

# EMFW Vorlesung 06: Ebene Wellen an Grenzflächen

Wintersemester 2025/26

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 20. Januar 2026

# Vorlesungsinhalte

**1. Grenzbedingungen**

**2. Reflexion und Brechung ebener Wellen**

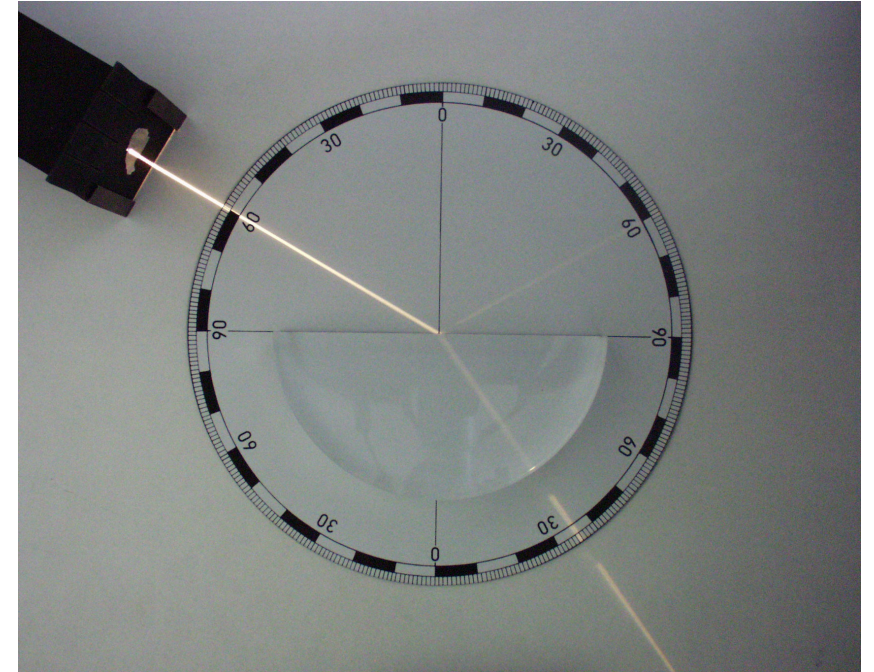
**3. Fresnelsche Formeln**

**4. Was Sie gelernt haben sollten**

**5. Anhang**

# Einführung und Motivation

- Bislang haben wir die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ausschließlich in homogenen und unbegrenzten Medien betrachtet.
- Technische Anwendungen, wie beispielsweise die leitungsgebundene Datenübertragung, erfordern jedoch eine gezielte räumliche Führung der Wellen.
- Zur Realisierung dieser Wellenführung werden inhomogene Strukturen eingesetzt, die wir allgemein als *Wellenleiter* bezeichnen.
- Das physikalische Verständnis von Wellenleitern basiert fundamental auf dem Verhalten der Felder an den Grenzflächen zwischen unterschiedlichen Materialien.
- An diesen Unstetigkeitsstellen treten physikalische Phänomene wie Reflexion und Brechung auf, welche die Wellenausbreitung bestimmen.
- Mathematisch fordern diese Übergänge die Formulierung von spezifischen Grenzbedingungen für die elektrische und magnetische Feldstärke, die wir herleiten werden.



Brechung (unterer Lichtstrahl) und Reflexion (oberer Lichtstrahl) eines Lichtstrahls an einem Plexiglas-Halbkreiskörper. Referenz: Zátanyi Sándor (ifj.) Fized, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

# Vorlesungsinhalte

## 1. Grenzbedingungen

## 2. Reflexion und Brechung ebener Wellen

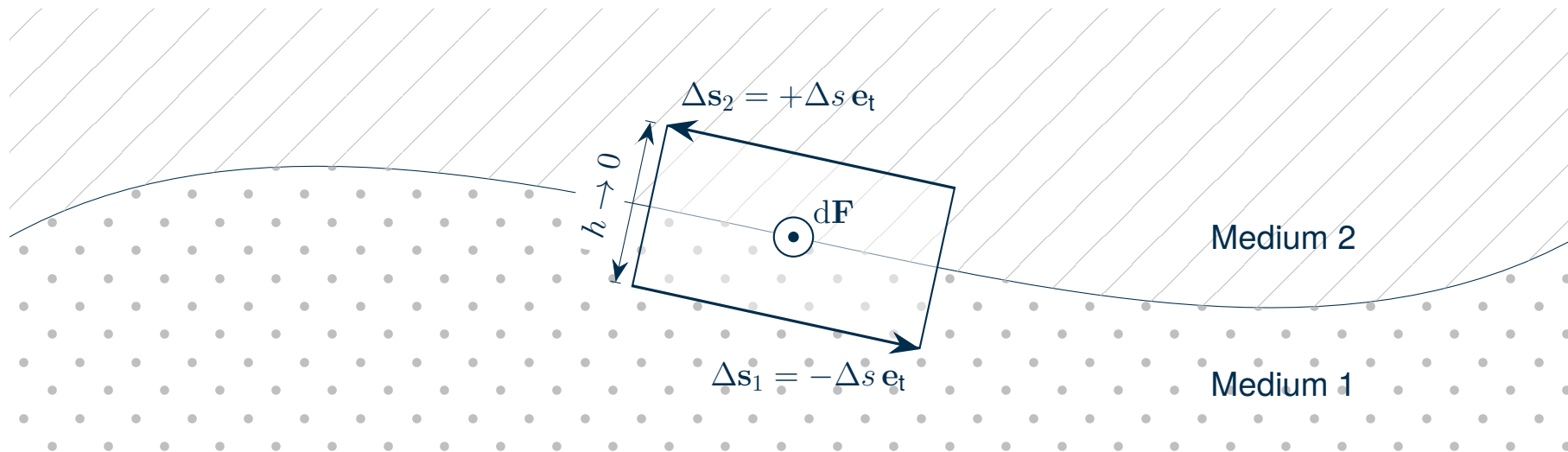
## 3. Fresnelsche Formeln

## 4. Was Sie gelernt haben sollten

## 5. Anhang

# Stetigkeit der tangentialen Feldkomponenten (I)

- Wir untersuchen das Verhalten der elektrischen und magnetischen Feldkomponenten *tangential* zu der Grenzfläche zweier Medien mithilfe einer geschlossenen rechteckigen Integrationsschleife  $s$ , welche die Fläche  $F$  einschließt.
- Mit dem Einheitstangentialvektor der Grenzfläche  $\mathbf{e}_t$  parallel zu der Schleife bezeichnen wir die tangentialen Anteile des E- und H-Felds im Medium  $i \in 1, 2$  mit  $E_{t,i} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_t$  und  $H_{t,i} = \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{e}_t$ .
- Die Schleife besitzt die Breite  $\Delta s$  parallel zur Grenzfläche und die Höhe  $h$  senkrecht dazu, wobei die Flächennormale  $d\mathbf{F}$  parallel zur Grenzfläche verläuft.
- Im Folgenden betrachten wir den Fall  $h \rightarrow 0$ , wodurch die Fläche  $F$  der Schleife verschwindet.



# Stetigkeit der tangentialen Feldkomponenten (II)

- Aus dem Induktions- und Durchflutungsgesetz in Integralform folgt für diese Schleife:

$$\int_F \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{F} = \oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = \int_F \mathbf{J} \cdot d\mathbf{F} + \int_F \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{F} = \int_F \mathbf{J} \cdot d\mathbf{F} = i' \Delta s$$
$$\int_F \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{F} = \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = - \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{F} = 0$$

- Das Wegintegral entlang der Schleife reduziert sich für  $h \rightarrow 0$  auf die Beiträge der Tangentialvektoren  $\Delta\mathbf{s}_1 = -\Delta s \mathbf{e}_t$  und  $\Delta\mathbf{s}_2 = \Delta s \mathbf{e}_t$ .
- Da  $F$  für  $h \rightarrow 0$  verschwindet, gehen die Integrale über die endlichen Größen  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  und  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  gegen Null.
- Nur die idealisierte Stromdichte  $\mathbf{J}$  liefert einen endlichen Oberflächenstrom  $i' \Delta s$  mit Strombelag  $i'$  (Einheit A/m).

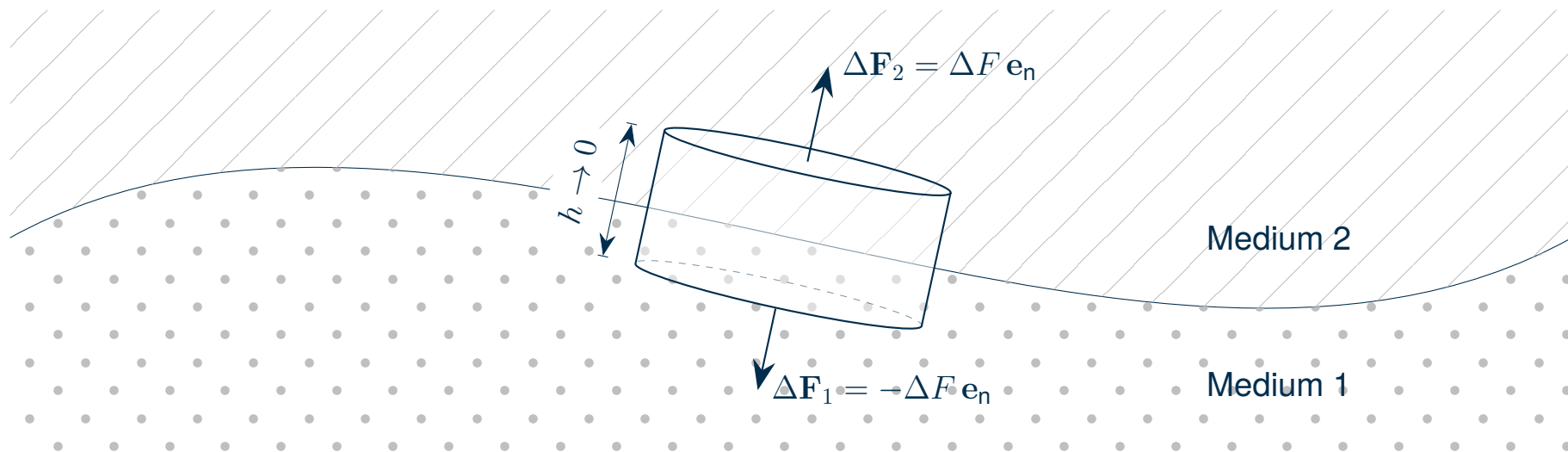
## Definition:

Mit den tangentialen Feldkomponenten an der Grenzfläche in Medium 1  $H_{t,1}$  und  $E_{t,1}$  sowie in Medium 2  $H_{t,2}$  und  $E_{t,2}$  lauten die *Stetigkeitsbedingungen der tangentialen Feldkomponenten*

$$H_{t,2} - H_{t,1} = i' \quad \text{und} \quad E_{t,2} - E_{t,1} = 0.$$

# Stetigkeit der normalen Feldkomponenten (I)

- Zur Herleitung der Randbedingungen für die *Normalkomponenten* betrachten wir ein zylinderförmiges Volumen  $V$ .
- Mit dem Einheitsnormalenvektor der Grenzfläche  $\mathbf{e}_n$  bezeichnen wir die normalen Anteile des D- und B-Felds im Medium  $i \in 1, 2$  mit  $D_{n,i} = \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{e}_n$  und  $B_{n,i} = \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{e}_n$ .
- Die Deckel- und Bodenflächen  $\Delta F$  liegen parallel zur Grenzfläche, während die Zylinderachse der Höhe  $h$  die Grenzschicht durchdringt.
- Wir führen erneut den Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  durch, wodurch das Volumen des Zylinders verschwindet, die Stirnflächen jedoch erhalten bleiben.



