als inverse Fouriertransformation einer Faltung darstellen können:

$$\begin{aligned} f(t) g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega - \omega') \tilde{g}(\omega') d\omega' \right] \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \{\tilde{f} * \tilde{g}\}(\omega) \right] \exp(j\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

- Demzufolge gilt die Beziehung

$$fg = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f} * \tilde{g}\} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{f} * \tilde{g} = 2\pi \mathcal{F}\{fg\}. \quad (4)$$

# Vorlesungsinhalte: Anhang

## 7. Anhang

Fouriertransformation  
Faltungstheorem  
Kramers-Kronig-Beziehungen  
Literatur

# Frequenzabhängige elektrische Suszeptibilität (I)

- Da jedes reale Medium erst ab dem Moment auf ein elektrisches Feld reagieren kann, ab dem besagtes Feld tatsächlich anliegt, muss  $\hat{\chi}_e(t) = 0 \forall t < 0$  gelten;  $\hat{\chi}_e$  ist also eine *kausale Funktion*.
- Definieren wir nun den Frequenzgang des Mediums zu

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \mathcal{F}\{\underline{\chi}_e(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(t) \exp(-j\omega t) dt$$

erhalten wir für diese aufgrund der Kausalität

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \int_0^{\infty} \hat{\chi}_e(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

- Diesen Ausdruck können wir mithilfe der Heaviside-Funktion (auch Einheitssprung)  $\Theta(t)$  formulieren als

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(t) \Theta(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

# Frequenzabhängige elektrische Suszeptibilität (II)

- Dabei fällt auf, dass die rechte Seite gerade der Fouriertransformation  $\mathcal{F}\{\hat{\chi}_e(t) \cdot \Theta(t)\}$  entspricht.
- Vergleichen wir nun die linke und rechte Seite der Gleichung und verwenden das Faltungstheorem, erkennen wir, dass der Frequenzgang  $\underline{\chi}_e(\omega)$  invariant gegenüber einer Faltung mit der Fouriertransformierten der Heaviside-Distribution sein muss:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(t) \Theta(t) \exp(-j\omega t) dt$$
$$\mathcal{F}\{\hat{\chi}_e(t)\} = \mathcal{F}\{\hat{\chi}_e(t) \cdot \Theta(t)\} = \mathcal{F}\{\hat{\chi}_e(t)\} * \mathcal{F}\{\Theta(t)\}.$$

- Setzen wir die Fouriertransformierte der Heaviside-Funktion (3) in die Gleichung ein, erhalten wir mit dem Dirac-Impuls  $\delta(\omega)$  und dem Faltungstheorem (4)

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \mathcal{F}\{\hat{\chi}_e(t) \cdot \Theta(t)\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{\hat{\chi}_e(t)\} * \mathcal{F}\{\Theta(t)\} = \underline{\chi}_e(\omega) * \left( \frac{\delta(\omega)}{2} - \frac{j}{2\pi\omega} \right).$$

# Herleitung der Kramers-Kronig-Beziehungen (I)

- Mithilfe des Cauchyschen Hauptwerts

$$\mathcal{P} \int_a^b \frac{1}{x - x_0} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{x_0 - \epsilon} \frac{1}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \epsilon}^b \frac{1}{x - x_0} dx \right)$$

können wir die Faltung trotz der Singularität bei  $\omega = \omega'$  in Integralform darstellen

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\chi}_e(\omega') \delta(\omega - \omega') d\omega' - j \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' = \frac{1}{2} \underline{\chi}_e(\omega) - j \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'.$$

- Umstellen, d.h. multiplizieren mit 2 und subtrahieren von  $\underline{\chi}_e(\omega)$ , führt schließlich auf die Beziehung

$$\underline{\chi}_e(\omega) = -j \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'. \quad (5)$$

- Da  $\hat{\chi}_e(t)$  reell ist, weist  $\underline{\chi}_e(\omega)$  hermitesche Symmetrie auf, d.h. es gilt  $\underline{\chi}_e(-\omega) = \underline{\chi}_e^*(\omega)$ .

