

Vorlesung 05: Hertzscher Dipol

Wintersemester 2025/26

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 14. Januar 2026

Vorlesungsinhalte

1. Einführung

2. Kugelkoordinaten

3. Hertzscher Dipol

4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten

5. Was Sie gelernt haben sollten

6. Anhang

Herleitung Potential elektrostatischer Dipol

Kugelflächenfunktionen

Lösung der Helmholtzgleichung für das Vektorpotential

Feldkomponenten Hertzscher Dipol (ohne Animation)

Literatur

Vorlesungsinhalte

1. Einführung

2. Kugelkoordinaten

3. Hertzscher Dipol

4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten

5. Was Sie gelernt haben sollten

6. Anhang

Herleitung Potential elektrostatischer Dipol

Kugelflächenfunktionen

Lösung der Helmholtzgleichung für das Vektorpotential

Feldkomponenten Hertzscher Dipol (ohne Animation)

Literatur

Einführung: Von der Welle zur Quelle

- Bislang haben wir die Ausbreitung idealisierter ebener Wellen in homogenen Medien betrachtet, ohne deren Ursprung zu diskutieren.
- In dieser Vorlesung sehen wir uns an, wie wir elektromagnetische Wellen „erzeugen“ können.
- Aus der Diskussion der Maxwellschen Gleichungen (Vorlesung 01) wissen wir bereits, dass beschleunigte Ladungen bzw. zeitlich veränderliche Ströme die Quellen elektromagnetischer Wellen sind.
- Lösen sich die Felder von ihrer Quelle (z. B. einem stromdurchflossenen Leiterdraht), transportieren sie irreversibel Energie von der Quelle weg.
- Diesen Vorgang des Aussendens von Wirkleistung bezeichnen wir als *Strahlung*.
- Dieses Prinzip bildet die Grundlage aller Antennen: Sie fungieren als Wandler zwischen leitungsgebundenen Wellen und Freiraumwellen.
- Zur Berechnung der Strahlung müssen die Quellen (ρ , \mathbf{J}) berücksichtigt werden, weshalb wir die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen betrachten.

Vorlesungsinhalte

1. Einführung

2. Kugelkoordinaten

3. Hertzscher Dipol

4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten

5. Was Sie gelernt haben sollten

6. Anhang

Herleitung Potential elektrostatischer Dipol

Kugelflächenfunktionen

Lösung der Helmholtzgleichung für das Vektorpotential

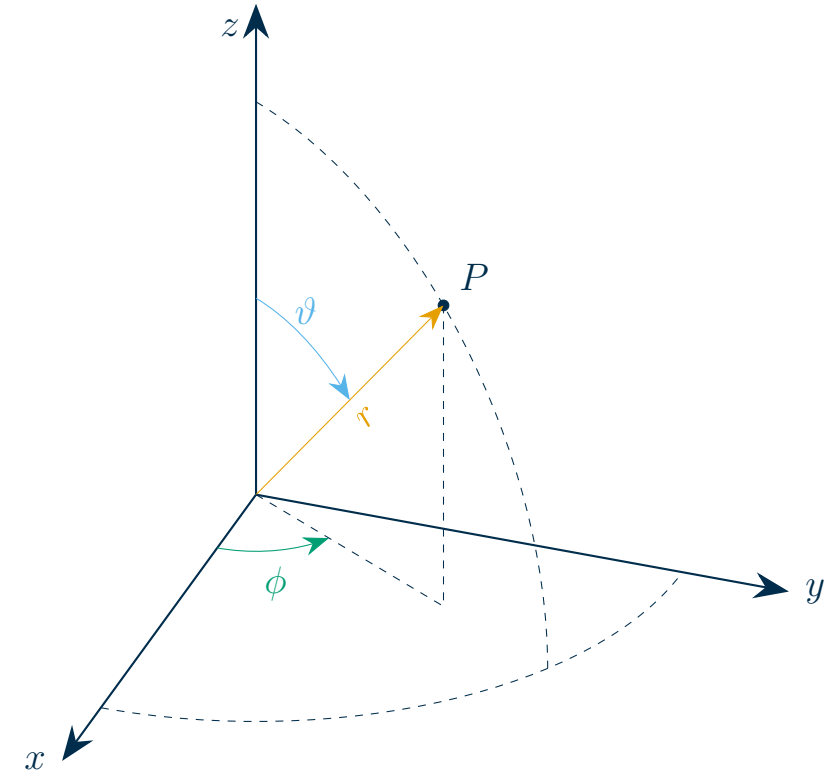
Feldkomponenten Hertzscher Dipol (ohne Animation)

Literatur

Kugelkoordinaten

- In Kugelkoordinaten wird ein Punkt P im Raum durch seinen Abstand vom Ursprung und zwei Winkel definiert.
- Daher bieten sie sich zur Beschreibung von *Kugelwellen* an, d.h. Wellen, die sich ausgehend von einem Punkt gleichmäßig in alle Raumrichtungen ausbreiten.
- Jede ihrer Feldkomponenten ist zu einem gegebenen Zeitpunkt auf Kugelschalen um den Ausgangspunkt konstant.
- In Kugelkoordinaten gibt es - im Gegensatz zu den Zylinderkoordinaten - *keine* kartesische Koordinate.

Koordinate	Bedeutung	Bereich
r	Radius	$[0, \infty)$
ϑ	Polarwinkel	$[0, \pi]$
ϕ	Azimutwinkel	$[0, 2\pi)$



Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten (I)

- In Kugelkoordinaten nehmen die Differentialoperatoren der Vektoranalysis für ein beliebiges Skalarfeld ψ bzw. ein beliebiges Vektorfeld \mathbf{A} die folgende Form an:

- Gradient:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi$$

- Divergenz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial \sin(\vartheta) A_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

- Rotation:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\vartheta} \left(\frac{\partial \sin\vartheta A_\phi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\phi$$

Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten (II)

- Skalarer Laplace-Operator:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

- Vektorieller Laplace-Operator:

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2 \cot\vartheta}{r^2} A_\vartheta \\ \Delta A_\vartheta - \frac{2 \cot\vartheta}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} A_\vartheta \\ \Delta A_\phi + \frac{2}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2 \cot\vartheta}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\phi} - \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} A_\phi \end{pmatrix}$$

- Bei der Betrachtung des vektoriellen Laplace-Operators fällt auf, dass alle drei Komponenten von $\Delta\mathbf{A}$ jeweils von A_r , A_ϑ und A_ϕ abhängen.
- Dementsprechend müssen wir im Allgemeinen auf einen geeigneten Ansatz mit kartesischen oder zylindrischen Vektorkomponenten zurückgreifen, um die Wellen- oder Helmholtz-Gleichung zu lösen.

Vorlesungsinhalte

1. Einführung

2. Kugelkoordinaten

3. Hertzscher Dipol

4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten

5. Was Sie gelernt haben sollten

6. Anhang

Herleitung Potential elektrostatischer Dipol

Kugelflächenfunktionen

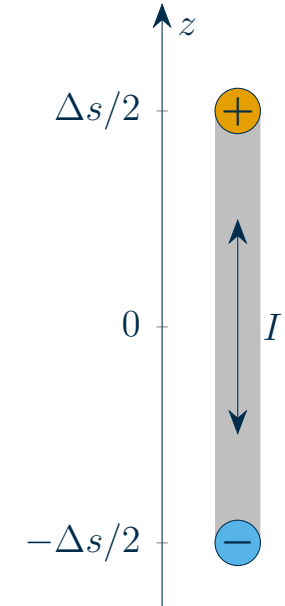
Lösung der Helmholtzgleichung für das Vektorpotential

Feldkomponenten Hertzscher Dipol (ohne Animation)

Literatur

Elektrischer Dipolstrahler

- Eine einzelne, sich zeitlich ändernde Punktladung kann aufgrund der Ladungserhaltung nicht existieren.
- Nimmt die Ladung an einer Stelle zu, muss sie an einer anderen Stelle abnehmen.
- Die einfachste Anordnung, die diese Anforderung erfüllt, ist ein elektrischer Dipol.
- Dieser Dipol besteht aus zwei entgegengesetzt geladenen Punktladungen zwischen denen ein Strom I fließt.
- Wir nehmen an, dass diese Ladungen $+q$ bzw. $-q$ durch externe Speisung mit Energie entlang der z -Achse um den Nullpunkt oszillieren.
- Aufgrund ihrer ungleichförmigen Bewegung, erzeugen diese Ladungen nun eine elektromagnetische Welle bzw. Strahlung.

