

EMFW Vorlesung 07: Beugung

Wintersemester 2025/26

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 21. Januar 2026

Vorlesungsinhalte

1. Beugung & Huygenssches Prinzip

2. Mathematische Formulierung des Huygensschen Prinzips

3. Fresnel- und Fraunhofer-Näherung

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

Greensche Funktionen: Bedeutung

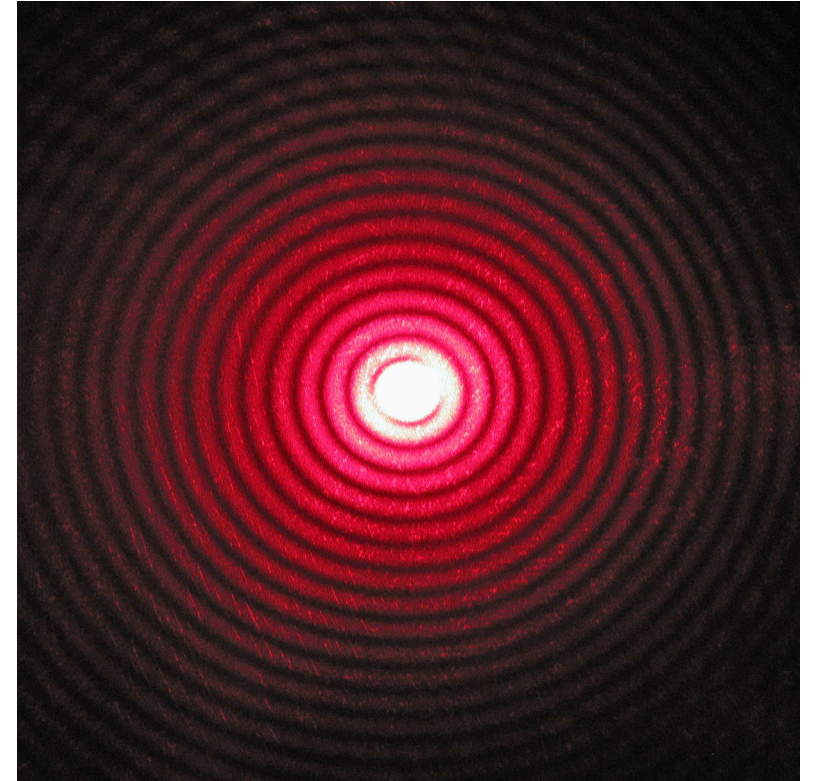
Dirac-Impuls

Beugung einer Kugelwelle

Literatur

Einleitung & Motivation

- In der vorangegangenen Vorlesung haben wir das Verhalten ebener Wellen an unendlich ausgedehnten Grenzflächen analysiert.
- Wir haben festgestellt, dass Wellen an diesen Grenzschichten im Allgemeinen sowohl reflektiert als auch transmittiert und dabei gebrochen werden.
- Bislang basierten unsere Betrachtungen auf der Idealisierung unendlich ausgedehnter Wellenfronten und Grenzflächen.
- In dieser Vorlesung untersuchen wir nun die Wechselwirkung einer einfallenden Welle mit einer begrenzten Öffnung oder Lochblende, die wir als Apertur bezeichnen.
- Infolge dieses Hindernisses wird die Welle *gebeugt*.



Beugungsmuster von rotem Laserlicht hinter einer kreisförmigen Lochblende. Quelle: Wisky, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons.