# Herleitung der Kramers-Kronig-Beziehungen (II)

- Mithilfe dieser Eigenschaft können wir (5) vereinfachen: Aufteilen in zwei Integrale, Substituieren mit  $\omega' = -\omega'$ , Vertauschen der Integrationsgrenzen und erneutes Zusammenführen liefert

$$\begin{aligned}\underline{\chi}_e(\omega) &= \frac{-j}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' = \frac{-j}{\pi} \mathcal{P} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' + \int_0^{\infty} \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \right) \\ &= \frac{-j}{\pi} \mathcal{P} \left( - \int_{\infty}^0 \frac{\underline{\chi}_e(-\omega')}{\omega + \omega'} d\omega' + \int_0^{\infty} \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \right) = \frac{-j}{\pi} \mathcal{P} \left( \int_0^{\infty} \frac{\underline{\chi}_e^*(\omega')}{\omega + \omega'} + \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \right).\end{aligned}$$

- Bringen wir die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner, ergibt sich für den Integranden bzw.  $\underline{\chi}_e$

$$\begin{aligned}\frac{\underline{\chi}_e^*(\omega')}{\omega + \omega'} + \frac{\underline{\chi}_e(\omega')}{\omega - \omega'} &= \frac{\underline{\chi}_e^*(\omega') (\omega - \omega') + \underline{\chi}_e(\omega') (\omega + \omega')}{\omega^2 - \omega'^2} = 2 \frac{\omega \Re\{\underline{\chi}_e(\omega')\} + \omega' j \Im\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2}, \\ \implies \underline{\chi}_e(\omega) &= \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \left( \int_0^{\infty} \frac{\omega' \Im\{\underline{\chi}_e(\omega')\} - j \omega \Re\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' \right).\end{aligned}$$

# Herleitung der Kramers-Kronig-Beziehungen (III)

- Vergleichen wir nun den Real- und Imaginärteil auf der linken und rechten Seite der Gleichung, erhalten wir die Kramers-Kronig-Beziehungen

$$\Re\{\underline{\chi}_e(\omega)\} = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega' \Im\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$
$$\Im\{\underline{\chi}_e(\omega)\} = -\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega \Re\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$

# Kramers-Kronig-Beziehungen der Permittivität

- Auf den vorherigen Folien haben wir gezeigt, dass die Kramers-Kronig-Beziehungen den Real- und Imaginärteil der elektrischen Suszeptibilität  $\underline{\chi}_e$  verknüpfen.
- In der Praxis verwenden wir allerdings meist die Permittivität  $\underline{\varepsilon}_r$  anstelle der Suszeptibilität.
- Mit  $\underline{\varepsilon}_r = 1 + \underline{\chi}_e$  erhalten wir folgende Beziehungen zwischen Real- und Imaginärteil von  $\underline{\varepsilon}_r$

$$\varepsilon_{r,\text{re}}(\omega) = 1 + \Re\{\underline{\chi}_e(\omega)\} = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega' \Im\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega' \varepsilon_{r,\text{im}}(\omega')}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$
$$\varepsilon_{r,\text{im}}(\omega) = \Im\{\underline{\chi}_e(\omega)\} = -\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega \Re\{\underline{\chi}_e(\omega')\}}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' = -\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega (\varepsilon_{r,\text{re}}(\omega') - 1)}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$

- Erwartungsgemäß lässt sich zeigen, dass auch  $\varepsilon_{r,\text{re}}(\omega)$  und  $\varepsilon_{r,\text{im}}(\omega)$  aus (2) gerade durch die obigen Beziehungen verknüpft sind.

# Vorlesungsinhalte: Anhang

## 7. Anhang

Fouriertransformation  
Faltungstheorem  
Kramers-Kronig-Beziehungen  
Literatur

# Literatur

- [1] David J. Segelstein. „The complex refractive index of water“. Master’s Thesis. University of Missouri–Kansas City, 1981. URL: <https://mospace.umsystem.edu/xmlui/handle/10355/11599> (besucht am 15. 11. 2022).
- [2] Mikhail N. Polyanskiy. *Refractive index database*. URL: <https://refractiveindex.info> (besucht am 15. 11. 2022).
- [3] B.L. Burrows und D.J. Colwell. „The Fourier transform of the unit step function“. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 21.4 (Juli 1990), S. 629–635. DOI: 10.1080/0020739900210418.
- [4] Heino Henke. *Elektromagnetische Felder: Theorie und Anwendung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. DOI: 10.1007/978-3-662-62235-3.
- [5] Ellen Ivers-Tiffée und Waldemar von Münch. *Werkstoffe der Elektrotechnik*. Wiesbaden: Teubner, 2007. DOI: 10.1007/978-3-8351-9088-7.