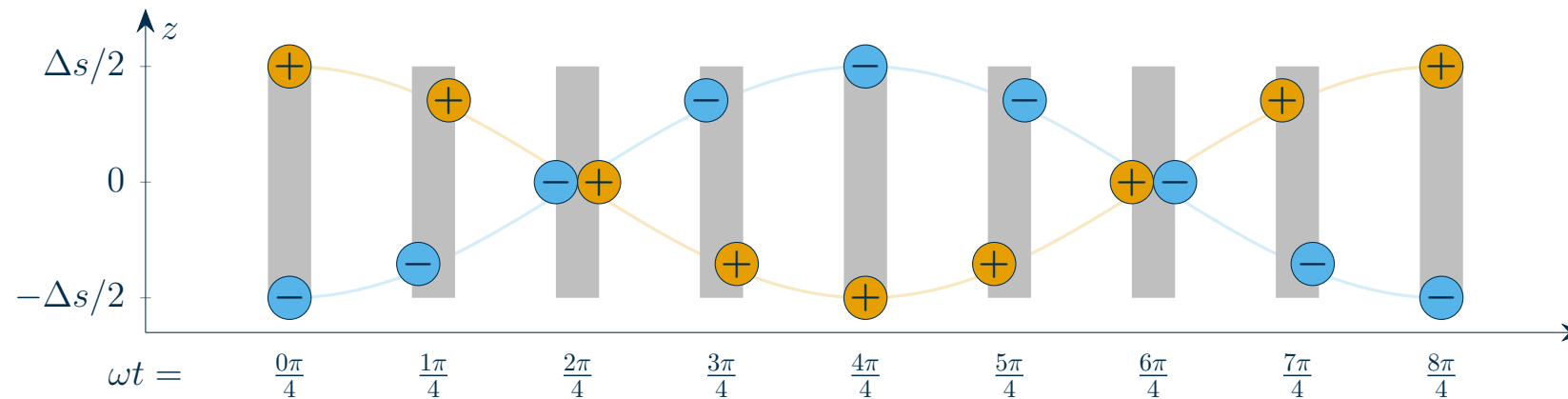


Hertzscher Dipol

- Im Übergang von diskreten Ladungen zu einem kontinuierlichen, zeitharmonischen Ladungsfluss mit der Kreisfrequenz ω , gilt bei $z = \Delta s/2$ für den komplexen Zeiger der Ladung $\underline{q}(t) = q \exp(j \omega t)$.
- Dieser Ausdruck lässt sich überführen in den zeitabhängigen Strom $I(t)$ mit komplexem Zeiger

$$\underline{I}(t) = \frac{dq}{dt} = \underline{I}_0 \exp(j \omega t) \quad \text{mit} \quad \underline{I}_0 = j \omega q .$$

- Ein solches Stromelement infinitesimaler Länge $\Delta s \rightarrow 0$ mit einer homogenen und zeitharmonischen Stromverteilung heißt *Hertzscher Dipol*.



Elektrostatisches Potential

- Um die Strahlung des Hertzschen Dipols zu untersuchen, beschränken wir unsere Betrachtung zunächst auf einen Dipol infinitesimaler Länge mit zeitlich konstanter Ladungsverteilung.
- Wir nehmen an, dass die Ladungen $\pm q$ auf der z -Achse bei $\pm \Delta s/2$ angeordnet sind.
- Dann erhalten wir mit dem Dipolmoment $\mathbf{p} = q \Delta s \mathbf{e}_z$ (vgl. [1, S. 62]) und der Voraussetzung $|\mathbf{r}| \gg \Delta s$ das Potential des elektrostatischen Dipols zu

$$\phi_{\text{el}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}|^3} = \frac{q \Delta s \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon r^3}.$$

- In Kugelkoordinaten (r, ϑ, ϕ) wird dieser Ausdruck mit $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r} = r \cos(\vartheta)$ zu (vgl. auch die Herleitung des Potentials im Anhang auf Folie 37)

$$\phi_{\text{el}}(r, \vartheta) = \frac{q \Delta s \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon r^2}.$$

- Die Abhängigkeit vom Azimutwinkel ϕ verschwindet aufgrund der rotationssymmetrischen Anordnung.

Elektrostatisches Feld des Dipols

- Den elektrischen Feldstärkevektor \mathbf{E} erhalten wir als negativen Gradienten des elektrostatischen Potentials zu

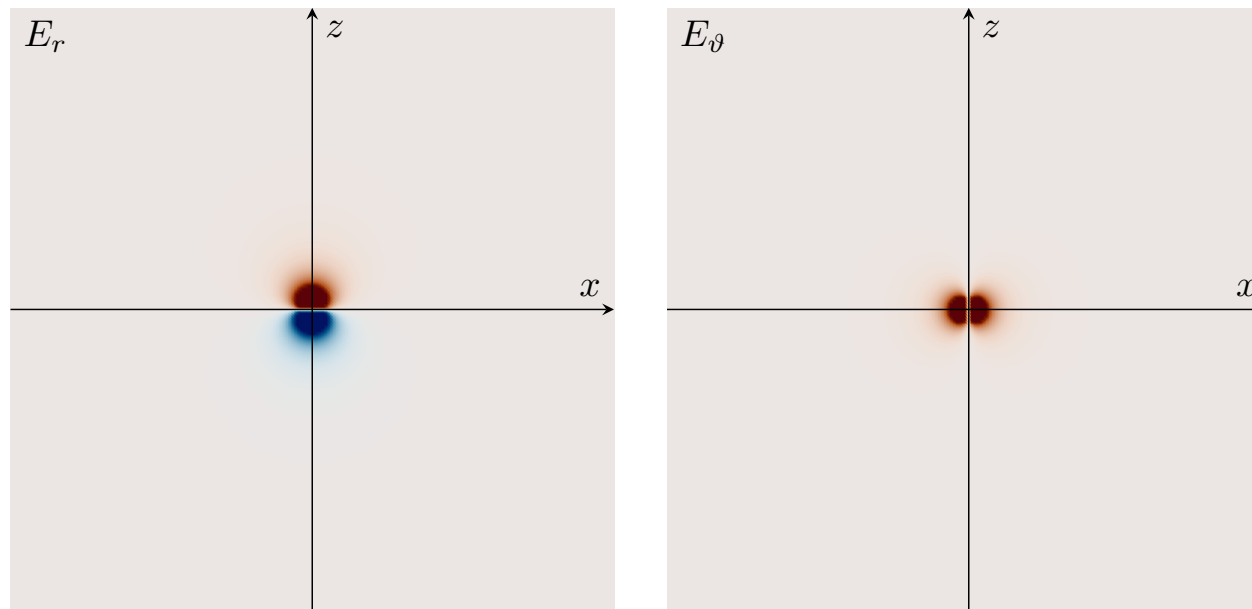
$$\mathbf{E}(r, \vartheta) = -\nabla\phi_{\text{el}}(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\phi_{\text{el}}}{\partial r} \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_{\text{el}}}{\partial\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{q \Delta s}{4\pi\epsilon r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\vartheta \\ E_\phi \end{pmatrix},$$

wobei die ϕ -Komponente des elektrischen Feldes aufgrund der Symmetrie von ϕ_{el} verschwindet.

- Elektromagnetische Wellen können jedoch nur von zeitlich veränderlichen Strömen (und damit zeitlich variablen Ladungsverteilungen) hervorgerufen werden.
- Die elektrische Feldverteilung des Hertzschen Dipols kann daher nicht vollständig durch das ermittelte elektrostatische Feld beschrieben werden.

Elektrostatisches Feld des Dipols: Visualisierung

- Die Abbildungen zeigen die normierten nicht-verschwindenden elektrischen Feldkomponenten E_r und E_ϑ des elektrostatischen Dipols in einer Ebene $y = 0$ bzw. $\phi = \text{const.}$
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.



Elektrisches Feld nahe am Dipol

- Beschränken wir die Untersuchung des Hertzschen Dipols auf das direkte Umfeld, d.h. auf Abstände $r \ll \lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$, so wirken sich Änderungen in der Ladungsverteilung quasi instantan aus.
- Daher erwarten wir, dass das E-Feld des Hertzschen Dipols für $r \ll \lambda$ prinzipiell dem des elektrostatischen Dipols entspricht.
- Berücksichtigen wir nun erneut die zeitabhängige Ladungsverteilung $q(t)$ bzw. Stromverteilung $I(t)$, erhalten wir für den komplexen Zeiger des elektrischen Feldstärkevektors

$$\underline{\mathbf{E}}(r, \vartheta, t) \Big|_{r \ll \lambda} = \frac{q(t) \Delta s}{4\pi\epsilon r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} = -j \frac{I_0 \Delta s}{4\pi\omega\epsilon r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} \exp(j\omega t) = \begin{pmatrix} \underline{E}_r \\ \underline{E}_\vartheta \\ \underline{E}_\phi \end{pmatrix}.$$

- Da sich elektromagnetische Wellen mit endlicher Phasengeschwindigkeit ausbreiten, wird diese Feldverteilung jedoch nicht für beliebige Abstände vom Ursprung gültig sein. Um das elektrische Feld im gesamten Raum zu bestimmen, müssen wir also einen anderen Ansatz wählen.

Magnetisches Vektorpotential

- Fassen wir den Hertzschen Dipol als stromdurchflossenen Leiter auf, so wird dieser gemäß dem Durchflutungsgesetz von einer magnetischen Feldstärke \mathbf{H} umgeben.
- Dieses H-Feld erhalten wir aus dem magnetischen Vektorpotential $\mathbf{A} = A_z \mathbf{e}_z$ in Stromrichtung

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) .$$

- Transformiert in Kugelkoordinaten ergibt sich das entsprechende Vektorpotential zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_z \cos(\vartheta) \mathbf{e}_r - A_z \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\vartheta .$$

- Da die Divergenz eines Wirbelfeldes verschwindet, gilt aufgrund der Rotationsfreiheit von Gradientenfeldern mit einem beliebigen Skalarfeld f

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f)) \equiv 0 .$$

- Die Divergenz des Vektorpotentials ist folglich nicht eindeutig bestimmt (Eichtransformation).