Vorlesungsinhalte

1. Beugung & Huygenssches Prinzip

2. Mathematische Formulierung des Huygensschen Prinzips

3. Fresnel- und Fraunhofer-Näherung

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

Greensche Funktionen: Bedeutung

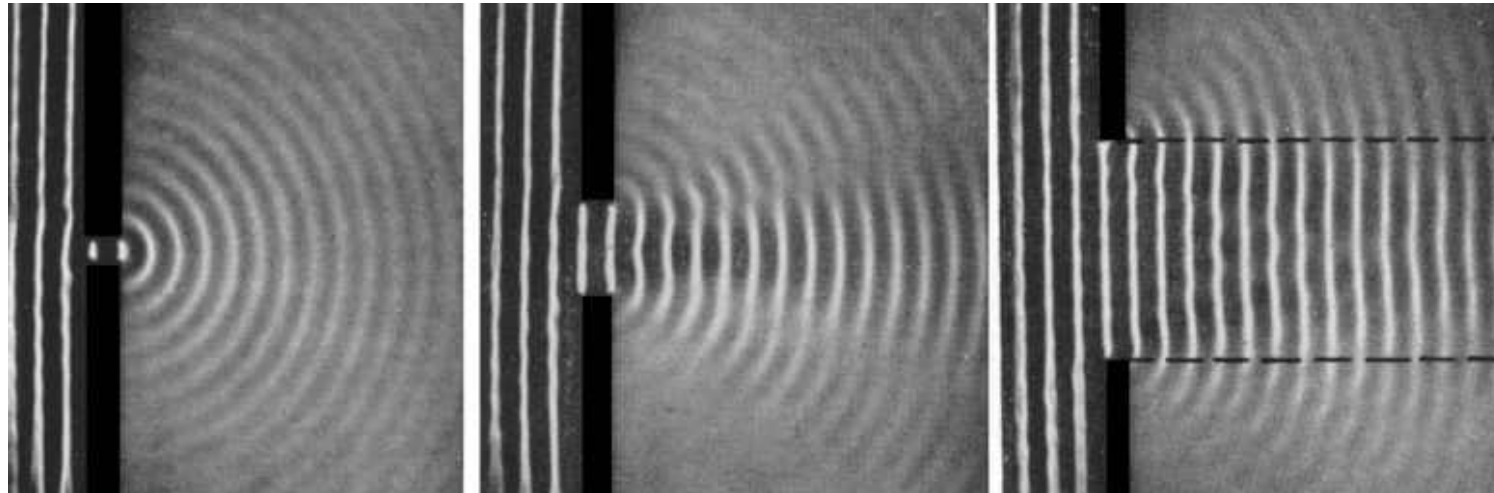
Dirac-Impuls

Beugung einer Kugelwelle

Literatur

Beugung

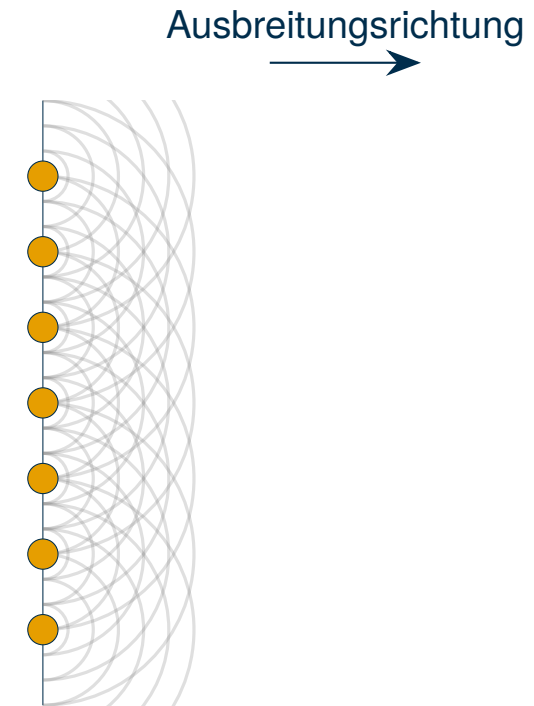
- Die *Beugung* bezeichnet die Ablenkung einer Welle an einem Hindernis.
- Infolge der Beugung kann sich eine Welle in Raumbereiche ausbreiten, die auf geradem Weg durch das Hindernis versperrt wären.
- Dieses Phänomen lässt sich experimentell leicht mithilfe von Wasserwellen zeigen, die sich mit ebener Wellenfront in einem Becken ausbreiten und auf einen Spalt einstellbarer Breite treffen.



Quelle: *Wellenwanne* | *LEIF/physik* [1].

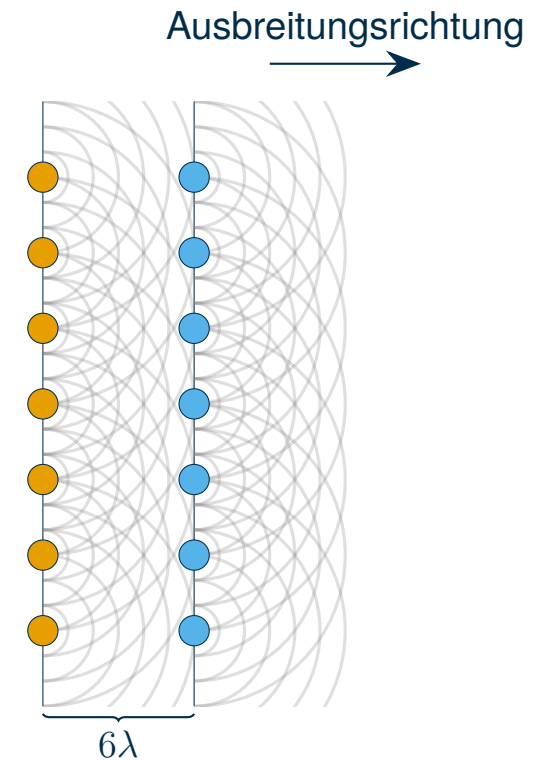
Huygenssches Prinzip

- Das *Huygenssche Prinzip* besagt, dass jeder Punkt einer bestehenden Wellenfront als Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle betrachtet werden kann.
- Im dreidimensionalen Raum entsprechen diese Elementarwellen sogenannten *Kugelwellen*, wobei nur der „vorwärtslaufende“ Anteil berücksichtigt wird.
- Die neue Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt ergibt sich konstruktiv aus der Einhüllenden (Superposition) aller dieser Elementarwellen.
- Mit diesem anschaulichen Modell lässt sich erklären, warum Wellenanteile auch in den geometrischen Schattenraum einer Blende eindringen.
- Daher verwenden wir das Huygenssche Prinzip, um das Phänomen der Beugung zu beschreiben.