# Stetigkeit der normalen Feldkomponenten (II)

- Für das Volumen folgt aus dem Gaußschen Gesetz sowie der Quellenfreiheit des magnetischen Felds:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dV = \oint_O \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} = \mathbf{D}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = \int_V \varrho \, dV = \sigma \Delta F$$
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = \oint_O \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = \mathbf{B}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = 0.$$

- Die Beiträge des Mantelflächenintegrals verschwinden für  $h \rightarrow 0$ , sodass nur die Flüsse durch die Stirnflächen mit den Normalenvektoren  $\Delta\mathbf{F}_1 = -\Delta F \mathbf{e}_n$  und  $\Delta\mathbf{F}_2 = \Delta F \mathbf{e}_n$  verbleiben.
- Das Volumenintegral über die Raumladungsdichte  $\int \varrho \, dV$  liefert die Flächenladungsdichte  $\sigma$  (Einheit A s/m<sup>2</sup>).

## Definition:

Mit den normalen Feldkomponenten an der Grenzfläche in Medium 1  $D_{n,1}$  und  $B_{n,1}$  sowie in Medium 2  $D_{n,2}$  und  $B_{n,2}$  folgen daraus die *Stetigkeitsbedingungen der normalen Feldkomponenten*

$$D_{n,2} - D_{n,1} = \sigma \quad \text{und} \quad B_{n,2} - B_{n,1} = 0$$
$$\varepsilon_2 E_{n,2} - \varepsilon_1 E_{n,1} = \sigma \quad \text{und} \quad \mu_2 H_{n,2} - \mu_1 H_{n,1} = 0.$$

# Spezialfall: Randbedingungen am idealen Leiter

- In Vorlesung 4 haben wir bereits gesehen, dass das Innere idealer Leiter (Leitfähigkeit  $\kappa \rightarrow \infty$ ) stets feldfrei ist.
- Ist das Medium 2 ein idealer Leiter, verschwinden dort alle Feldgrößen ( $\mathbf{E}_2 = 0, \mathbf{H}_2 = 0$ ), wodurch sich die Stetigkeitsbedingungen vereinfachen.

## Randbedingungen:

Da die Felder nur noch auf einer Seite der Grenzfläche (im Medium 1) existieren, sprechen wir in diesem Fall von *Randbedingungen*. Das elektrische Feld steht also stets senkrecht auf dem Leiter, das magnetische Feld verläuft tangential dazu:

$$H_{t,1} = -i' , \quad E_{t,1} = 0 , \quad D_{n,1} = -\sigma , \quad B_{n,1} = 0$$

# Vorlesungsinhalte

1. Grenzbedingungen

**2. Reflexion und Brechung ebener Wellen**

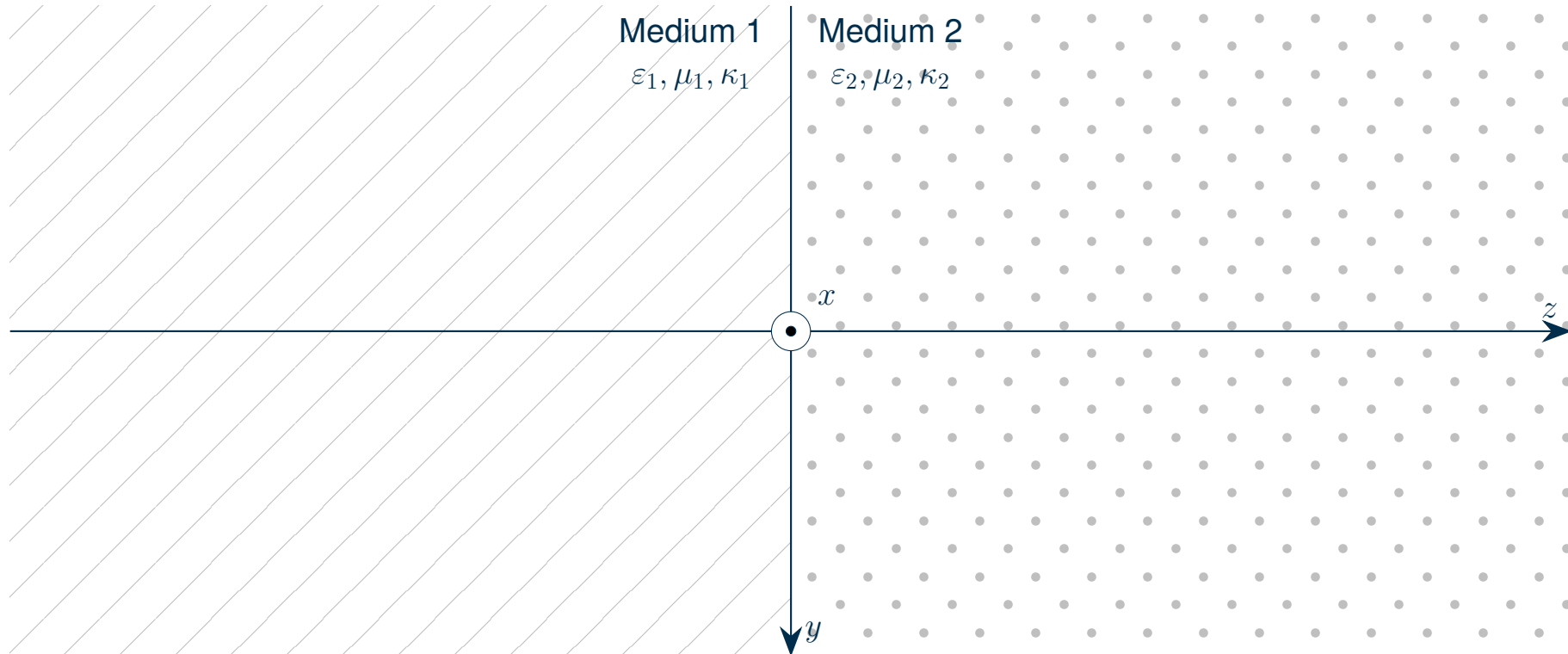
3. Fresnelsche Formeln

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

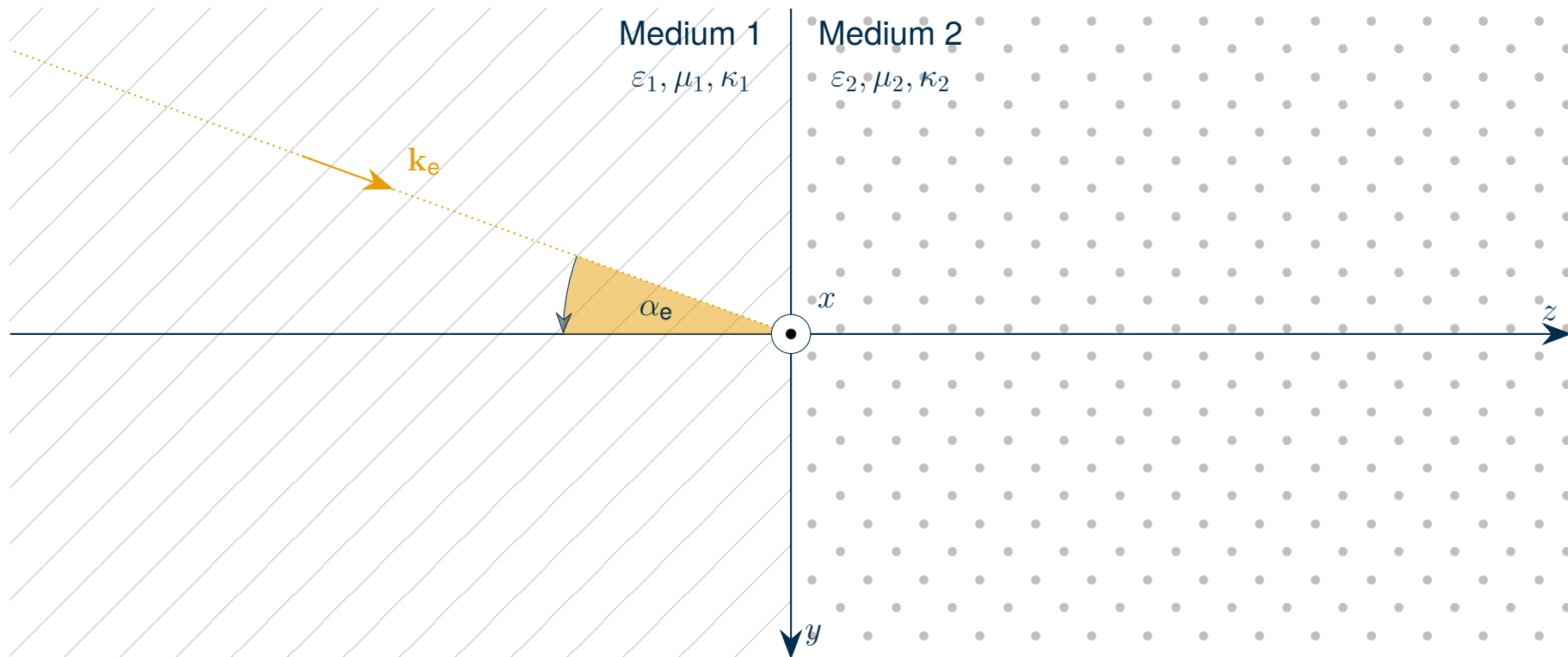
# Problemstellung: Wellenausbreitung an Grenzflächen

- Wir betrachten eine einfallende Welle (**e**), die sich an der in der  $xy$ -Ebene liegenden Grenzfläche zweier Medien in eine reflektierte Welle (**r**) und eine transmittierte gebrochene Welle (**t**) aufteilt.
- Beide Medien seien homogen, isotrop und verlustfrei sowie frei von eingepprägten Raumladungs- oder Stromdichten, d. h.  $\rho = 0$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ .



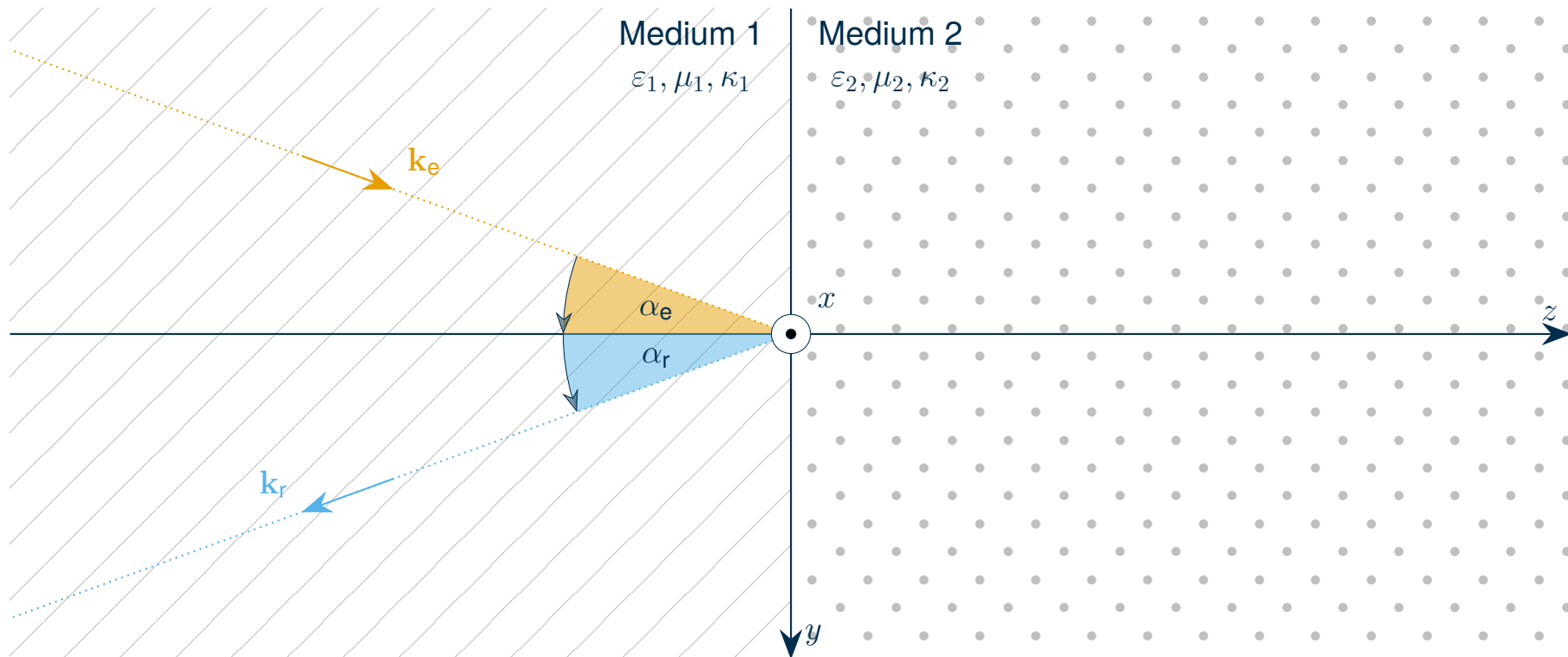
# Problemstellung: Wellenausbreitung an Grenzflächen

- Wir betrachten eine einfallende Welle (**e**), die sich an der in der  $xy$ -Ebene liegenden Grenzfläche zweier Medien in eine reflektierte Welle (**r**) und eine transmittierte gebrochene Welle (**t**) aufteilt.
- Beide Medien seien homogen, isotrop und verlustfrei sowie frei von eingepprägten Raumladungs- oder Stromdichten, d. h.  $\rho = 0$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ .



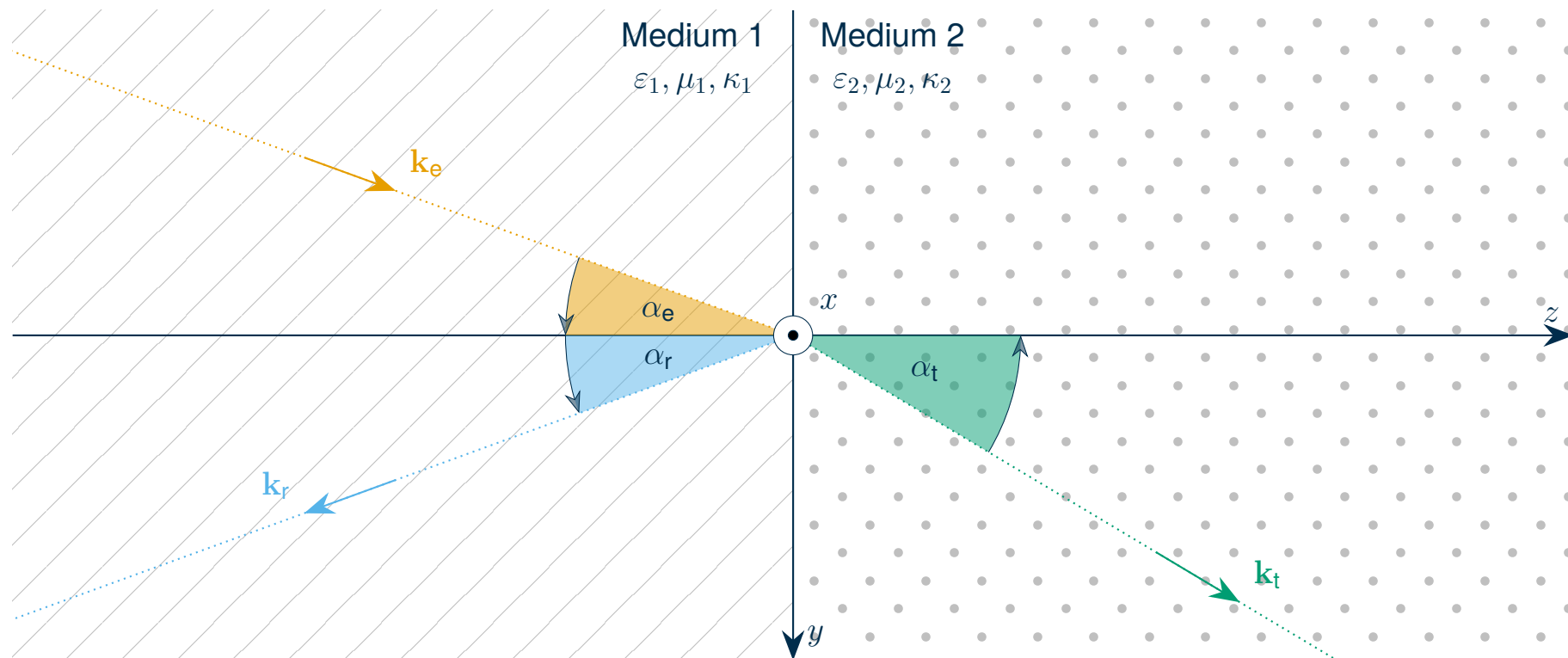
# Problemstellung: Wellenausbreitung an Grenzflächen

- Wir betrachten eine einfallende Welle (**e**), die sich an der in der  $xy$ -Ebene liegenden Grenzfläche zweier Medien in eine reflektierte Welle (**r**) und eine transmittierte gebrochene Welle (**t**) aufteilt.
- Beide Medien seien homogen, isotrop und verlustfrei sowie frei von eingepprägten Raumladungs- oder Stromdichten, d. h.  $\rho = 0$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ .



# Problemstellung: Wellenausbreitung an Grenzflächen

- Wir betrachten eine einfallende Welle (**e**), die sich an der in der  $xy$ -Ebene liegenden Grenzfläche zweier Medien in eine reflektierte Welle (**r**) und eine transmittierte gebrochene Welle (**t**) aufteilt.
- Beide Medien seien homogen, isotrop und verlustfrei sowie frei von eingepprägten Raumladungs- oder Stromdichten, d. h.  $\rho = 0$  und  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ .



# Ansatz für Felder der Teilwellen

- Die drei Teilwellen seien zeitharmonische ebene Wellen der Kreisfrequenz  $\omega$ .
- Da wir beide Medien vereinfachend als verlustfrei annehmen, sind die Wellenzahlen  $k_{1,2}$  reellwertig.
- Dann lauten die Ansätze für die komplexen Zeiger des E- und H-Felds (vgl. Vorlesung 02) der **einfallenden (e)**, **reflektierten (r)** und **transmittierten (t)** Welle

$$\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,e} \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}))$$

$$\underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,r} \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}))$$

$$\underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,t} \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}))$$

$$\underline{\mathbf{H}}_e(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{Z_1} [\mathbf{e}_{k,e} \times \underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t)]$$

$$\underline{\mathbf{H}}_r(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{Z_1} [\mathbf{e}_{k,r} \times \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t)]$$

$$\underline{\mathbf{H}}_t(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{Z_2} [\mathbf{e}_{k,t} \times \underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}, t)]$$

- Dabei sei die einfallende Welle mit dem Amplitudenvektor  $\underline{\mathbf{E}}_{0,e}$  und dem Wellenvektor  $\mathbf{k}_e = k_1 \mathbf{e}_{k,e}$  (Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{e}_{k,e} = \mathbf{k}_e/k_1$ ) bekannt.
- Im Folgenden leiten wir die Wellenvektoren und Feldgrößen der reflektierten und transmittierten Welle her.

# Wellenvektoren in der Einfallsebene

- Bei fester Kreisfrequenz  $\omega$  sind die Medien charakterisiert durch ihre Wellenzahl  $k_{1,2}$  bzw. den Wellenwiderstand  $Z_{1,2}$ .
- In dem gewählten Beispiel (siehe Folie 11) sind die Ausbreitungsrichtungen der Teilwellen gegeben durch die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_{k,e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_e) \\ \cos(\alpha_e) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{k,r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_r) \\ -\cos(\alpha_r) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{k,t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_t) \\ \cos(\alpha_t) \end{pmatrix}.$$

- Für die drei Wellenvektoren erhalten wir somit

$$\mathbf{k}_e = k_1 \mathbf{e}_{k,e}, \quad \mathbf{k}_r = k_1 \mathbf{e}_{k,r} \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_t = k_2 \mathbf{e}_{k,t}.$$

## Definition:

Die sogenannte *Einfallsebene* ist die Ebene, in der die drei Wellenvektoren  $\mathbf{k}_e$ ,  $\mathbf{k}_r$  und  $\mathbf{k}_t$  liegen. In dem betrachteten Beispiel ist die Einfallsebene daher die  $yz$ -Ebene.