Wellengleichung des Vektorpotentials

- Mit dem komplexen Zeiger des magnetischen Vektorpotentials $\underline{\mathbf{A}}$, erhalten wir $\underline{\mathbf{E}}$ aus dem Induktionsgesetz zu

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}} = -j\omega(\nabla \times \underline{\mathbf{A}}) \quad \Longrightarrow \quad \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\underline{\mathbf{A}} - \nabla\phi_{\text{el}}$$

- Aus dem Durchflutungsgesetz folgt unter der vereinfachenden Annahme eines verlustfreien Mediums mit $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} [\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{A}})] \equiv \frac{1}{\mu} [\nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}) - \Delta\underline{\mathbf{A}}] = j\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}} = \frac{k^2}{\mu}\underline{\mathbf{A}} - j\omega\varepsilon\nabla\phi_{\text{el}}$$

- Mit der sogenannten Lorenz-Eichung

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{\text{el}}}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = -j\omega\varepsilon\mu\phi_{\text{el}}$$

erhalten wir für das magnetische Vektorpotential die Wellengleichung in Form der Helmholtzgleichung

$$\Delta\underline{\mathbf{A}} + k^2\underline{\mathbf{A}} = 0.$$

Vorlesungsinhalte

1. Einführung

2. Kugelkoordinaten

3. Hertzscher Dipol

4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten

5. Was Sie gelernt haben sollten

6. Anhang

Herleitung Potential elektrostatischer Dipol

Kugelflächenfunktionen

Lösung der Helmholtzgleichung für das Vektorpotential

Feldkomponenten Hertzscher Dipol (ohne Animation)

Literatur

Kugelwellen

- Ausgehend vom Hertzchen Dipol im Koordinatenursprung breiten sich elektromagnetische Kugelwellen aus, welche im Folgenden beschrieben werden sollen.
- Mit dem skalaren Laplace-Operator in Kugelkoordinaten und mit $\underline{A}(r, \vartheta, \phi) = \underline{A}_z(r, \vartheta, \phi) \underline{e}_z$ erhalten wir die skalare Helmholtzgleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \underline{A}_z}{\partial \phi^2} + k^2 \underline{A}_z = 0$$

- Als Lösungsweg wählen wir den Produktansatz von Bernoulli und setzen an, dass

$$\underline{A}_z(r, \vartheta, \phi) = \underline{A}_0 \underline{R}(r) \underline{Y}(\vartheta, \phi)$$

- Aus der Helmholtzgleichung erhalten wir dann nach wenigen Schritten

$$\frac{1}{\underline{R}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \underline{R}}{\partial r} \right) + \frac{1}{\underline{Y}} \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \underline{Y}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\underline{Y}} \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \underline{Y}}{\partial \phi^2} + k^2 r^2 = 0.$$

Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten

- Führen wir die Separationskonstante $\lambda = \text{const}$ ein,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 r^2 - \lambda + \frac{1}{Y} \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{Y} \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda = 0,$$

können wir diese Gleichung separieren.

- Wir erhalten dann die **Winkelgleichung**

$$\frac{1}{Y} \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{Y} \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda = 0,$$

- und die **Radialgleichung**

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 r^2 - \lambda = 0.$$

- Die Addition dieser beiden gekoppelten Differentialgleichungen ergibt wieder die Helmholtzgleichung.

Winkelabhängigkeit

- Die **Winkelgleichung** können wir schreiben als

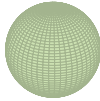
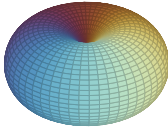
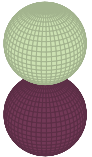
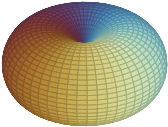
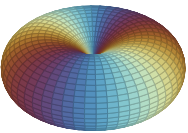
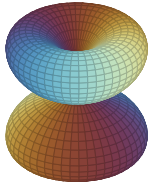
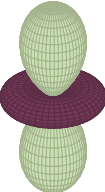
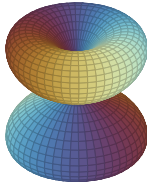
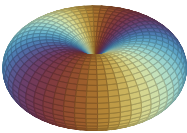
$$\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \underline{Y}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \underline{Y}}{\partial \phi^2} + \lambda \underline{Y} = 0$$

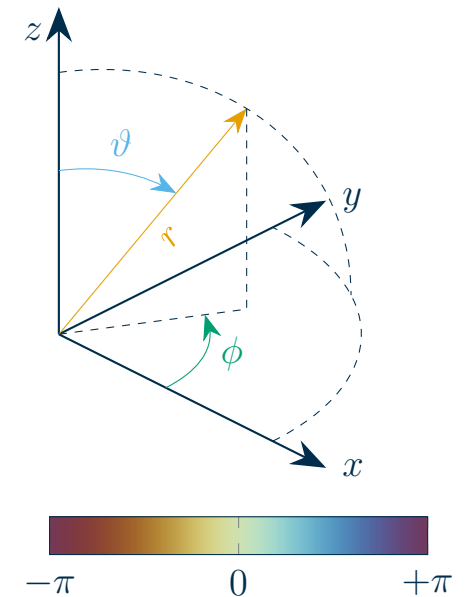
- Diese Gleichung ist im Fall $\lambda = \ell(\ell + 1)$ für ganzzahlige ℓ lösbar. Ihre Lösungen werden als *Kugelflächenfunktionen* $\underline{Y}_{\ell,m}(\vartheta, \phi)$ bezeichnet mit den Indizes ℓ und $m \in \{-\ell, -\ell + 1, \dots, \ell\}$.

$\underline{Y}_{\ell,m}$	$m = -2$	$m = -1$	$m = 0$	$m = +1$	$m = +2$
$\ell = 0$			$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$		
$\ell = 1$		$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\vartheta) \exp(-j\phi)$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\vartheta)$	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\vartheta) \exp(j\phi)$	
$\ell = 2$	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2(\vartheta) \exp(-j2\phi)$	$\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \exp(-j\phi)$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2(\vartheta) - 1)$	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos(\vartheta) \exp(j\phi)$	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2(\vartheta) \exp(j2\phi)$

Kugelflächenfunktionen (I)

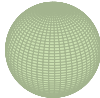
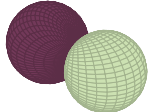
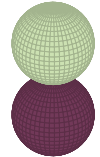
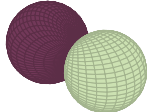
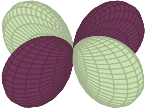
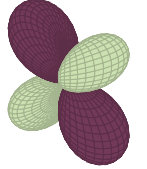
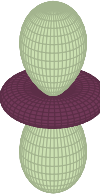
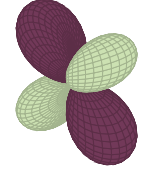
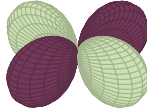
- Der Radius der im Koordinatenursprung zentrierten Körper stellt den Betrag, die Farbe das Argument der Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell,m}(\vartheta, \phi)$ dar.

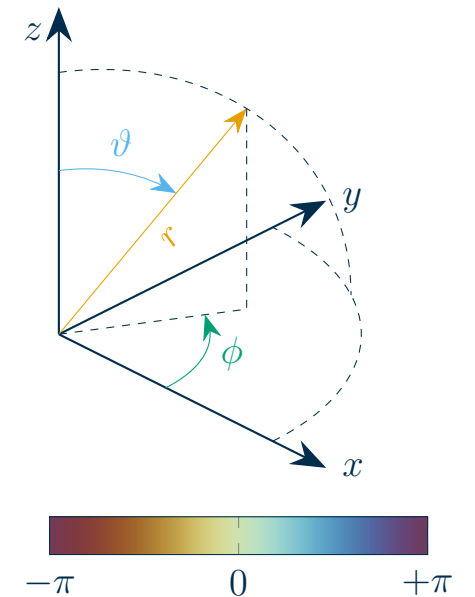
$Y_{\ell,m}$	$m = -2$	$m = -1$	$m = 0$	$m = +1$	$m = +2$
$\ell = 0$					
$\ell = 1$					
$\ell = 2$					



Kugelflächenfunktionen (II)

- Der Radius der im Koordinatenursprung zentrierten Körper stellt den Betrag, die Farbe das Vorzeichen des Realteils der Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell,m}(\vartheta, \phi)$ dar: $+$ bzw. $-$.

$\Re\{Y_{\ell,m}\}$	$m = -2$	$m = -1$	$m = 0$	$m = +1$	$m = +2$
$\ell = 0$					
$\ell = 1$					
$\ell = 2$					



Radiale Abhängigkeit

- Die **Radialgleichung** können wir mit $\lambda = \ell(\ell + 1)$ umformen in

$$r^2 \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \underline{R}}{\partial r} + [k^2 r^2 - \ell(\ell + 1)] \underline{R} = 0.$$

- Substituieren wir $\underline{R}(r) = \sqrt{\frac{1}{kr}} \underline{f}(kr)$, $x = kr$ und $\nu = \ell + \frac{1}{2}$, so erhalten wir (vgl. Anhang S. 43)

$$x^2 \frac{\partial^2 \underline{f}(x)}{\partial x^2} + x \frac{\partial \underline{f}(x)}{\partial x} + (x^2 - \nu^2) \underline{f}(x) = 0$$

- Diese Gleichung ist die *Besselsche Differentialgleichung*, deren Lösungen die Zylinderfunktionen $\underline{f}(x) = \underline{Z}_\nu(x)$ der Ordnung ν sind.
- Wir erhalten also für die radiale Abhängigkeit

$$\underline{R}_\ell(r) = \sqrt{\frac{1}{kr}} \underline{Z}_{\ell+\frac{1}{2}}(kr).$$

Sphärische Hankelfunktionen

- Dieser Ausdruck für die radiale Abhängigkeit lässt sich als Linearkombination (Koeffizienten $\underline{c}_1, \underline{c}_2 \in \mathbb{C}$) der sogenannten *sphärischen Hankelfunktionen* erster und zweiter Gattung ausdrücken

$$\underline{R}_\ell(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\underline{c}_1 \underline{h}_\ell^{(1)}(x) + \underline{c}_2 \underline{h}_\ell^{(2)}(x) \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{Bmatrix} \underline{h}_\ell^{(1)}(x) \\ \underline{h}_\ell^{(2)}(x) \end{Bmatrix}.$$