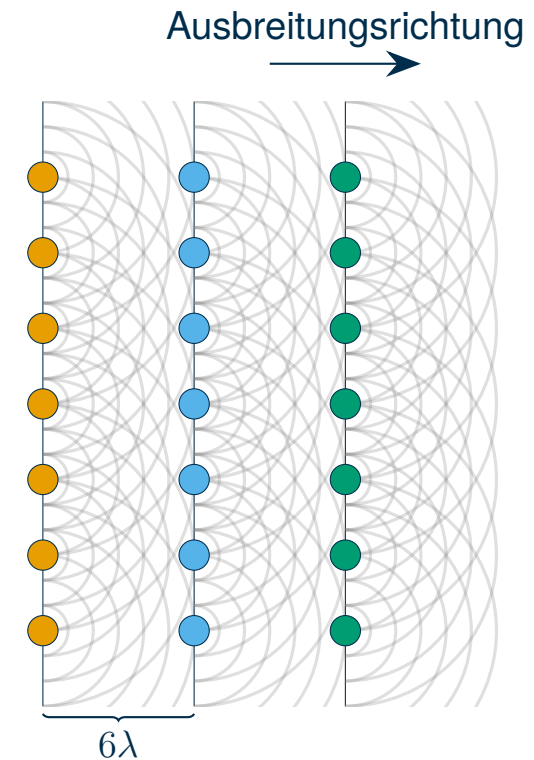
Huygenssches Prinzip

- Das *Huygenssche Prinzip* besagt, dass jeder Punkt einer bestehenden Wellenfront als Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle betrachtet werden kann.
- Im dreidimensionalen Raum entsprechen diese Elementarwellen sogenannten *Kugelwellen*, wobei nur der „vorwärtslaufende“ Anteil berücksichtigt wird.
- Die neue Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt ergibt sich konstruktiv aus der Einhüllenden (Superposition) aller dieser Elementarwellen.
- Mit diesem anschaulichen Modell lässt sich erklären, warum Wellenanteile auch in den geometrischen Schattenraum einer Blende eindringen.
- Daher verwenden wir das Huygenssche Prinzip, um das Phänomen der Beugung zu beschreiben.



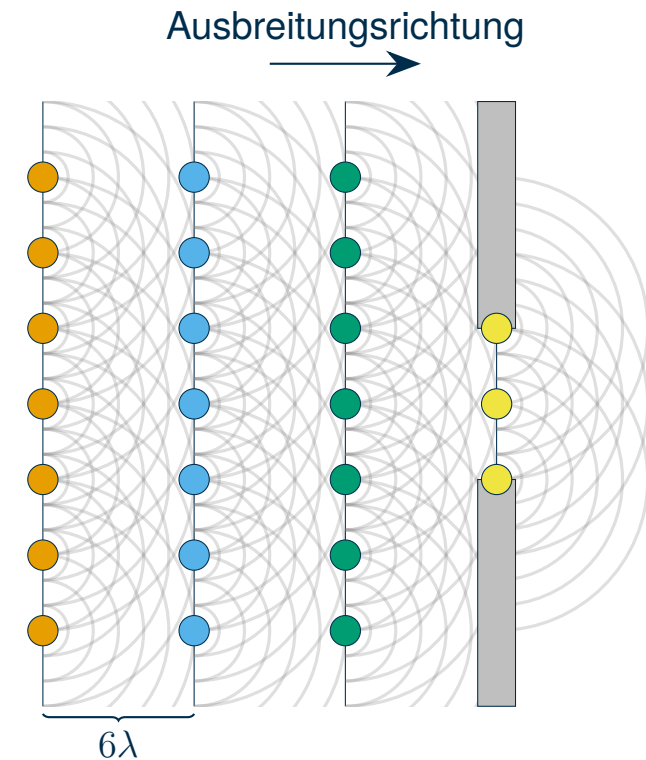
Huygenssches Prinzip

- Das *Huygenssche Prinzip* besagt, dass jeder Punkt einer bestehenden Wellenfront als Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle betrachtet werden kann.
- Im dreidimensionalen Raum entsprechen diese Elementarwellen sogenannten *Kugelwellen*, wobei nur der „vorwärtslaufende“ Anteil berücksichtigt wird.
- Die neue Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt ergibt sich konstruktiv aus der Einhüllenden (Superposition) aller dieser Elementarwellen.
- Mit diesem anschaulichen Modell lässt sich erklären, warum Wellenanteile auch in den geometrischen Schattenraum einer Blende eindringen.
- Daher verwenden wir das Huygenssche Prinzip, um das Phänomen der Beugung zu beschreiben.