# Anwendung der Stetigkeitsbedingungen

- Die Stetigkeitsbedingungen für die tangentialen und die normalen Feldkomponenten müssen *an jedem Punkt*  $\mathbf{r}_0 = (x, y, 0)$  der Grenzfläche in  $z = 0$  und *zu jedem Zeitpunkt*  $t$  erfüllt sein.
- Da die Grenzfläche in der Ebene  $z = 0$  liegt, ist der Normalenvektor durch  $\mathbf{e}_n = \pm \mathbf{e}_z$  gegeben.
- Wir setzen voraus, dass die Grenzfläche frei von idealisierten Oberflächenströmen  $i' = 0$  und Flächenladungsdichten  $\sigma = 0$  ist.
- Dann erhalten wir für die komplexen Zeiger des tangentialen E- und H-Felds

$$\begin{aligned} [\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}_0, t)] \times \mathbf{e}_z &= \underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}_0, t) \times \mathbf{e}_z \\ [\underline{\mathbf{H}}_e(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{H}}_r(\mathbf{r}_0, t)] \times \mathbf{e}_z &= \underline{\mathbf{H}}_t(\mathbf{r}_0, t) \times \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

- Und für die komplexen Zeiger des normalen E- und H-Felds

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 [\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}_0, t)] \cdot \mathbf{e}_z &= \varepsilon_2 \underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{e}_z \\ \mu_1 [\underline{\mathbf{H}}_e(\mathbf{r}_0, t) + \underline{\mathbf{H}}_r(\mathbf{r}_0, t)] \cdot \mathbf{e}_z &= \mu_2 \underline{\mathbf{H}}_t(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

# Reflexionsgesetz

- Damit diese Stetigkeitsbedingungen zu jeder Zeit und an jedem Punkt auf der Grenzfläche erfüllt sein können, müssen alle drei Exponentialterme an der Grenzfläche (hier in  $z = 0$ ) identisch sein.
- Es gilt also

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_0 .$$

- Die erste Bedingung  $\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_0$  ist äquivalent zu

$$k_1 \sin(\alpha_e)y = k_1 \sin(\alpha_r)y ,$$

woraus das *Reflexionsgesetz* („Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“) folgt

$$\alpha_e = \alpha_r .$$

# Snelliussches Brechungsgesetz

- Aus der zweiten Bedingung  $\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_0$  sowie mit  $\alpha_1 = \alpha_e = \alpha_r$  und  $\alpha_2 = \alpha_t$  folgt das *Snelliussche Brechungsgesetz*

$$k_1 \sin(\alpha_1) = k_2 \sin(\alpha_2).$$

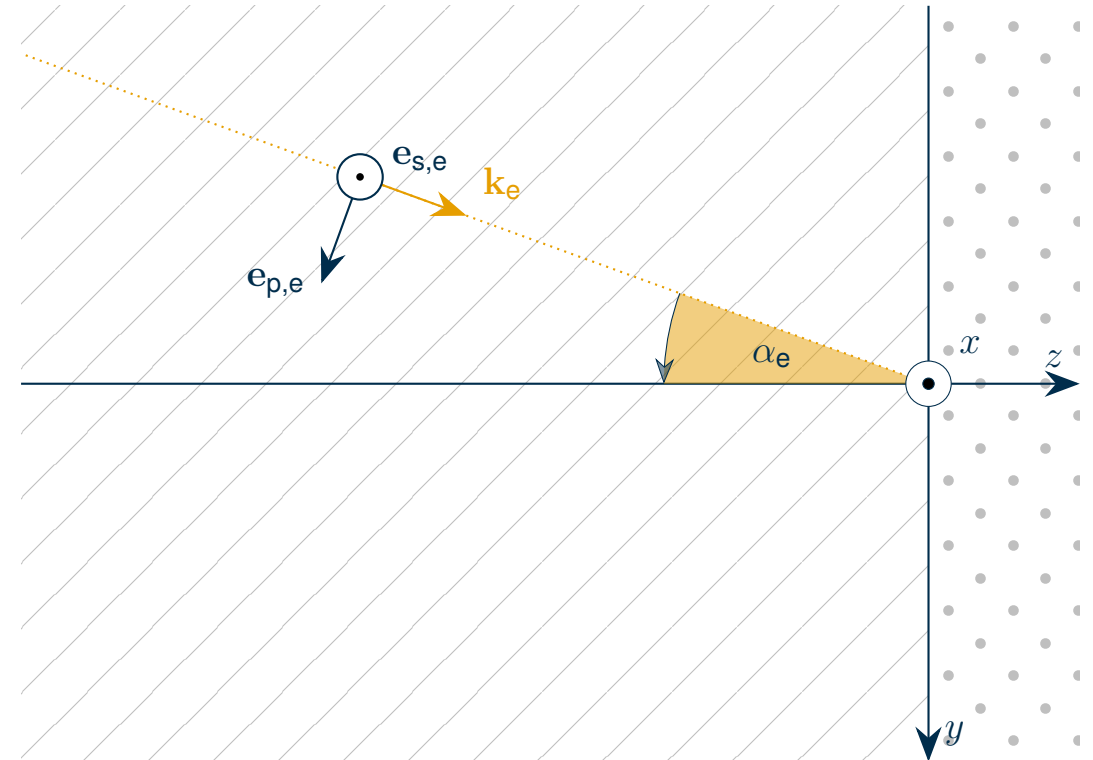
- In dielektrischen Medien mit den Brechzahlen  $n_1$  und  $n_2$  erhalten wir das Brechungsgesetz in der klassischen Form

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2).$$

- Zwar beschreibt das Brechungsgesetz auch die Brechung von Wellen mit komplexwertigen Brech- bzw. Wellenzahlen (s. Anhang Folie 41), auf diesen Fall werden wir hier jedoch nicht näher eingehen.

# Senkrechte und parallele Polarisation (I)

- Mithilfe des Reflexions- und Brechungsgesetzes können wir nun die Wellenvektoren der reflektierten und transmittierten Welle ermitteln.
- Um die zugehörigen Feldamplituden zu erhalten, teilen wir die  $E$ -Felder der drei Teilwellen relativ zur Einfallsebene in zwei orthogonale Anteile auf: die *senkrechte* (s) und die *parallele* (p) Polarisationskomponente.
- Dementsprechend bezeichnen  $e_{s,e}$  bzw.  $e_{p,e}$  in der Abbildung den Einheitsvektor in Richtung der senkrechten bzw. parallelen Komponente der einfallenden Welle.



# Senkrechte und parallele Polarisation (II)

- Für die drei Teilwellen bezeichnen wir die Einheitsvektoren in Richtung der senkrechten bzw. parallelen Polarisationskomponente mit  $\mathbf{e}_{s,i}$  bzw.  $\mathbf{e}_{p,i}$  wobei  $i \in \{e,r,t\}$ .
- Damit ergibt sich für die komplexen Zeiger der zugehörigen E-Felder

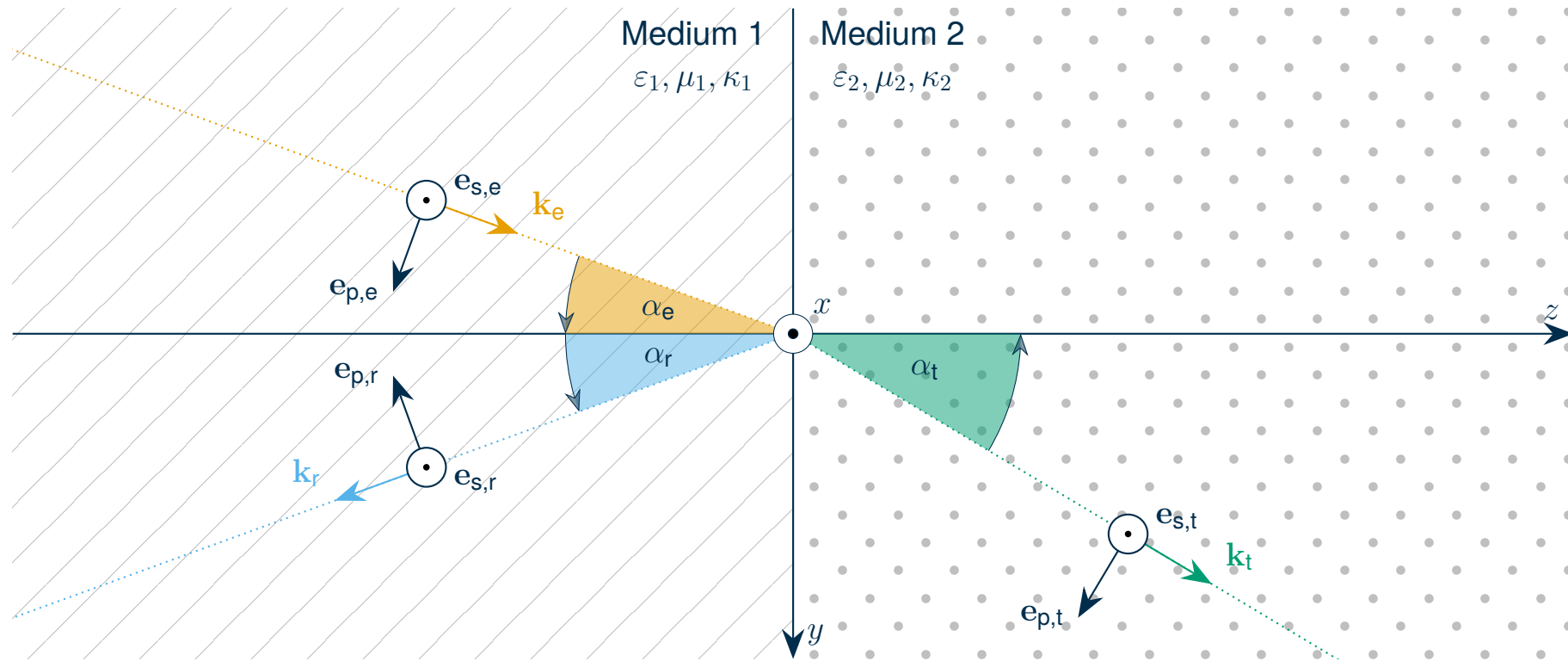
$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t) &= \left[ \underline{E}_{0,e}^{(s)} \mathbf{e}_{s,e} + \underline{E}_{0,e}^{(p)} \mathbf{e}_{p,e} \right] \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})) \\ \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t) &= \left[ \underline{E}_{0,r}^{(s)} \mathbf{e}_{s,r} + \underline{E}_{0,r}^{(p)} \mathbf{e}_{p,r} \right] \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})) \\ \underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}, t) &= \left[ \underline{E}_{0,t}^{(s)} \mathbf{e}_{s,t} + \underline{E}_{0,t}^{(p)} \mathbf{e}_{p,t} \right] \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}))\end{aligned}$$

- Die beiden Polarisationskomponenten bilden ein Rechtsschraubensystem mit der Richtung des Wellenvektors, d. h. es gilt

$$\mathbf{e}_{k,i} \times \mathbf{e}_{s,i} = \mathbf{e}_{p,i}.$$

# Senkrechte und parallele Polarisation: Beispiel (I)

- Die drei Feldvektoren lassen sich stets - relativ zur Einfallsebene (hier die  $yz$ -Ebene) - in senkrechte (s) und parallele (p) Polarisationsanteile aufspalten.