- Für die ersten drei Ordnungen weisen die sphärischen Hankelfunktionen folgende Form auf:

$$\underline{h}_0^{(1)}(x) = \left[-\frac{j}{x} \right] \exp(jx)$$

$$\underline{h}_1^{(1)}(x) = \left[-\frac{1}{x} - \frac{j}{x^2} \right] \exp(jx)$$

$$\underline{h}_2^{(1)}(x) = \left[+\frac{j}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{3j}{x^3} \right] \exp(jx)$$

$$\underline{h}_0^{(2)}(x) = \left[+\frac{j}{x} \right] \exp(-jx)$$

$$\underline{h}_1^{(2)}(x) = \left[-\frac{1}{x} + \frac{j}{x^2} \right] \exp(-jx)$$

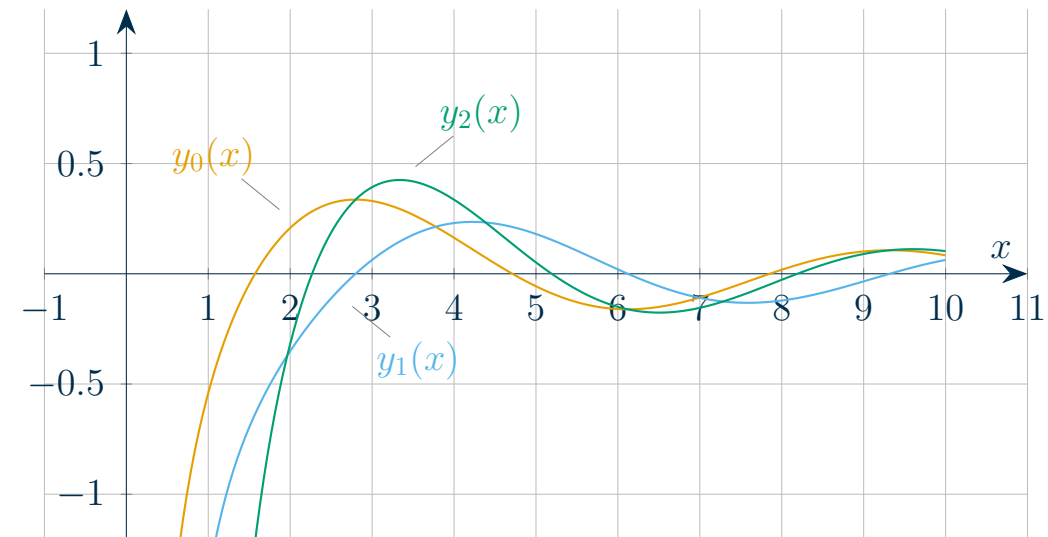
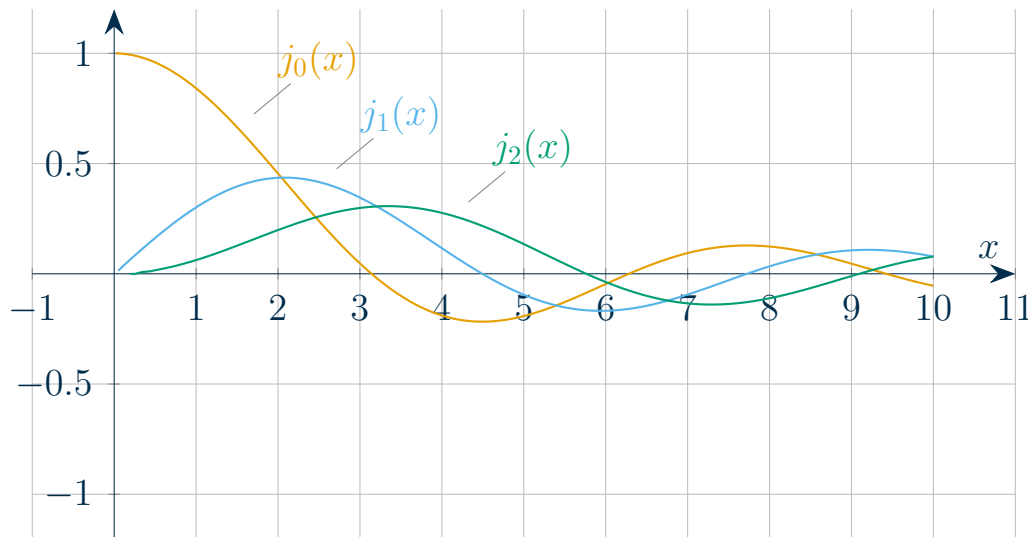
$$\underline{h}_2^{(2)}(x) = \left[-\frac{j}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{3j}{x^3} \right] \exp(-jx).$$

Sphärische Hankelfunktionen: Visualisierung

- Die sphärischen Hankelfunktionen $h_\ell^{(1)}(x)$ bzw. $h_\ell^{(2)}(x)$ können wir alternativ gemäß folgender Beziehung durch die sphärischen Besselfunktionen $j_\ell(x)$ und $y_\ell(x)$ ausdrücken

$$h_\ell^{(1)}(x) = j_\ell(x) + j y_\ell(x) \quad \text{bzw.} \quad h_\ell^{(2)}(x) = j_\ell(x) - j y_\ell(x).$$

- Ihr Real- und Imaginärteil ist also gerade durch $j_\ell(x)$ und $y_\ell(x)$ gegeben.



Vektorpotential des Hertzischen Dipols (I)

- Das Vektorpotential eines allgemeinen Dipols kann stets als Linearkombination der durch ℓ und m unterschiedenen Lösungen der Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten ausgedrückt werden, d.h.

$$\underline{\mathbf{A}}(r, \vartheta, \phi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m,\ell} a_{m,\ell} (\underline{c}_1 \underline{h}_\ell^{(1)}(kr) + \underline{c}_2 \underline{h}_\ell^{(2)}(kr)) \underline{Y}_{\ell,m}(\vartheta, \phi) \exp(j\omega t) \mathbf{e}_z$$

- Am Vorzeichen im Exponenten erkennen wir, dass die Hankelfunktionen erster bzw. zweiter Gattung in den Koordinatenursprung einlaufende bzw. vom Koordinatenursprung weglaufende Wellen beschreiben.
- Im Folgenden betrachten wir vom Dipol abgestrahlte Wellen, weshalb wir für die Radialabhängigkeit die Hankelfunktionen zweiter Gattung verwenden und dementsprechend mit $\underline{c}_1 = 0, \underline{c}_2 = 1$ den folgenden Ausdruck erhalten

$$\underline{R}(r) = \underline{R}_\ell(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \underline{h}_\ell^{(2)}(kr).$$

Vektorpotential des Hertzischen Dipols (II)

- Sehr nah am Dipol, d.h. für $r \ll \lambda$, muss das elektrische Feld dem des elektrostatischen Dipols entsprechen. Daraus folgt für das Vektorpotential des Hertzischen Dipols dass $m = 0$ und $\ell = 0$ sein muss und

$$\underline{Y}(\vartheta, \phi) = \underline{Y}_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \text{sowie} \quad \underline{R}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} h_0^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{j}{kr} \exp(-jkr) .$$

- Vergleichen wir nun das elektrische Skalarpotential $\phi_{\text{el}} = \frac{j}{\omega\epsilon\mu} \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Potential des elektrostatischen Dipols, ergibt sich (Nachweis im Anhang auf S. 45)

$$\underline{a}_{0,0} = -j \frac{\mu \Delta s I_0 k}{2\sqrt{2}} .$$

- Daraus erhalten wir bei harmonischer Anregung mit dem Strom $\underline{I}(t) = \underline{I}_0 \exp(j\omega t)$ mit $\mathbf{e}_z = [\cos(\vartheta)\mathbf{e}_r - \sin(\vartheta)\mathbf{e}_\vartheta]$ für den komplexen Zeiger des magnetischen Vektorpotentials

$$\underline{\mathbf{A}}(r, \vartheta, t) = \frac{\mu \Delta s \underline{I}_0 k}{4\pi} \frac{1}{kr} \exp(j(\omega t - kr)) [\cos(\vartheta) \mathbf{e}_r - \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\vartheta]$$

Feldkomponenten des Hertzischen Dipols (I)

- Für das H-Feld erhalten wir gemäß der Definition des magnetischen Vektorpotentials

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \underline{\mathbf{A}}) = \frac{1}{\mu r} \left(\frac{\partial(rA_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\phi = H_\phi \mathbf{e}_\phi$$

- Für das E-Feld folgt aus dem Durchflutungsgesetz

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta H_\phi)}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial(r H_\phi)}{\partial r} \mathbf{e}_\vartheta \right)$$

- Die nichtverschwindenden Feldkomponenten des Hertzischen Dipols werden also zu

$$E_r = \frac{I_0 \Delta s k^3}{4\pi\omega\epsilon} 2 \left(\frac{1}{k^2 r^2} - j \frac{1}{k^3 r^3} \right) \cos(\vartheta) \exp(j(\omega t - kr))$$

$$E_\vartheta = \frac{I_0 \Delta s k^3}{4\pi\omega\epsilon} \left(j \frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} - j \frac{1}{k^3 r^3} \right) \sin(\vartheta) \exp(j(\omega t - kr))$$

$$H_\phi = \frac{I_0 \Delta s k^3}{4\pi\omega\epsilon} \frac{1}{Z} \left(j \frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) \sin(\vartheta) \exp(j(\omega t - kr))$$

Feldkomponenten des Hertzschen Dipols (II)

- Die Animationen¹ zeigen die normierten, nicht-verschwindenden Feldkomponenten in der Ebene $y = 0$ bzw. $\phi = \text{const}$ für $t = \frac{n\pi}{4\omega}$, $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$. Siehe auch Anhang S. 48.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.