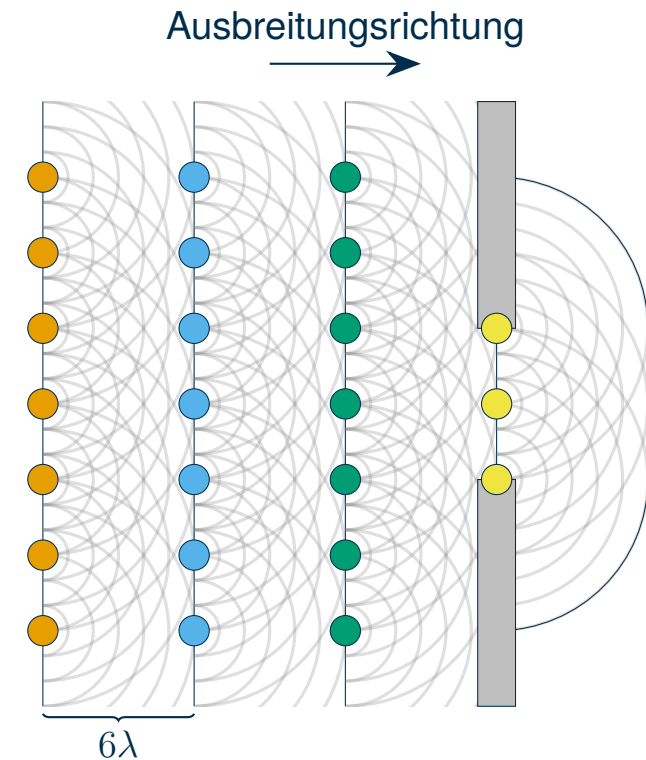
Huygenssches Prinzip

- Das *Huygenssche Prinzip* besagt, dass jeder Punkt einer bestehenden Wellenfront als Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle betrachtet werden kann.
- Im dreidimensionalen Raum entsprechen diese Elementarwellen sogenannten *Kugelwellen*, wobei nur der „vorwärtslaufende“ Anteil berücksichtigt wird.
- Die neue Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt ergibt sich konstruktiv aus der Einhüllenden (Superposition) aller dieser Elementarwellen.
- Mit diesem anschaulichen Modell lässt sich erklären, warum Wellenanteile auch in den geometrischen Schattenraum einer Blende eindringen.
- Daher verwenden wir das Huygenssche Prinzip, um das Phänomen der Beugung zu beschreiben.



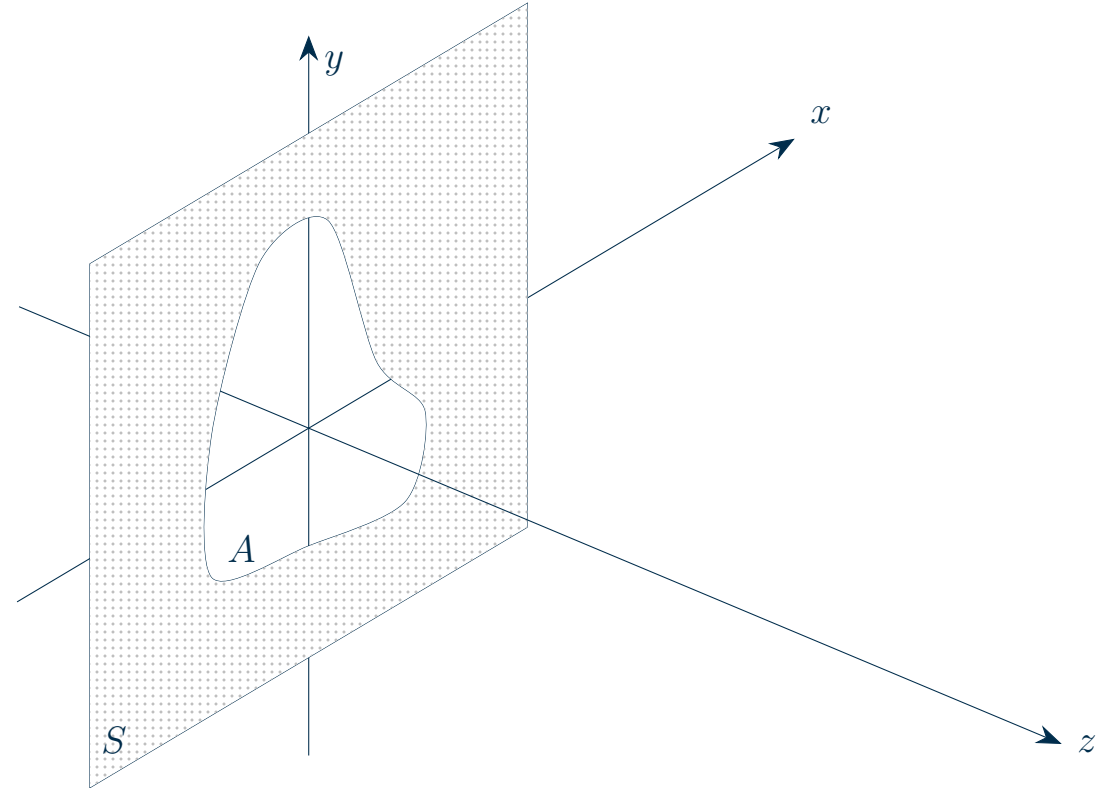
Huygenssches Prinzip

- Das *Huygenssche Prinzip* besagt, dass jeder Punkt einer bestehenden Wellenfront als Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle betrachtet werden kann.
- Im dreidimensionalen Raum entsprechen diese Elementarwellen sogenannten *Kugelwellen*, wobei nur der „vorwärtslaufende“ Anteil berücksichtigt wird.
- Die neue Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt ergibt sich konstruktiv aus der Einhüllenden (Superposition) aller dieser Elementarwellen.
- Mit diesem anschaulichen Modell lässt sich erklären, warum Wellenanteile auch in den geometrischen Schattenraum einer Blende eindringen.
- Daher verwenden wir das Huygenssche Prinzip, um das Phänomen der Beugung zu beschreiben.