# Senkrechte und parallele Polarisation: Beispiel (II)

- Für die hier betrachteten ebenen Wellen erhalten wir somit mit  $i \in \{e,r,t\}$  (vgl. Abbildung auf Folie 19)

$$\mathbf{e}_{s,i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{p,e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha_1) \\ -\sin(\alpha_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{p,r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha_1) \\ -\sin(\alpha_1) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{p,t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha_2) \\ -\sin(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

- Mit den Ausdrücken für die komplexen Amplituden der elektrischen Feldvektoren auf Folie 18 ergibt sich für die magnetischen Felder

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}}_e(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{Z_1} \left[ \underline{E}_{0,e}^{(s)} \mathbf{e}_{p,e} - \underline{E}_{0,e}^{(p)} \mathbf{e}_{s,e} \right] \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})) \\ \underline{\mathbf{H}}_r(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{Z_1} \left[ \underline{E}_{0,r}^{(s)} \mathbf{e}_{p,r} - \underline{E}_{0,r}^{(p)} \mathbf{e}_{s,r} \right] \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})) \\ \underline{\mathbf{H}}_t(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{Z_2} \left[ \underline{E}_{0,t}^{(s)} \mathbf{e}_{p,t} - \underline{E}_{0,t}^{(p)} \mathbf{e}_{s,t} \right] \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})) \end{aligned}$$

# Vorlesungsinhalte

1. Grenzbedingungen

2. Reflexion und Brechung ebener Wellen

**3. Fresnelsche Formeln**

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

# Fresnelsche Formeln: Senkrechte Polarisation (I)

- Um den Zusammenhang der Feldamplituden der einfallenden, reflektierten und transmittierten Welle zu ermitteln, konzentrieren wir uns zunächst auf den senkrecht polarisierten Anteil der E-Felder.
- Durch das Reflexionsgesetz und das Snelliussche Brechungsgesetz ist bereits sichergestellt, dass die zeitliche und die räumliche Abhängigkeit der drei ebenen Wellen auf der Grenzfläche identisch ist.
- Da das senkrecht polarisierte elektrische Feld stets tangential zur Grenzfläche orientiert ist, also hier im Beispiel nur eine  $x$ -Komponente besitzt, gilt aufgrund der Stetigkeit des tangentialen E-Felds

$$\underline{E}_{0,e}^{(s)} + \underline{E}_{0,r}^{(s)} = \underline{E}_{0,t}^{(s)}.$$

- Die zugehörigen magnetischen Feldkomponenten, die mit dem senkrecht polarisierten elektrischen Feld verkoppelt sind, weisen im Allgemeinen sowohl tangentiale als auch normale Anteile gegenüber der Grenzfläche auf.

# Fresnelsche Formeln: Senkrechte Polarisation (II)

- Die tangentialen Komponenten des magnetischen Felds ergeben sich dabei aus der Projektion

$$\begin{aligned}\underline{H}_{y,0,e} &= \frac{1}{Z_1} \underline{E}_{0,e}^{(s)} \mathbf{e}_{p,e} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{1}{Z_1} \cos(\alpha_1) \underline{E}_{0,e}^{(s)} \\ \underline{H}_{y,0,r} &= \frac{1}{Z_1} \underline{E}_{0,r}^{(s)} \mathbf{e}_{p,r} \cdot \mathbf{e}_y = -\frac{1}{Z_1} \cos(\alpha_1) \underline{E}_{0,r}^{(s)} \\ \underline{H}_{y,0,t} &= \frac{1}{Z_2} \underline{E}_{0,t}^{(s)} \mathbf{e}_{p,t} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{1}{Z_2} \cos(\alpha_2) \underline{E}_{0,t}^{(s)}\end{aligned}$$

- Aus der Stetigkeitsbedingung für das tangentielle H-Feld erhalten wir damit

$$\frac{1}{Z_1} \cos(\alpha_1) \underline{E}_{0,e}^{(s)} - \frac{1}{Z_1} \cos(\alpha_1) \underline{E}_{0,r}^{(s)} = \frac{1}{Z_2} \cos(\alpha_2) \underline{E}_{0,t}^{(s)}.$$

- Wir definieren den *Reflexionsfaktor*  $\underline{r}_s$  und den *Transmissionsfaktor*  $\underline{t}_s$  (für senkrechte Polarisation) als

$$\underline{r}_s = \frac{\underline{E}_{0,r}^{(s)}}{\underline{E}_{0,e}^{(s)}} \quad \text{und} \quad \underline{t}_s = \frac{\underline{E}_{0,t}^{(s)}}{\underline{E}_{0,e}^{(s)}}$$

# Fresnelsche Formeln: Senkrechte Polarisation (III)

- So erhalten wir aus den obigen Gleichungen

$$1 + \underline{r}_s = \underline{t}_s \quad \text{und} \quad Z_2 \cos(\alpha_1)(1 - \underline{r}_s) = Z_1 \cos(\alpha_2)\underline{t}_s$$

- Nach gegenseitigem Einsetzen erhalten wir daraus die *Fresnelschen Formeln* für senkrechte Polarisation

$$\underline{r}_s = \frac{Z_2 \cos(\alpha_1) - Z_1 \cos(\alpha_2)}{Z_2 \cos(\alpha_1) + Z_1 \cos(\alpha_2)} \quad \text{und} \quad \underline{t}_s = \frac{2Z_2 \cos(\alpha_1)}{Z_2 \cos(\alpha_1) + Z_1 \cos(\alpha_2)}$$

# Fresnelsche Formeln: Parallele Polarisation (I)

- Nachdem wir die Beziehungen zwischen den Amplituden der drei Teilwellen für den senkrecht polarisierten Wellenanteil hergeleitet haben, betrachten wir nun den parallel polarisierten Anteil.
- Im Allgemeinen weist das E-Feld hier Anteile sowohl tangential als auch normal zur Grenzfläche auf.
- Wir betrachten nun den tangentialen Anteil, indem wir die elektrischen Feldvektoren auf die Grenzfläche projizieren, gemäß

$$\begin{aligned}\underline{E}_{y,0,e} &= \underline{E}_{0,e}^{(p)} \mathbf{e}_{p,e} \cdot \mathbf{e}_y = \underline{E}_{0,e}^{(p)} \cos(\alpha_1) \\ \underline{E}_{y,0,r} &= \underline{E}_{0,r}^{(p)} \mathbf{e}_{p,r} \cdot \mathbf{e}_y = -\underline{E}_{0,r}^{(p)} \cos(\alpha_1) \\ \underline{E}_{y,0,t} &= \underline{E}_{0,t}^{(p)} \mathbf{e}_{p,t} \cdot \mathbf{e}_y = \underline{E}_{0,t}^{(p)} \cos(\alpha_2)\end{aligned}$$

- Aus der Stetigkeit des tangentialen E-Felds folgt damit

$$\underline{E}_{0,e}^{(p)} \cos(\alpha_1) - \underline{E}_{0,r}^{(p)} \cos(\alpha_1) = \underline{E}_{0,t}^{(p)} \cos(\alpha_2).$$

- Der H-Feldvektor der parallel polarisierten Welle ist hingegen stets parallel zur Grenzfläche orientiert.

# Fresnelsche Formeln: Parallele Polarisation (II)

- Für die entsprechenden Komponenten des magnetischen Feldes gilt

$$\begin{aligned}\underline{H}_{x,0,e} &= -\frac{1}{Z_1} \underline{E}_{0,e}^{(p)} \\ \underline{H}_{x,0,r} &= -\frac{1}{Z_1} \underline{E}_{0,r}^{(p)} \\ \underline{H}_{x,0,t} &= -\frac{1}{Z_2} \underline{E}_{0,t}^{(p)}\end{aligned}$$

- Aus der Stetigkeit des tangentialen H-Felds folgt dann

$$\frac{1}{Z_1} \underline{E}_{0,e}^{(p)} + \frac{1}{Z_1} \underline{E}_{0,r}^{(p)} = \frac{1}{Z_2} \underline{E}_{0,t}^{(p)}.$$

- Wir definieren den *Reflexionsfaktor*  $\underline{r}_p$  und den *Transmissionsfaktor*  $\underline{t}_p$  (für parallele Polarisation) als

$$\underline{r}_p = \frac{\underline{E}_{0,r}^{(p)}}{\underline{E}_{0,e}^{(p)}} \quad \text{und} \quad \underline{t}_p = \frac{\underline{E}_{0,t}^{(p)}}{\underline{E}_{0,e}^{(p)}}$$

# Fresnelsche Formeln: Parallele Polarisation (III)

- Damit erhalten wir aus den obigen Gleichungen

$$(1 - \underline{r}_p) \cos(\alpha_1) = \underline{t}_p \cos(\alpha_2) \quad \text{und} \quad (1 + \underline{r}_p) = \frac{Z_1}{Z_2} \underline{t}_p$$

- Nach gegenseitigem Einsetzen folgen daraus die Fresnelschen Formeln für parallele Polarisation

$$\underline{r}_p = \frac{Z_1 \cos(\alpha_1) - Z_2 \cos(\alpha_2)}{Z_1 \cos(\alpha_1) + Z_2 \cos(\alpha_2)} \quad \text{und} \quad \underline{t}_p = \frac{2Z_2 \cos(\alpha_1)}{Z_1 \cos(\alpha_1) + Z_2 \cos(\alpha_2)} .$$

# Fresnelsche Formeln für nichtleitende Medien

- Für den Fall von nichtleitenden Medien ( $\kappa = 0$ ), welche häufig durch ihre Brechzahl  $n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$  charakterisiert werden, gilt für den Wellenwiderstand

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = \frac{Z_0 \mu_r}{n}$$

- Werden beide Medien der Grenzfläche als nichtleitend betrachtet, so lassen sich die Reflexions- und Transmissionsfaktoren schreiben als

$$\underline{r}_s = \frac{n_1 \cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{t}_s = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)}$$