¹Die Animation funktioniert im Acrobat Reader (nicht auf Mobilgeräten), KDE Okular, PDF-XChange und Foxit Reader.

Nahfeld des Hertzischen Dipols

- Sehr nah am Hertzischen Dipol, d.h. für $r \ll 2\pi/k = \lambda$ spielen in der Klammer jeweils nur die Terme mit dem höchsten Exponenten im Nenner eine Rolle und $\exp(-jkr) \approx 1$ und wir erhalten

$$\underline{E}_r \approx -j 2 \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{1}{r^3} \cos(\vartheta) \exp(j\omega t)$$

$$\underline{E}_\vartheta \approx -j \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{1}{r^3} \sin(\vartheta) \exp(j\omega t)$$

$$\underline{H}_\phi \approx \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{1}{r^2} \sin(\vartheta) \exp(j\omega t)$$

- Dabei entspricht das E-Feld dem des elektrostatischen Dipols bei harmonischer Zeitabhängigkeit.
- Für größere Abstände r ändert sich die Feldverteilung aufgrund der endlichen Phasengeschwindigkeit.
- Das E-Feld und das H-Feld haben einen Phasenunterschied von 90° ; es wird also primär Blindleistung transportiert.

Fernfeld des Hertzischen Dipols

- Weit weg vom Hertzischen Dipol, d.h. für $r \gg 2\pi/k = \lambda$ spielen in der Klammer jeweils nur die Terme proportional $1/r$ eine Rolle und wir erhalten

$$\underline{E}_r \approx 0$$

$$\underline{E}_\vartheta \approx j \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{I_0 \Delta s k^2}{4\pi r} \sin(\vartheta) \exp(j(\omega t - kr))$$

$$\underline{H}_\phi \approx j \frac{I_0 \Delta s k}{4\pi r} \sin(\vartheta) \exp(j(\omega t - kr))$$

- Das Fernfeld hat den Charakter einer ebenen Welle in r -Richtung. Es gilt $\frac{E_\vartheta}{H_\phi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z$.
- Dies resultiert in dem komplexen Poynting-Vektor

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) = \frac{1}{2} \underline{E}_\vartheta \underline{H}_\phi^* \mathbf{e}_r = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \varepsilon} \left(\frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \right)^2 \frac{k^3}{r^2} \sin^2(\vartheta) \mathbf{e}_r$$

- Dieser ist rein reell; es findet somit ein reiner Wirkleistungstransport statt.

Vorlesungsinhalte

1. Einführung

2. Kugelkoordinaten

3. Hertzscher Dipol

4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten

5. Was Sie gelernt haben sollten

6. Anhang

Herleitung Potential elektrostatischer Dipol

Kugelflächenfunktionen

Lösung der Helmholtzgleichung für das Vektorpotential

Feldkomponenten Hertzscher Dipol (ohne Animation)

Literatur

Was Sie gelernt haben sollten

- Welches physikalische Modell dem Hertzschen Dipol zugrunde liegt und dessen Bedeutung für die Erzeugung elektromagnetischer Wellen.
- Weshalb wir das magnetische Vektorpotential verwenden, um die Maxwell'schen Gleichungen zu entkoppeln.
- Welche Bedeutung Kugelwellen für die Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten haben.
- Welche Rolle die durch ℓ bzw. m unterschiedenen Lösungen der Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten für die Darstellung des Vektorpotentials eines allgemeinen Dipols spielen.
- Weshalb im Nah- bzw. Fernfeld des Hertzschen Dipols primär ein Blind- bzw. Wirkleistungstransport stattfindet.

Vorlesungsinhalte

1. Einführung

2. Kugelkoordinaten

3. Hertzscher Dipol

4. Wellengleichung in Kugelkoordinaten

5. Was Sie gelernt haben sollten

6. Anhang

Herleitung Potential elektrostatischer Dipol

Kugelflächenfunktionen

Lösung der Helmholtzgleichung für das Vektorpotential

Feldkomponenten Hertzscher Dipol (ohne Animation)

Literatur

Vorlesungsinhalte: Anhang

6. Anhang

Herleitung Potential elektrostatischer Dipol

Kugelflächenfunktionen

Lösung der Helmholtzgleichung für das Vektorpotential

Feldkomponenten Hertzscher Dipol (ohne Animation)

Literatur

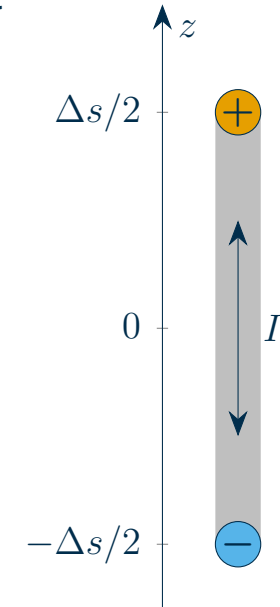
Herleitung Potential elektrostatischer Dipol (I)

- Das elektrische Potential am Ort \mathbf{r} , das durch eine Punktladung q in \mathbf{r}' hervorgerufen wird, ist gegeben durch

$$\varphi_{\text{el}}^q(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

- Betrachten wir nun einen elektrostatischen Dipol wie rechts dargestellt.
- Für die beiden Punktladungen $\pm q$ in $\mathbf{r}' = \pm\Delta s/2 \mathbf{e}_z$ erhalten wir dann jeweils das Potential

$$\varphi_{\text{el}}^{\pm q}(\mathbf{r}) = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp \Delta s/2)^2}}.$$



Herleitung Potential elektrostatischer Dipol (II)

- Aus den beiden Teilpotentialen folgt dann für das gesamte elektrische Potential im Raum

$$\varphi_{\text{el}}(\mathbf{r}) = \varphi_{\text{el}}^q(\mathbf{r}) + \varphi_{\text{el}}^{-q}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \Delta s/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \Delta s/2)^2}} \right).$$

- Schreiben wir $r = |\mathbf{r}|$, können wir die Wurzelterme im Nenner darstellen gemäß

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z \pm \Delta s/2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 \pm \Delta s z + \Delta s^2/4} = r \sqrt{1 \pm \frac{\Delta s z}{r^2} + \frac{\Delta s^2}{4r^2}}.$$

- Nehmen wir nun an, dass die Dipollänge Δs viel kleiner ist als der Abstand vom Beobachtungspunkt zum Dipol, d.h. $r \gg \Delta s$, so können wir annehmen, dass

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z \pm \Delta s/2)^2} \approx r \sqrt{1 \pm \frac{\Delta s z}{r^2}} \approx r \pm \frac{\Delta s z}{2r}.$$

Herleitung Potential elektrostatischer Dipol (III)

- Schreiben wir $a = r$ und $b = \frac{\Delta s z}{2r}$, berücksichtigen

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{2b}{a^2-b^2},$$

und verwenden Kugelkoordinaten mit $\cos(\vartheta) = \frac{z}{r}$, ergibt sich

$$\varphi_{\text{el}}(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\Delta s \cos(\vartheta)}{r^2 - \left(\frac{\Delta s}{2} \cos(\vartheta)\right)^2}.$$

- Berücksichtigen wir erneut $r \gg \Delta s$, können wir den Nenner vereinfachen und erhalten

$$\varphi_{\text{el}}(\mathbf{r}) \approx \frac{q\Delta s \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Vorlesungsinhalte: Anhang

6. Anhang

Herleitung Potential elektrostatischer Dipol

Kugelflächenfunktionen

Lösung der Helmholtzgleichung für das Vektorpotential

Feldkomponenten Hertzscher Dipol (ohne Animation)

Literatur

Definition der Kugelflächenfunktionen

- Die Kugelflächenfunktionen $\underline{Y}_{\ell,m}(\vartheta, \phi)$ sind definiert durch

$$\underline{Y}_{\ell,m}(\vartheta, \phi) = \frac{(-1)^{\ell+m}}{2^{\ell} \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} \exp(j m \phi) \sin^m(\vartheta) \frac{d^{\ell+m} (\sin^{2\ell}(\vartheta))}{d \cos^{\ell+m}(\vartheta)}.$$

- Weitere Details zu den Kugelflächenfunktionen finden Sie z.B. in Kapitel 14 der NIST Digital Library of Mathematical Functions <https://dlmf.nist.gov/>.