Beugung an einer Apertur: Problemstellung

- Wir betrachten im dreidimensionalen Raum die Beugung einer Welle an einer Apertur A in einem ansonsten undurchlässigen, unendlich ausgedehnten Schirm S .
- Die Apertur kann dabei eine Öffnung (z. B. eine Lochblende) oder ein semitransparenter Bereich sein.
- Der Schirm befindet sich in der Ebene $z = 0$.
- Wir nehmen an, dass sich alle Quellen der Welle im Halbraum $z < 0$ befinden, sodass der Betrachtungsraum $z > 0$ quellenfrei ist.



Mathematische Modellbildung

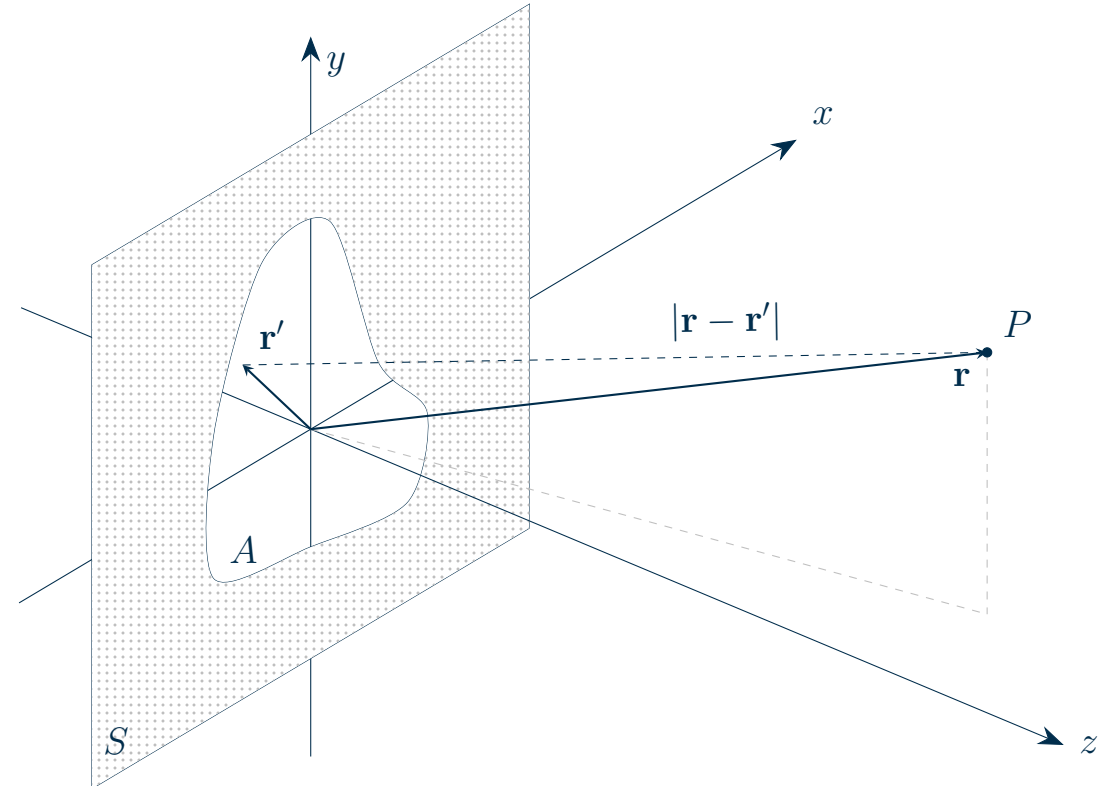
- Die exakte theoretische Beschreibung der Beugung basiert auf dem Lösen der Maxwell'schen Gleichungen unter strikter Einhaltung der Rand- und Stetigkeitsbedingungen.
- Eine analytische Lösung ist jedoch nur für wenige einfache Probleme möglich, da dazu neben der Welle innerhalb der Apertur auch die Eigenschaften des Hindernisses und seine Rückwirkung auf die Feldverteilung der Welle bekannt sein müssen.
- Daher wird in der Praxis oft eine wesentlich einfachere skalare Näherung verwendet.
- Dabei wird die vektorielle Natur der elektromagnetischen Wellen vernachlässigt und das Problem auf die skalare Helmholtz-Gleichung für eine einzelne Feldkomponente, z. B. für E_x , reduziert.
- Diese skalare Theorie vernachlässigt zwar Polarisierungseffekte, liefert jedoch zufriedenstellende Ergebnisse solange die Objekte klein oder groß im Vergleich zur Wellenlänge sind oder wenn wir uns auf Lösungen im Abstand von einigen Wellenlängen vom beugenden Objekt beschränken.
- Trotz dieser Vereinfachungen liefert das Modell für viele Anwendungen, wie die Analyse der Beugungsmuster von Laserlicht, hinreichend genaue Ergebnisse.

Beugung an einer Apertur: Ansatz (I)

- Die Welle wird im gesamten Raum durch die skalare komplexe Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r})$ beschrieben.
- \underline{U} steht für eine beliebige Feldkomponente (z. B. \underline{E}_x oder \underline{H}_x) und muss im quellenfreien Halbraum $z > 0$ die skalare Helmholtz-Gleichung erfüllen

$$\Delta \underline{U} + k^2 \underline{U} = 0.$$

- Wir nehmen an, dass die komplexe Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r}')$ innerhalb der Aperturfläche A bei $z = 0$ bekannt ist.
- Punkte in der Apertur kennzeichnen wir dabei mit dem gestrichelten Ortsvektor $\mathbf{r}' = x' \mathbf{e}_x + y' \mathbf{e}_y$.
- Gesucht ist die komplexe Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r})$ an einem beliebigen Punkt P mit Ortsvektor \mathbf{r} im Halbraum $z > 0$.