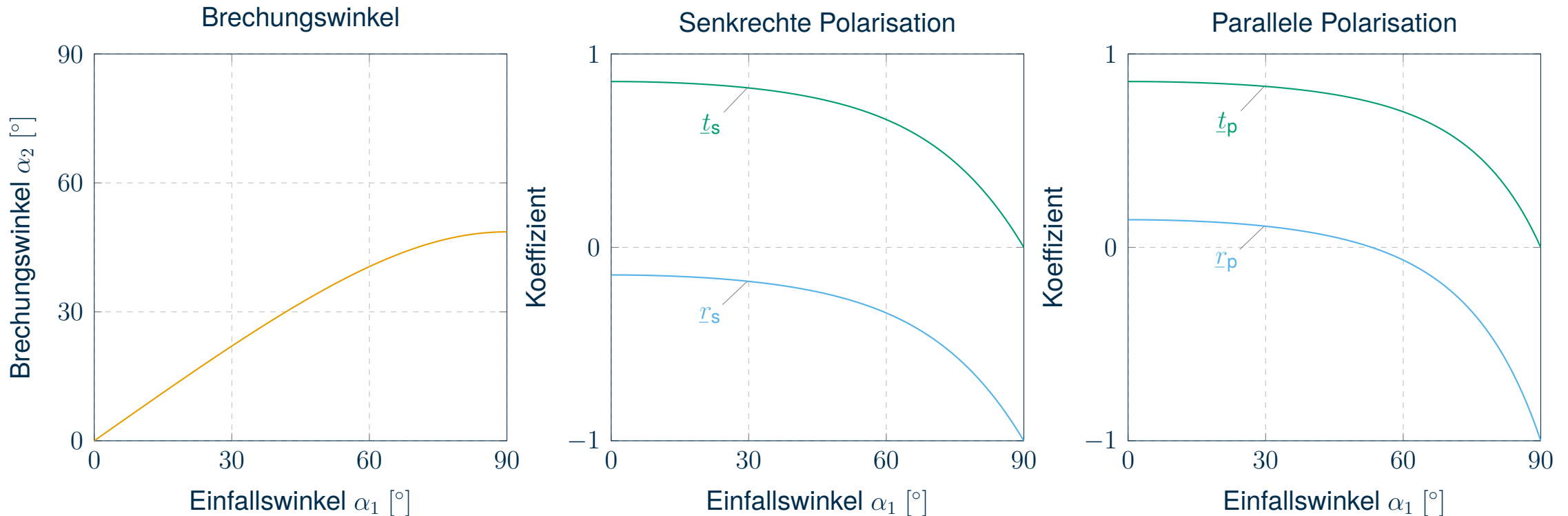
$$\underline{r}_p = \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - n_1 \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{t}_p = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)}$$

- Im Allgemeinen sind  $\underline{r}_{s,p}$  und  $\underline{t}_{s,p}$  auch für verlustfreie Medien mit reellwertigen Wellenwiderständen bzw. Brechzahlen komplexwertig, da der Transmissionswinkel  $\alpha_2$  komplexwertig werden kann (vgl. Folie 32).

# Fresnelsche Formeln: Beispiel A

- Für den Übergang von Vakuum  $n_1 = 1$  zu Wasser  $n_2 = 1,333$  ergibt sich aus dem Brechungsgesetz und den Fresnelschen Formeln das unten dargestellte Verhalten.

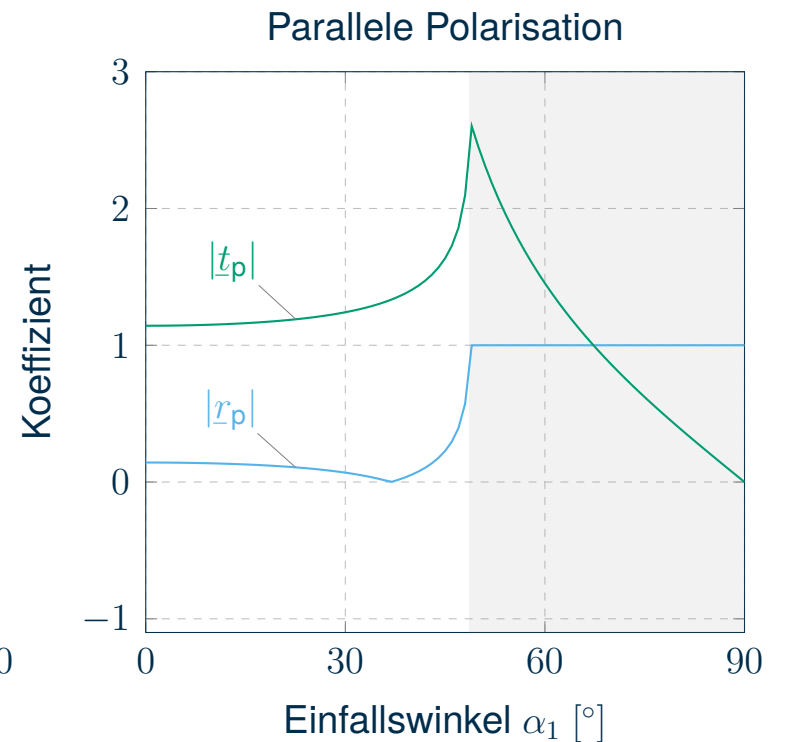
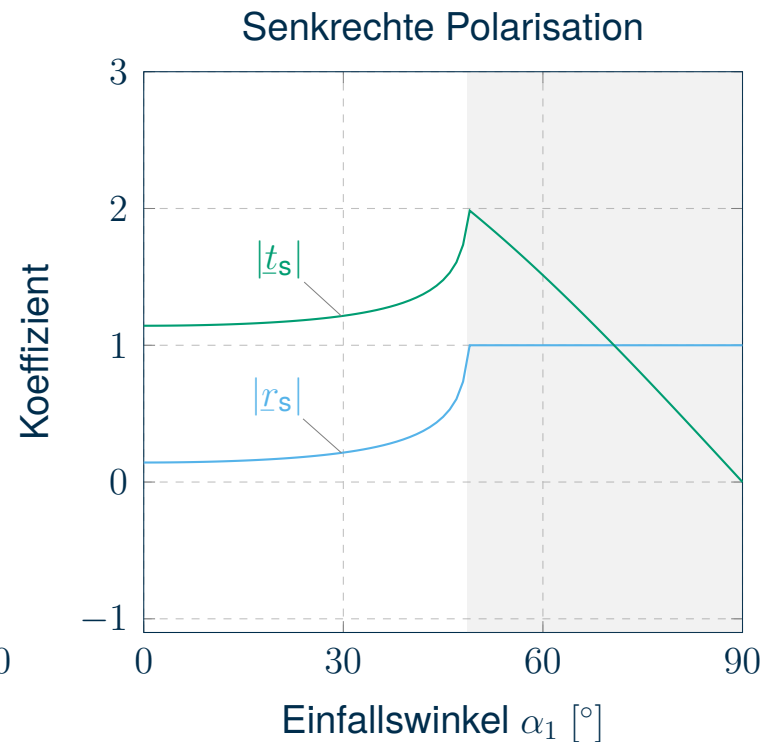
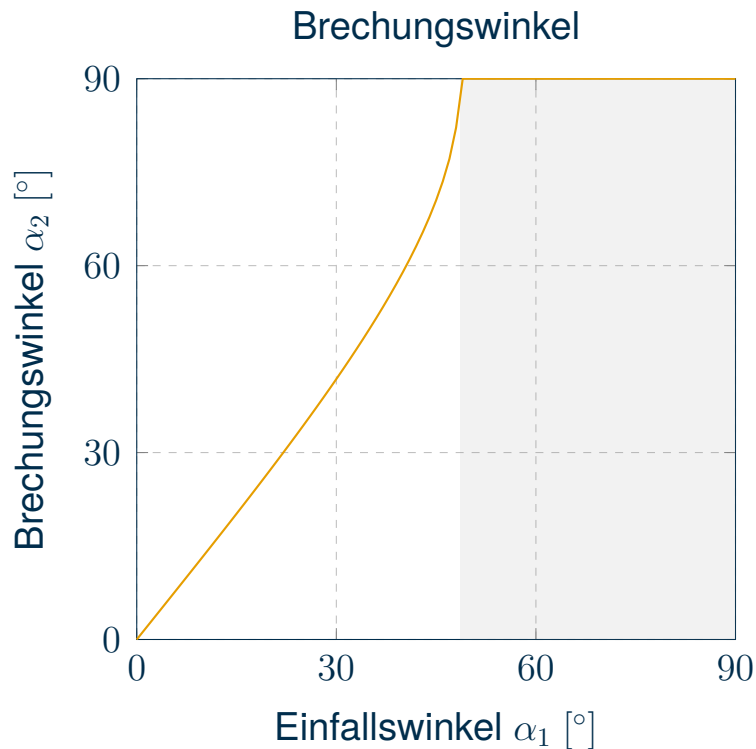


# Fresnelsche Formeln: Beispiel A - Diskussion

- Gemäß dem Snelliusschen Brechungsgesetz gilt wegen  $n_2 > n_1$  stets  $\alpha_2 < \alpha_1$ .
- Demzufolge sind auch die Koeffizienten  $\underline{r}_{s,p}$  bzw.  $\underline{t}_{s,p}$  stets reellwertig, weshalb an der Grenzfläche nur Phasensprünge von  $0^\circ$  oder  $180^\circ$  auftreten können.
- Für den Fall senkrechter Polarisierung ist  $\underline{r}_s$  für alle  $\alpha_1$  kleiner null; das E-Feld der reflektierten Welle weist also eine Phasenverschiebung von  $180^\circ$  gegenüber dem der einlaufenden Welle auf.
- Im Fall paralleler Polarisierung erkennen wir, dass  $\underline{r}_p$  eine Nullstelle aufweist.
- Daher ändert sich das Vorzeichen des Reflexionsfaktors und damit die auch die Phasenverschiebung zwischen einlaufender und reflektierter Welle mit dem Einfallswinkel  $\alpha_1$ .
- Auf die erwähnte Nullstelle gehen wir auf Folie 36 näher ein.
- Auffällig ist, dass auch bei  $\underline{r}_p = 0$  der Transmissionskoeffizient  $\underline{t}_p < 1$  ist, was jedoch nicht bedeutet, dass Leistung an der Grenzfläche verloren geht!
- Begründung: Die parallel polarisierte Welle weist elektrische Feldkomponenten senkrecht zur Grenzfläche auf.
- Da die Normalkomponenten des E-Felds jedoch nicht stetig sind, ist wegen  $n_2 > n_1$  die E-Feldamplitude in Medium 2 geringer und damit  $\underline{t}_p < 1$ .
- Gleichzeitig nimmt aufgrund der Brechung zum Lot hin der transversale Anteil des E-Feldes zu.