Vorlesungsinhalte: Anhang

6. Anhang

Herleitung Potential elektrostatischer Dipol

Kugelflächenfunktionen

Lösung der Helmholtzgleichung für das Vektorpotential

Feldkomponenten Hertzscher Dipol (ohne Animation)

Literatur

Lösungen der Radialgleichung: Ergänzung (I)

- Mit $\lambda = \ell(\ell + 1)$ haben wir den folgenden Ausdruck für die Radialgleichung erhalten

$$r^2 \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \underline{R}}{\partial r} + [k^2 r^2 - \ell(\ell + 1)] \underline{R} = 0.$$

- Wählen wir nun den Ansatz $\underline{R}(r) = \sqrt{\frac{1}{kr}} \underline{f}(kr)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \underline{R}}{\partial r} &= \sqrt{kr} \frac{\partial \underline{f}(x)}{\partial x} \Big|_{x=kr} - \frac{\underline{f}(kr)}{2\sqrt{kr}} \\ r^2 \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial r^2} &= \sqrt{kr} \left(kr \frac{\partial^2 \underline{f}(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=kr} - \frac{\partial \underline{f}(x)}{\partial x} \Big|_{x=kr} \right) + \frac{3\underline{f}(kr)}{4\sqrt{kr}}. \end{aligned}$$

- Setzen wir die Ausdrücke in die Radialgleichung ein und schreiben $x = kr$, ergibt sich

$$\sqrt{x} \left(x \frac{\partial^2 \underline{f}(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \underline{f}(x)}{\partial x} \right) + \frac{3\underline{f}(x)}{4\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} \frac{\partial \underline{f}(x)}{\partial x} - \frac{\underline{f}(x)}{\sqrt{x}} + [x^2 - \ell(\ell + 1)] \frac{\underline{f}(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

Lösungen der Radialgleichung: Ergänzung (II)

- Mit $\ell(\ell + 1) + \frac{1}{4} = \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2$ finden wir nach Multiplikation mit \sqrt{x}

$$x^2 \frac{\partial^2 \underline{f}(x)}{\partial x^2} + x \frac{\partial \underline{f}(x)}{\partial x} + \left[x^2 - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 \right] \underline{f}(x) = 0.$$

- Damit haben wir gezeigt, dass der gewählte Ansatz für \underline{R} tatsächlich auf die Besselsche Differentialgleichung führt.

Vektorpotential Hertzscher Dipol: Koeffizient $\underline{a}_{0,0}$ (I)

- Der Ansatz für das magnetische Vektorpotential des Hertzschen Dipols liefert zum Zeitpunkt $t = 0$

$$\underline{A}_z = \underline{a}_{0,0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{j}{kr} \exp(-jkr) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{\underline{a}_{0,0}}{\sqrt{2\pi}} \frac{j}{kr} \exp(-jkr) .$$

- Ermitteln wir das elektrische Potential des Hertzschen Dipols im Nahfeld können wir durch Vergleich mit dem elektrostatischen Potential auf Folie 12 den Koeffizienten $\underline{a}_{0,0}$ bestimmen.
- Mithilfe der Darstellung von \underline{e}_z in Kugelkoordinaten erhalten wir

$$\phi_{\text{el}} = \frac{j}{\omega \epsilon \mu} \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} = \frac{j}{\omega \epsilon \mu} \left(\frac{\cos(\vartheta)}{r^2} \frac{\partial(r^2 \underline{A}_z)}{\partial r} - \frac{\underline{A}_z}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial \sin^2(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right) = \frac{j}{\omega \epsilon \mu} \left(\frac{\cos(\vartheta)}{r^2} \frac{\partial(r^2 \underline{A}_z)}{\partial r} - \frac{2 \cos(\vartheta)}{r} \underline{A}_z \right) .$$

- Für die radiale Ableitung gilt dabei

$$\frac{\partial(r^2 \underline{A}_z)}{\partial r} = j \frac{\underline{a}_{0,0}}{\sqrt{2\pi} k} \frac{\partial(r \exp(-jkr))}{\partial r} = \frac{\underline{a}_{0,0}}{\sqrt{2\pi} k} (j + kr) \exp(-jkr) .$$

Vektorpotential Hertzscher Dipol: Koeffizient $\underline{a}_{0,0}$ (II)

- Setzen wir wieder in den Ausdruck für das elektrische Potential ein, sehen wir, dass

$$\phi_{\text{el}} = \frac{j k}{\omega \varepsilon \mu} \frac{\underline{a}_{0,0}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-j k r) \left(\cos(\vartheta) \left(\frac{j}{k^2 r^2} + \frac{1}{k r} \right) - 2 \cos(\vartheta) \frac{j}{k^2 r^2} \right) = \frac{j k}{\omega \varepsilon \mu} \frac{\underline{a}_{0,0}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-j k r) \cos(\vartheta) \left(\frac{1}{k r} - \frac{j}{k^2 r^2} \right).$$

- Der Vergleich mit dem elektrostatischen Dipol ist nur im Nahfeld sinnvoll. Dort gilt

$$\phi_{\text{el}}(r, \vartheta) \approx \frac{k}{\omega \varepsilon \mu} \frac{\underline{a}_{0,0}}{\sqrt{2\pi}} \cos(\vartheta) \frac{1}{k^2 r^2}.$$

- Diesen Ausdruck vergleichen wir nun mit dem Ausdruck für das elektrostatische Potential auf Folie 12, das wir hier zur besseren Unterscheidung $\phi_{\text{el,stat}}$ nennen

$$\frac{k}{\omega \varepsilon \mu} \frac{\underline{a}_{0,0}}{\sqrt{2\pi}} \cos(\vartheta) \frac{1}{k^2 r^2} \stackrel{!}{=} \phi_{\text{el,stat}}(r, \vartheta) = \frac{q \Delta s \cos(\vartheta)}{4\pi \varepsilon r^2}.$$

- Mit $\underline{I}_0 = j \omega q$ folgt so für den gesuchten Koeffizienten $\underline{a}_{0,0}$

$$\underline{a}_{0,0} = -j \frac{\mu \Delta s \underline{I}_0 k}{2\sqrt{2}}.$$

Vorlesungsinhalte: Anhang

6. Anhang

Herleitung Potential elektrostatischer Dipol

Kugelflächenfunktionen

Lösung der Helmholtzgleichung für das Vektorpotential

Feldkomponenten Hertzscher Dipol (ohne Animation)

Literatur

Feldkomponenten des Hertzischen Dipols (II)

- Die Abbildungen zeigen die normierten nicht-verschwindenden Feldkomponenten in einer Ebene $y = 0$ bzw. $\phi = \text{const}$ für $t = \frac{n\pi}{4\omega}$, $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.

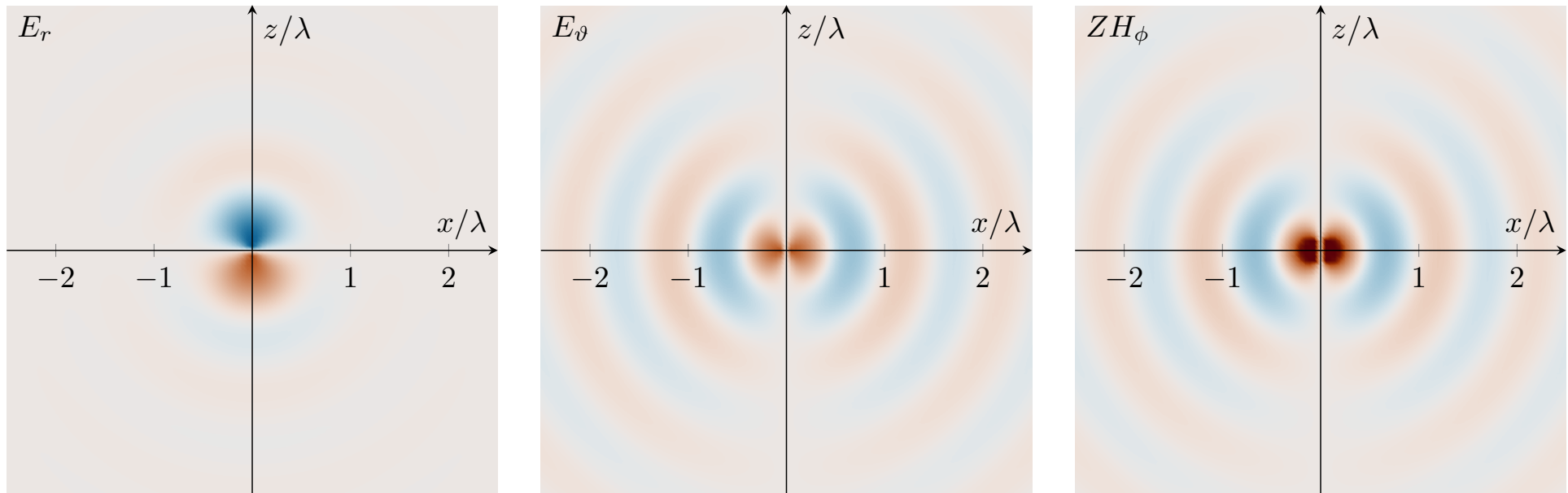


Abbildung: $n = 0$

Feldkomponenten des Hertzischen Dipols (II)

- Die Abbildungen zeigen die normierten nicht-verschwindenden Feldkomponenten in einer Ebene $y = 0$ bzw. $\phi = \text{const}$ für $t = \frac{n\pi}{4\omega}$, $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.