Vorlesungsinhalte

1. Beugung & Huygenssches Prinzip

2. Mathematische Formulierung des Huygensschen Prinzips

3. Fresnel- und Fraunhofer-Näherung

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

Greensche Funktionen: Bedeutung

Dirac-Impuls

Beugung einer Kugelwelle

Literatur

Kugelwellen

- Eine vom Punkt \mathbf{r}' ausgehende Kugelwelle (Huygenssche Elementarwelle) am Ort \mathbf{r} lässt sich mathematisch durch folgende Funktion beschreiben:

$$\underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) .$$

- Diese Funktion wird in der Literatur als *Greensche Funktion* der Helmholtz-Gleichung (siehe Anhang Folie 38) im dreidimensionalen Raum bezeichnet.
- Als Greensche Funktion der skalaren Helmholtz-Gleichung erfüllt sie mit dem Dirac-Impuls $\delta(\mathbf{r})$ (siehe Anhang 41)

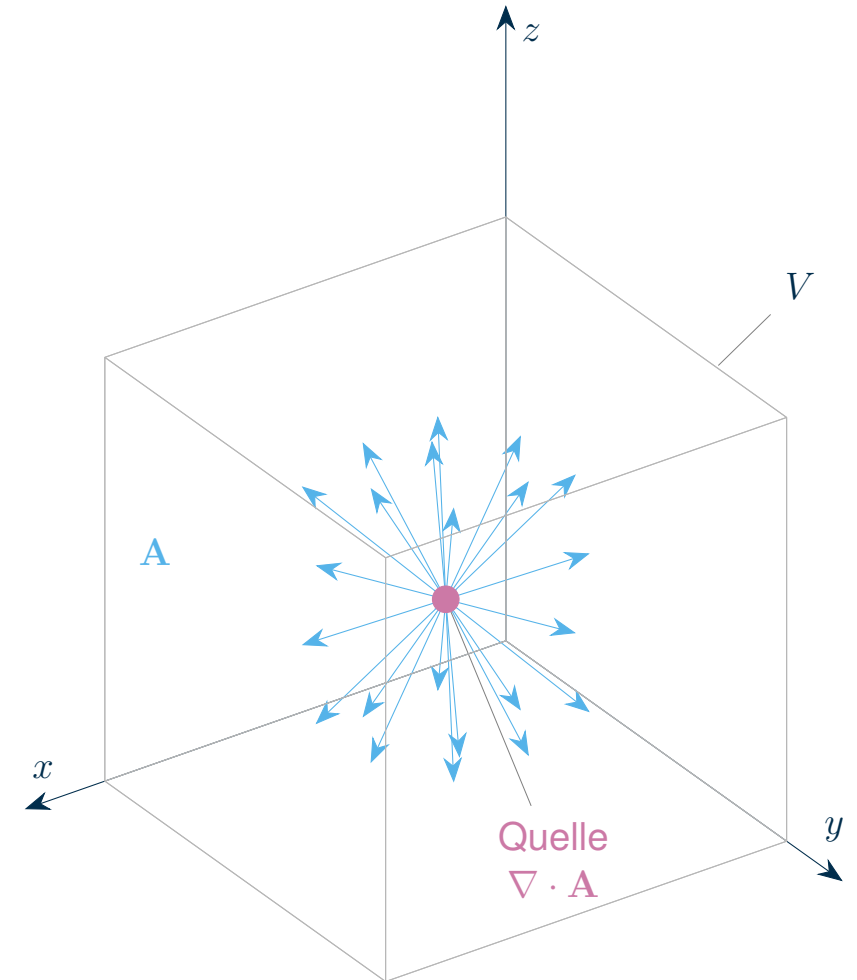
$$\Delta \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (1)$$

- Wir müssen stets beachten, dass die Greensche Funktion im Ursprung der Kugelwelle, d. h. für $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, eine Singularität aufweist.
- Im nächsten Schritt führen wir die mathematischen Werkzeuge ein, um das Huygenssche Prinzip mathematisch zu formulieren.

Wiederholung: Gaußscher Satz

- Wir betrachten ein **Vektorfeld \mathbf{A}** innerhalb eines Volumens V mit der geschlossenen Oberfläche O .
- Die auf der Oberfläche senkrecht stehende Flächennormale $d\mathbf{F}$ definieren wir hier mit dem *in das Volumen zeigenden* Einheitsvektor \mathbf{n} , d. h. $d\mathbf{F} = -\mathbf{n} dF$.
- Der Gaußsche Satz besagt, dass das Volumenintegral über die **Quellen des Vektorfelds $\nabla \cdot \mathbf{A}$** in das Oberflächenintegral über den Fluss aus dem Volumen heraus $-\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ überführt werden kann.
- Wir können den Gaußschen Satz mathematisch folgendermaßen ausdrücken:

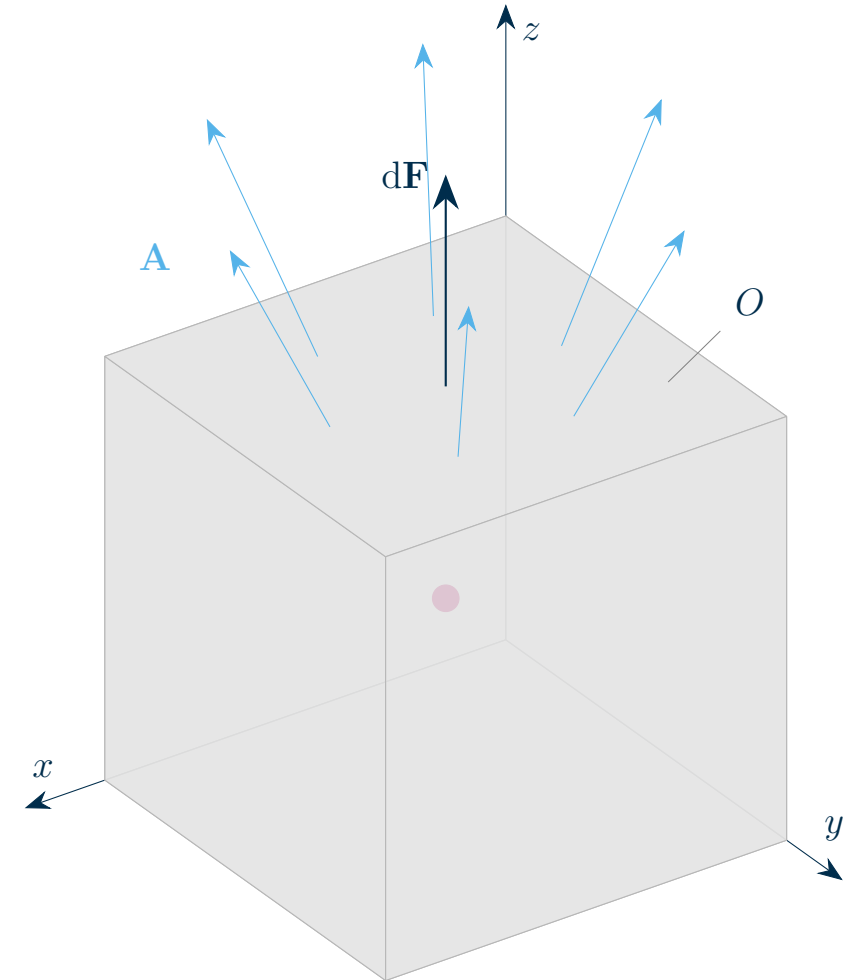
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_O \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F} = - \oint_O \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dF .$$



Wiederholung: Gaußscher Satz

- Wir betrachten ein **Vektorfeld \mathbf{A}** innerhalb eines Volumens V mit der geschlossenen Oberfläche O .
- Die auf der Oberfläche senkrecht stehende Flächennormale $d\mathbf{F}$ definieren wir hier mit dem *in das Volumen zeigenden* Einheitsvektor \mathbf{n} , d. h. $d\mathbf{F} = -\mathbf{n} dF$.
- Der Gaußsche Satz besagt, dass das Volumenintegral über die **Quellen des Vektorfelds $\nabla \cdot \mathbf{A}$** in das Oberflächenintegral über den Fluss aus dem Volumen heraus $-\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ überführt werden kann.
- Wir können den Gaußschen Satz mathematisch folgendermaßen ausdrücken:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_O \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F} = - \oint_O \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dF .$$



Erste Greensche Identität

- Wir betrachten nun Vektorfelder \mathbf{A} , die sich gemäß folgender Gleichung aus zwei beliebigen Skalarfeldern ϕ und ψ ergeben

$$\mathbf{A} = \phi (\nabla\psi)$$

- Die Ableitungen der Skalarfelder ϕ und ψ in Richtung des Normalenvektors sind auf der Oberfläche O wie folgt gegeben

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = (\nabla\psi) \cdot \mathbf{n} .$$

- Durch Einsetzen in den Gaußschen Satz erhalten wir die sogenannte *erste Greensche Identität*

$$\oint_O \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F} = - \oint_O \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} dF = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_V \nabla \cdot (\phi (\nabla\psi)) dV = \int_V \nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi\Delta\psi dV .$$

Zweite Greensche Identität

- Wir betrachten nun Vektorfelder \mathbf{A} , die sich gemäß folgender Gleichung aus zwei beliebigen Skalarfeldern ϕ und ψ ergeben

$$\mathbf{A} = \phi (\nabla\psi) - \psi (\nabla\phi) .$$

- Dann erhalten wir durch Einsetzen in den Gaußschen Satz die *zweite Greensche Identität*:

$$\oint_O \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F} = - \oint_O \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} dF = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_V \phi \Delta\psi - \psi \Delta\phi dV .$$