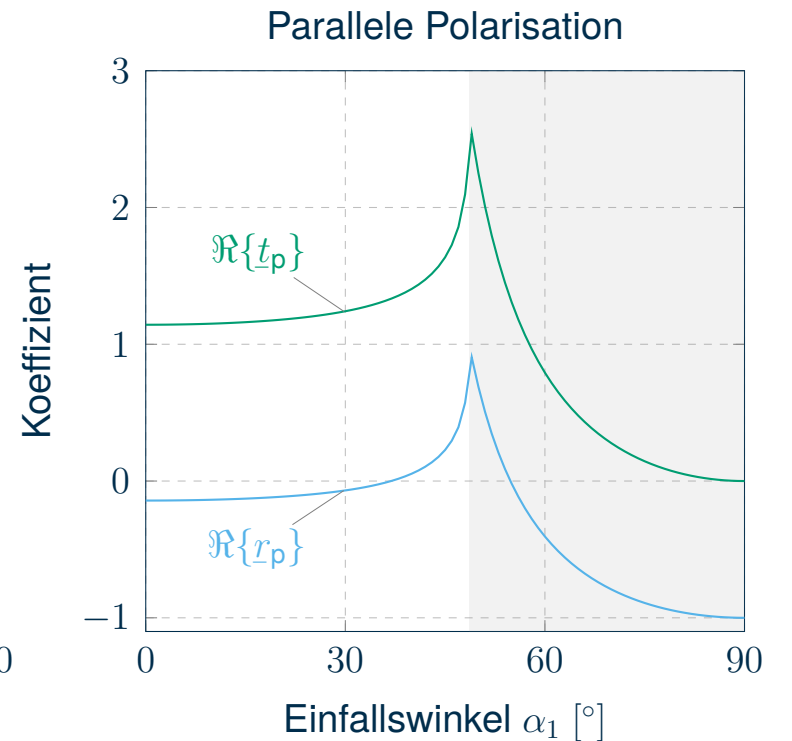
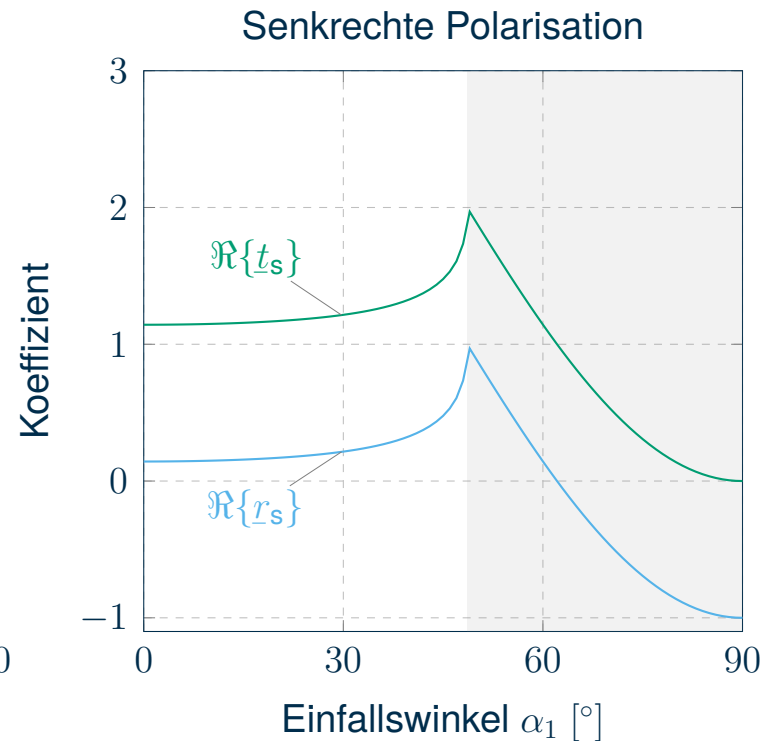
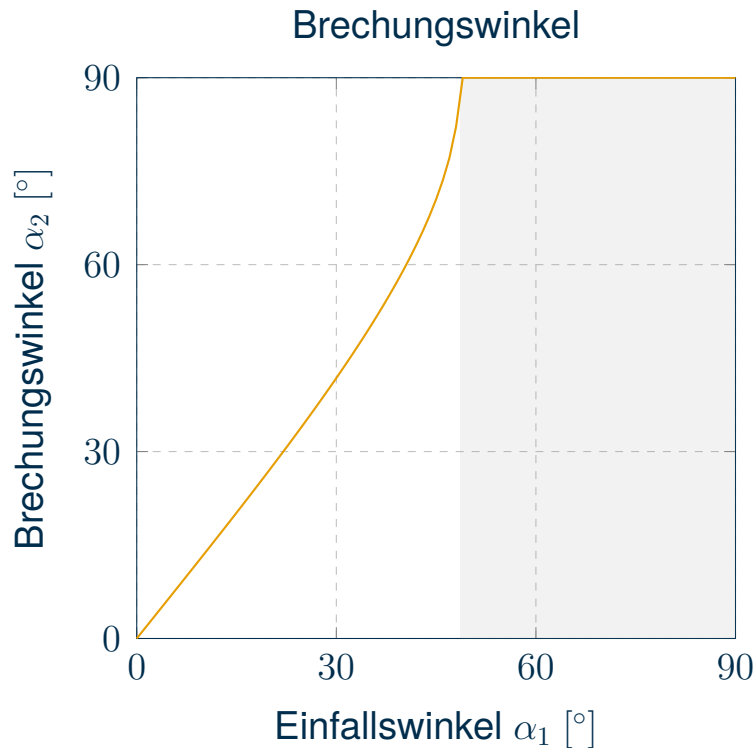
# Fresnelsche Formeln: Beispiel B

- Für den Übergang von Wasser mit  $n_1 = 1,333$  zu Vakuum mit  $n_2 = 1$  ergibt sich:



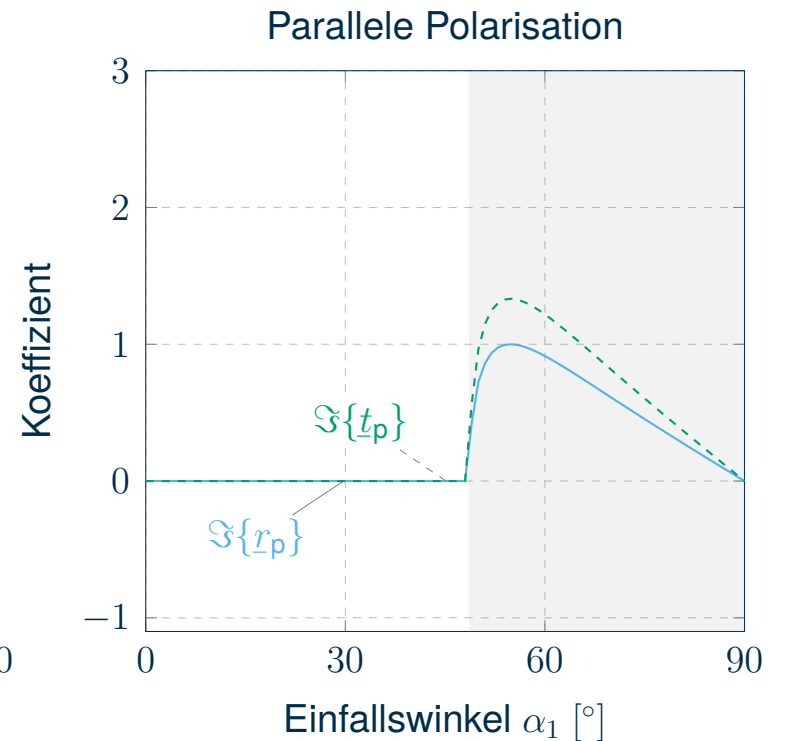
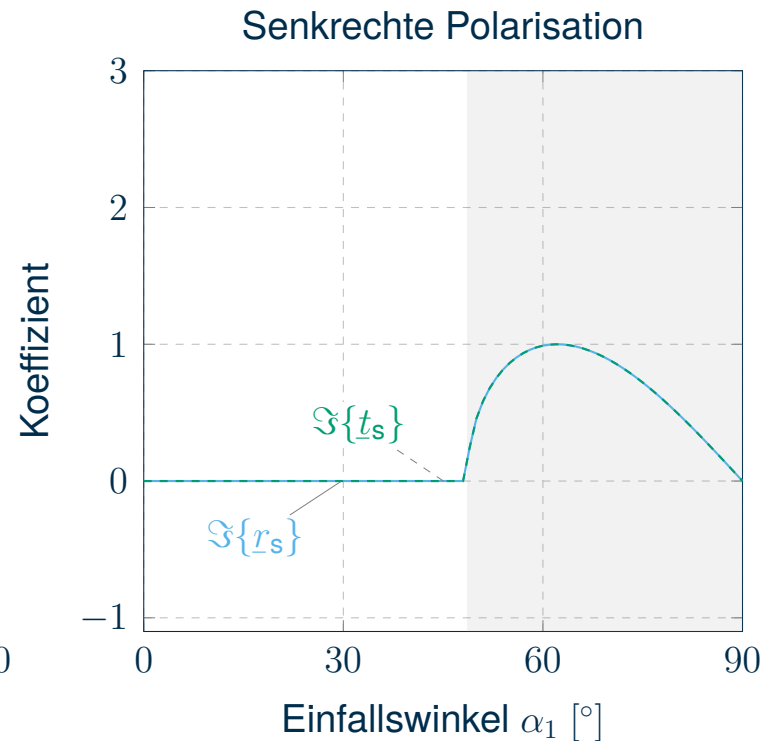
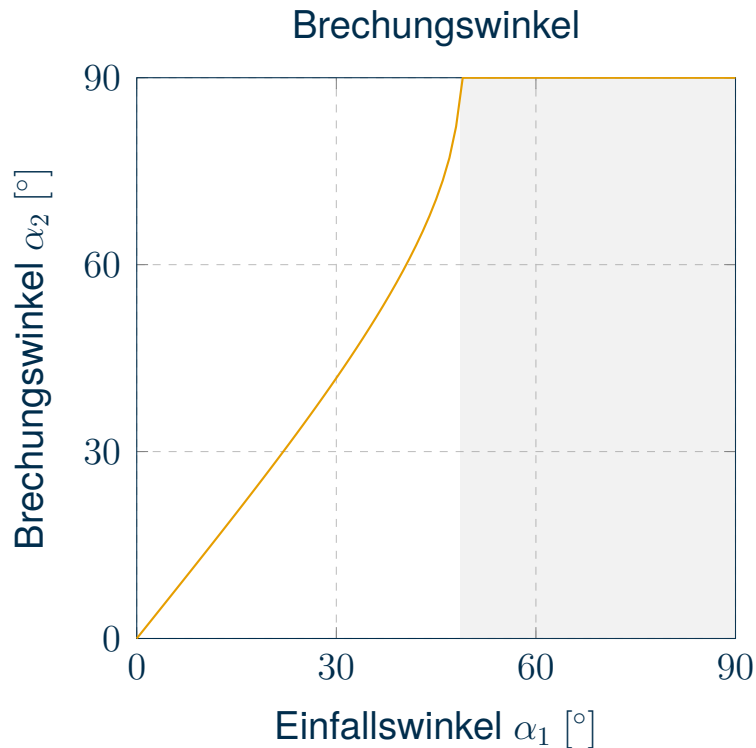
# Fresnelsche Formeln: Beispiel B