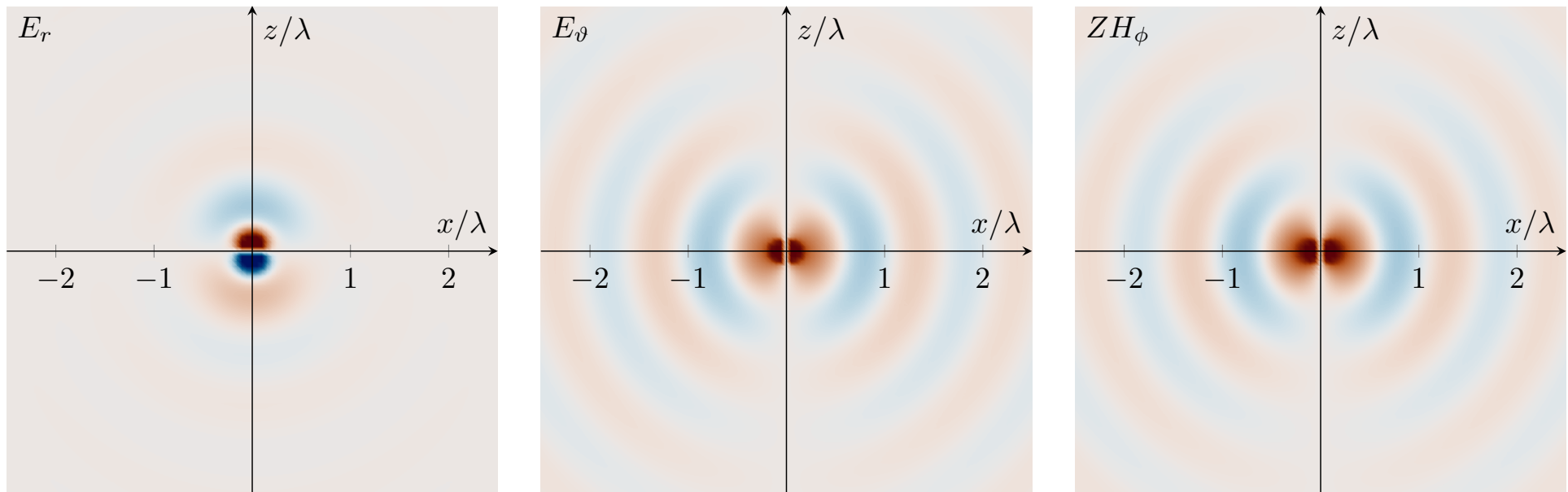


Abbildung: $n = 1$

Feldkomponenten des Hertzischen Dipols (II)

- Die Abbildungen zeigen die normierten nicht-verschwindenden Feldkomponenten in einer Ebene $y = 0$ bzw. $\phi = \text{const}$ für $t = \frac{n\pi}{4\omega}$, $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.

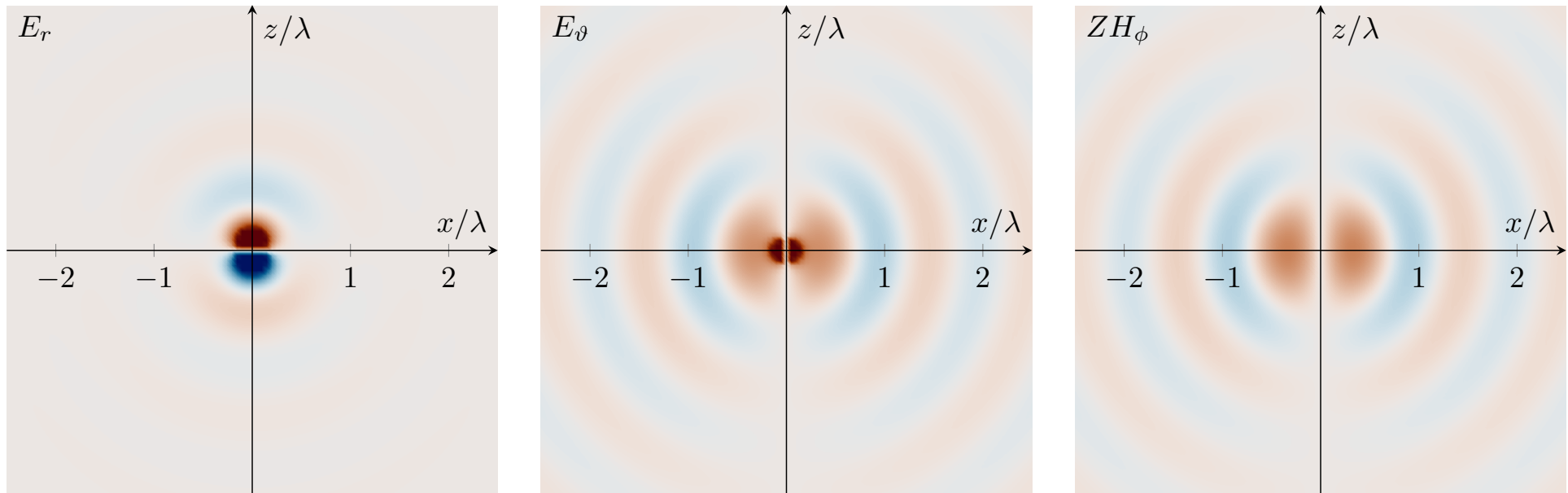


Abbildung: $n = 2$

Feldkomponenten des Hertzischen Dipols (II)

- Die Abbildungen zeigen die normierten nicht-verschwindenden Feldkomponenten in einer Ebene $y = 0$ bzw. $\phi = \text{const}$ für $t = \frac{n\pi}{4\omega}$, $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.

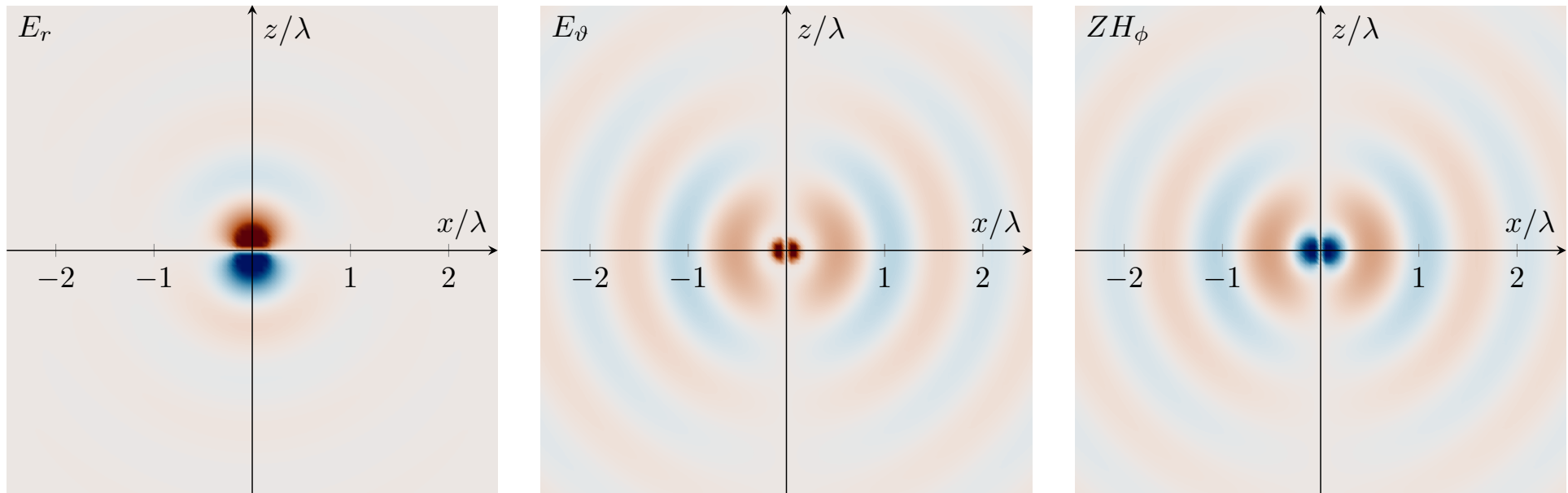


Abbildung: $n = 3$

Feldkomponenten des Hertzischen Dipols (II)

- Die Abbildungen zeigen die normierten nicht-verschwindenden Feldkomponenten in einer Ebene $y = 0$ bzw. $\phi = \text{const}$ für $t = \frac{n\pi}{4\omega}$, $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.

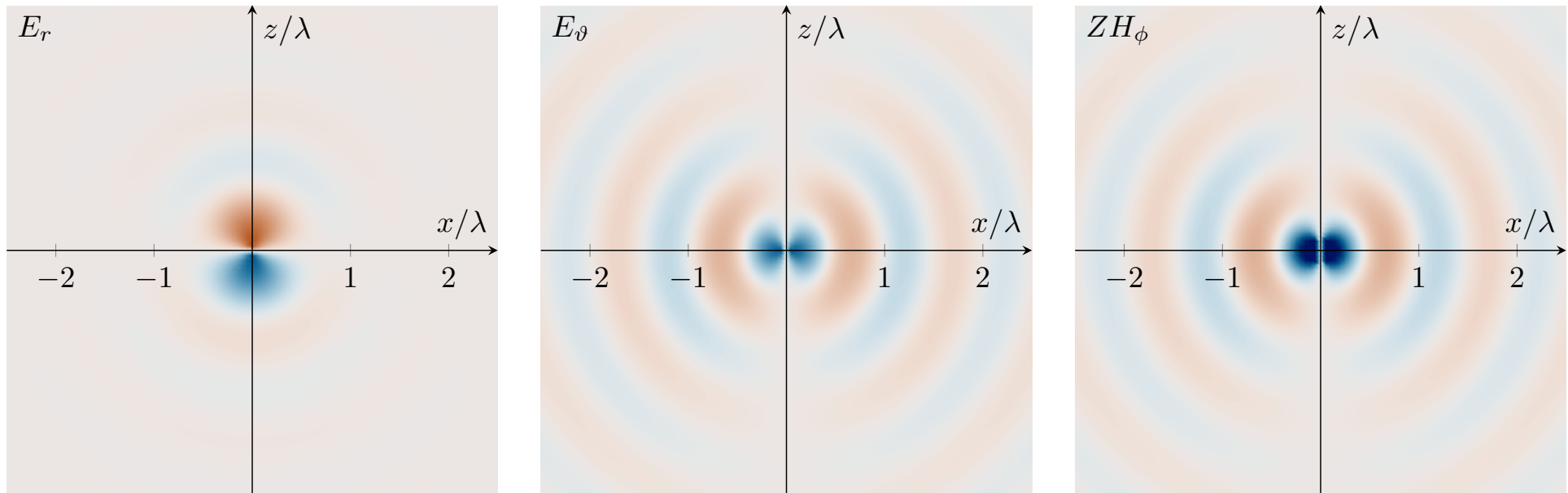


Abbildung: $n = 4$

Feldkomponenten des Hertzischen Dipols (II)

- Die Abbildungen zeigen die normierten nicht-verschwindenden Feldkomponenten in einer Ebene $y = 0$ bzw. $\phi = \text{const}$ für $t = \frac{n\pi}{4\omega}$, $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.