- Für den Übergang von Wasser mit  $n_1 = 1,333$  zu Vakuum mit  $n_2 = 1$  ergibt sich:



# Fresnelsche Formeln: Beispiel B

- Für den Übergang von Wasser mit  $n_1 = 1,333$  zu Vakuum mit  $n_2 = 1$  ergibt sich:



# Fresnelsche Formeln: Beispiel B - Diskussion

- Gemäß dem Snelliusschen Brechungsgesetz gilt wegen  $n_1 > n_2$  stets  $\alpha_2 > \alpha_1$ .
- Offenbar verläuft ab einem gewissen Grenzwinkel die transmittierte Welle parallel zu der Grenzschicht.
- Ab diesem Grenzwinkel werden zudem die Transmissionswinkel und folglich auch die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten komplexwertig.
- Den Abbildungen auf Folie 31 können wir entnehmen, dass der Betrag des Reflexionsfaktors ab einem kritischen Einfallswinkel gegenüber der Grenzflächennormalen  $\alpha_1 = \alpha_{\text{krit}}$  (innerhalb des grau hervorgehobenen Bereichs) gleich eins ist.
- Also wird für diese Winkel die einfallende Welle vollständig reflektiert.
- Der Imaginärteil des Reflexionsfaktors mündet in einer Phasenverschiebung der reflektierten Welle, die vom Einfallswinkel abhängt.
- Aufgrund der Grenzflächenbeziehungen darf auch im Falle der Totalreflexion das Feld hinter der Grenzschicht nicht verschwinden, weshalb der Transmissionskoeffizient  $\underline{t}_{s,p}$  größer als eins werden kann.
- Auf diese Eigenschaft gehen wir auf Folie 34 näher ein.

# Grenzwinkel der Totalreflexion

- Beim Übergang von einem Medium mit höherem Brechungsindex (optisch dichter) zu einem Medium mit geringerem Brechungsindex (optisch dünner), kann folglich für alle Winkel  $\alpha_1 \geq \alpha_{\text{krit}}$  sogenannte *Totalreflexion* auftreten.
- Das Snelliussche Brechungsgesetz lässt sich für  $\alpha_1 = \alpha_{\text{krit}}$  schreiben als

$$\sin(\alpha_2) = \frac{n_1}{n_2} \sin(\alpha_{\text{krit}}) = 1 .$$

- Aus dieser Beziehung können wir den kritischen Winkel  $\alpha_{\text{krit}}$  berechnen und erhalten für den Übergang von Wasser  $n_1 = 1,33$  zu Luft  $n_2 \approx 1$

$$\alpha_{\text{krit}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \approx 48,61^\circ .$$

# Die transmittierte Welle bei Totalreflexion

- Gemäß der Grenzflächenbeziehungen muss das tangentielle E-Feld an der Grenzfläche stetig sein, weshalb auch bei vollständiger Reflexion das transmittierte Feld nicht sprunghaft abfallen kann.
- Diesen Umstand spiegeln auch die Transmissionskoeffizienten wider, die auch bei Totalreflexion i.A. von null verschieden sind.
- Da der tangentielle Anteil des E-Feldes stetig ist, muss auch der tangentielle Anteil der Ausbreitungskonstante (hier  $\underline{k}_y$ ) in beiden Medien identisch sein.
- Es gilt jedoch  $n_2 < n_1$  weshalb die Wellenzahl in Medium 2 kleiner als in Medium 1 ist. Damit dennoch die Stetigkeitsbedingung erfüllt sein kann, muss also der senkrechte Anteil der Ausbreitungskonstante in Medium 2 rein imaginär werden.
- Senkrecht zur Grenzfläche klingt das Feld der transmittierten Welle also exponentiell ab.

# Visualisierung der Totalreflexion

- Für hinreichend große Winkel gegenüber der Grenzfläche von Wasser zu Luft wird das von der Quelle ausgehende Licht an dem Medienübergang reflektiert.

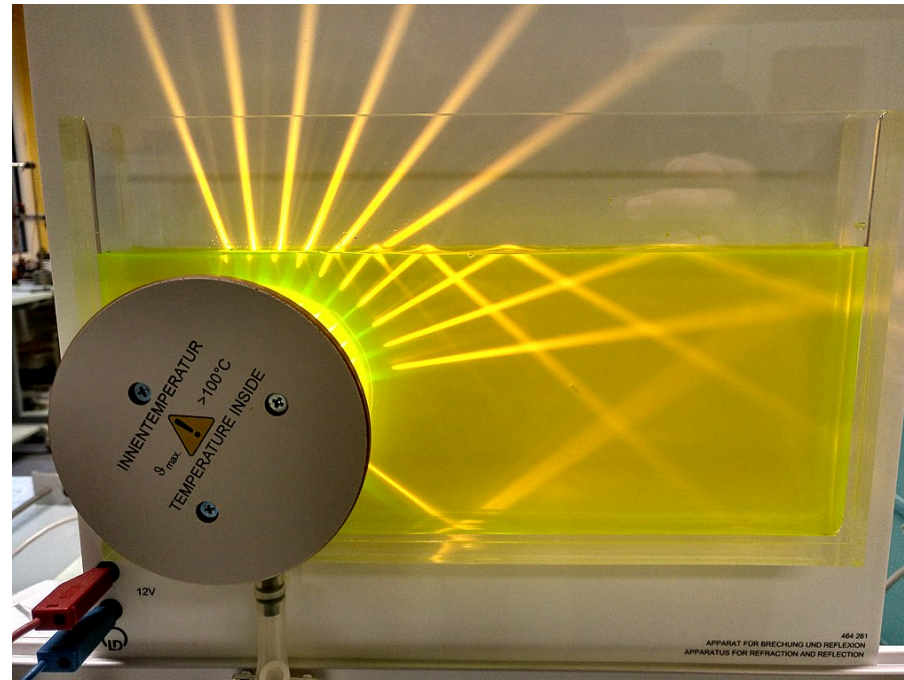


Abbildung: Michael J. Stahl, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons

# Brewsterscher Polarisationswinkel

- Zusammen mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz erhalten wir für  $r_p = 0$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1)} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sin(\alpha_2) \cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1) \cos(\alpha_1)} = \frac{\sin(2\alpha_2)}{\sin(2\alpha_1)} = 1$$

- Diese Gleichung hat die triviale Lösung  $\alpha_2 = \alpha_1$ . Eine weitere Lösung ist  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ . Damit ergibt sich

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_1)} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} = \tan(\alpha_1) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \text{atan}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

- Dieser Winkel  $\alpha_1$  heißt *Brewsterscher Polarisationswinkel* und stellt eine Besonderheit *parallel polarisierter* Wellen dar.
- Von einer beliebig polarisierten Welle, die unter  $\alpha_1$  einfällt, wird also nur die Feldkomponente reflektiert, die senkrecht auf der Einfallsebene steht. Die reflektierte Welle ist senkrecht polarisiert.

# Anwendung in der Fotografie

- Während das einfallende Sonnenlicht unpolarisiert ist, ist das von der Wasseroberfläche unter dem Brewsterschen Polarisationswinkel reflektierte Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert.
- Wird der Polarisationsfilter so ausgerichtet, dass er nur die parallele Polarisation durchlässt, so verschwinden die Reflexionen vollständig.



# Vorlesungsinhalte

1. Grenzbedingungen

2. Reflexion und Brechung ebener Wellen

3. Fresnelsche Formeln

**4. Was Sie gelernt haben sollten**

5. Anhang

# Was Sie gelernt haben sollten

- Welche tangentialen bzw. normalen Feldkomponenten (nicht) stetig sind und wie sich die zugrundeliegenden Beziehungen herleiten lassen.
- Dass wir elektromagnetische (ebene) Wellen an einer Grenzfläche in einen einfallenden, reflektierten und transmittierten Anteil zerlegen können.
- Welche Annahmen bei der Herleitung des Reflexions- und Brechungsgesetzes getroffen wurden.
- Nach welchem Kriterium zwischen senkrechter und paralleler Polarisation unterschieden wird.
- Wie die Polarisation (senkrecht bzw. parallel) den Reflexions- und Transmissionsfaktor beeinflusst.
- Unter welchen Bedingungen Totalreflexion auftreten kann und wie sich dieses Phänomen auf die Wellenausbreitung auswirkt.
- Welche Bedeutung der Brewsterwinkel hat.

# Vorlesungsinhalte

1. Grenzbedingungen

2. Reflexion und Brechung ebener Wellen

3. Fresnelsche Formeln

4. Was Sie gelernt haben sollten

**5. Anhang**

# Brechungsgesetz für komplexwertige Wellenzahlen

- Betrachten wir noch einmal die allgemeine Form des Snelliusschen Brechungsgesetzes

$$\underline{k}_1 \sin(\alpha_1) = \underline{k}_2 \sin(\alpha_2).$$

- Sofern  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  reellwertige Winkel aus dem Intervall  $[0, \pi/2]$  sind, lässt sich das Brechungsgesetz nur anwenden, wenn das Verhältnis  $\underline{k}_2/\underline{k}_1$  reellwertig ist.
- Ferner muss in diesem Fall gelten, dass

$$\sin(\alpha_1) = \frac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1} \sin(\alpha_2) \in [-1, 1] \quad \text{und} \quad \sin(\alpha_2) = \frac{\underline{k}_1}{\underline{k}_2} \sin(\alpha_1) \in [-1, 1]$$

- Im Übrigen kann die Sinusfunktion auch für komplexwertige Argumente  $\underline{\gamma} = \gamma_{\text{re}} + j \gamma_{\text{im}}$  definiert werden

$$\sin(\underline{\gamma}) = \frac{1}{j2} \left( \exp(j\underline{\gamma}) - \exp(-j\underline{\gamma}) \right) = \sin(\gamma_{\text{re}}) \cosh(\gamma_{\text{im}}) + j \cos(\gamma_{\text{re}}) \sinh(\gamma_{\text{im}}).$$

- Mit dieser Definition können wir das Brechungsgesetz auch für beliebige (komplexe) Wellenzahlen  $\underline{k}_1$  und  $\underline{k}_2$  anwenden.