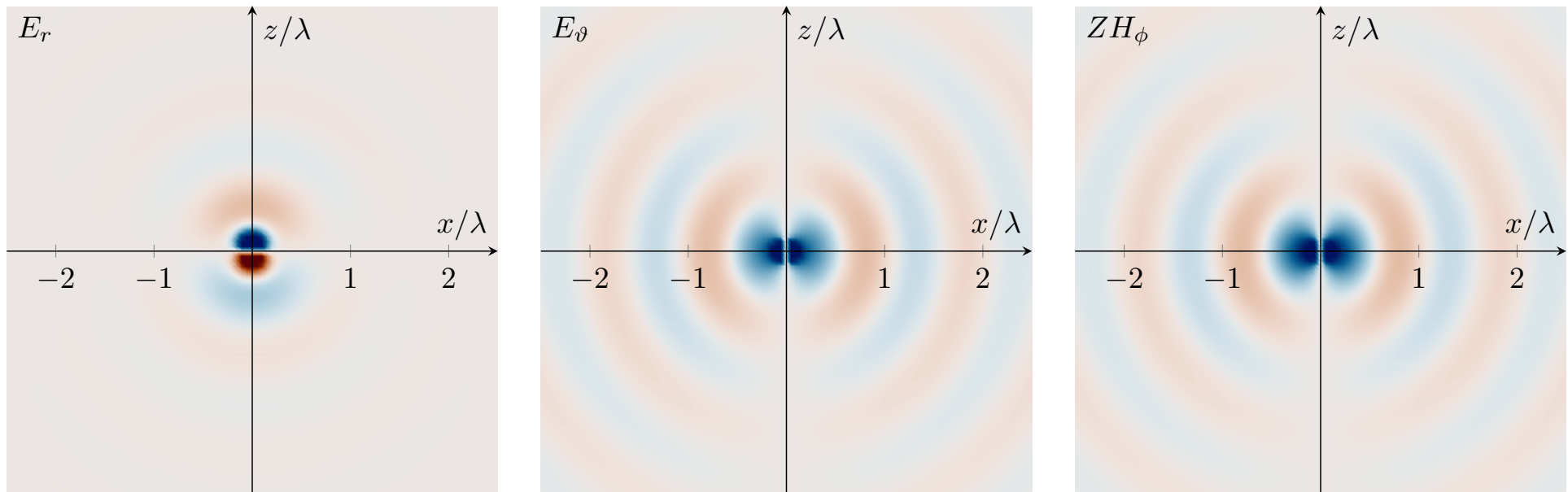


Abbildung: $n = 5$

Feldkomponenten des Hertzischen Dipols (II)

- Die Abbildungen zeigen die normierten nicht-verschwindenden Feldkomponenten in einer Ebene $y = 0$ bzw. $\phi = \text{const}$ für $t = \frac{n\pi}{4\omega}$, $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.

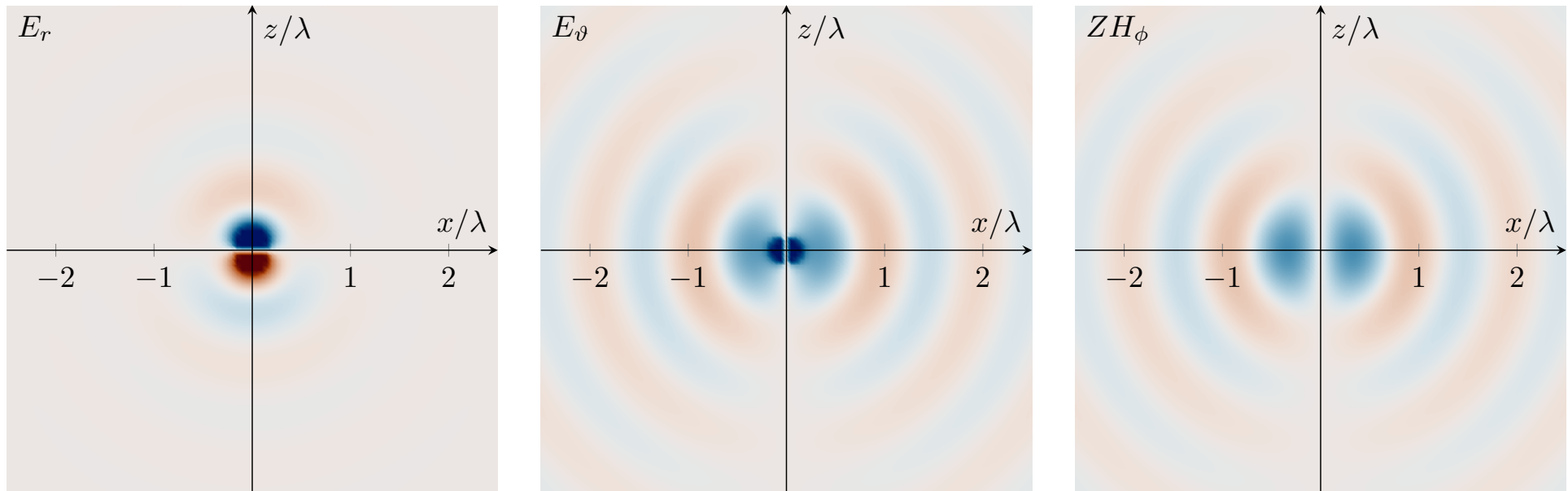


Abbildung: $n = 6$

Feldkomponenten des Hertzischen Dipols (II)

- Die Abbildungen zeigen die normierten nicht-verschwindenden Feldkomponenten in einer Ebene $y = 0$ bzw. $\phi = \text{const}$ für $t = \frac{n\pi}{4\omega}$, $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$.
- Je dunkler der Rotton, desto positiver der Wert, je dunkler der Blauton, desto negativer.

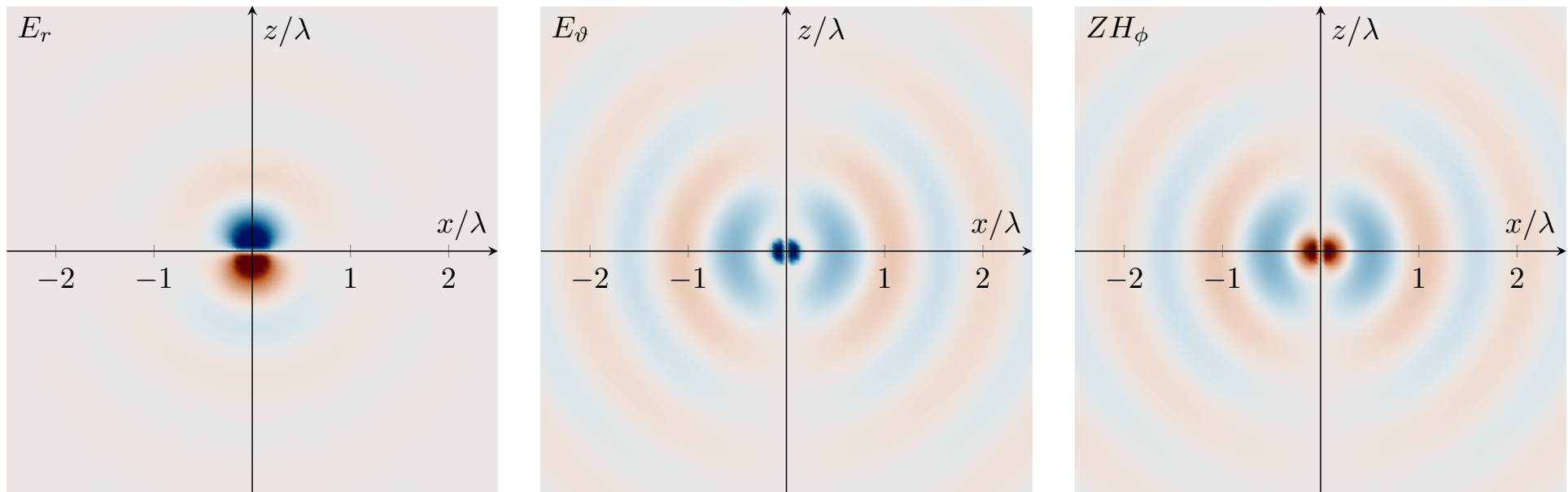


Abbildung: $n = 7$

Vorlesungsinhalte: Anhang

6. Anhang

Herleitung Potential elektrostatischer Dipol

Kugelflächenfunktionen

Lösung der Helmholtzgleichung für das Vektorpotential

Feldkomponenten Hertzscher Dipol (ohne Animation)

Literatur

Literatur

- [1] Heino Henke. *Elektromagnetische Felder: Theorie und Anwendung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. DOI: 10.1007/978-3-662-62235-3.
- [2] Fabio Crameri. *Scientific colour maps*. 2023. DOI: 10.5281/ZENODO.1243862.