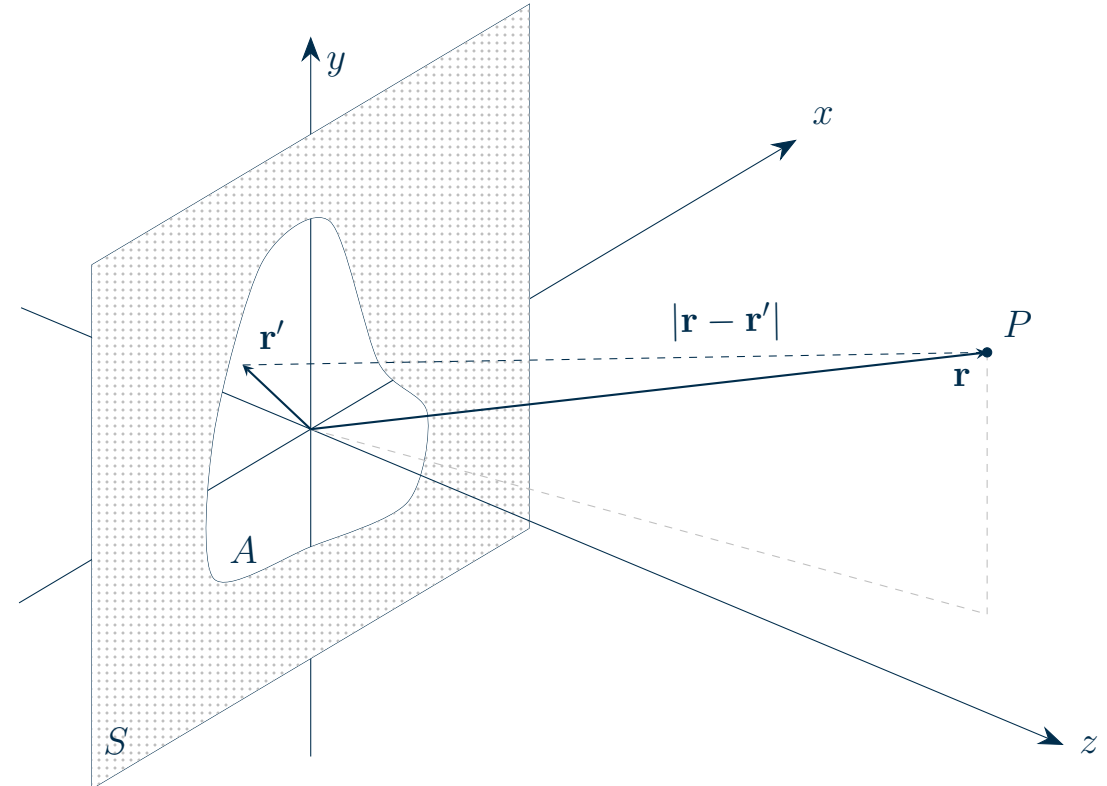
- Erfüllen sowohl ϕ als auch ψ in V die skalare homogene Helmholtz-Gleichung, verschwindet also das Volumenintegral:

$$\phi \Delta\psi - \psi \Delta\phi = -\phi k^2\psi + \psi k^2\phi = 0$$

- Diese mathematische Identität bildet das Fundament, um das Feld im Inneren eines Volumens durch die Werte auf dem Rand auszudrücken.

Beugung an einer Apertur: Ansatz (II)

- Wir beschreiben die Welle im Halbraum $z \geq 0$ durch die komplexe Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r})$, welche die skalare Helmholtz-Gleichung erfüllen muss.
- Ziel: $\underline{U}(\mathbf{r})$ an einem beliebigen Punkt P innerhalb des Volumens $V = \{\mathbf{r} \mid z > 0\}$ bestimmen.
- Das Volumen V mit der Oberfläche O wird also auf der Seite der einfallenden Welle durch die Ebene $z = 0$ begrenzt, welche die Apertur A beinhaltet.
- Innerhalb der Apertur A wird die Feldverteilung als bekannt vorausgesetzt.
- Wir nutzen nun die zweite Greensche Identität, um das gesuchte Feld im Inneren des Volumens durch die Werte auf dessen Randfläche O auszudrücken.



Mathematische Formulierung Huygenssches Prinzip (I)

- Verwenden wir eine geeignete Hilfsfunktion, können wir die zweite Greensche Identität ansetzen, um eine Beziehung zwischen \underline{U} innerhalb des Volumens V und auf der Oberfläche O herzustellen.
- Gemäß dem Huygensschen Prinzip bieten sich Kugelwellen $\underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ als Hilfsfunktion an.
- Mit $\phi = \underline{U}(\mathbf{r}')$ und $\psi = \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, lässt sich die zweite Greensche Identität folgendermaßen schreiben, wobei wir die Integrationsvariablen mit $'$ kennzeichnen:

$$\oint_O \underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} dF' = - \int_V \underline{U}(\mathbf{r}') \Delta' \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta' \underline{U}(\mathbf{r}') dV'$$

- Da Kugelwellen in ihrem Ursprung $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ eine Singularität aufweisen, müsste das Volumen V streng genommen so gewählt werden, dass der Punkt P mit dem Ortsvektor \mathbf{r} ausgespart wird.
- Setzen wir jedoch formell in das Volumenintegral die Helmholtz-Gleichung für \underline{U} sowie (1) ein, heben sich die Beiträge von $\underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ im Integranden auf und wir erhalten

$$- \int_V \underline{U}(\mathbf{r}') (-\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - k^2 \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) + \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') k^2 \underline{U}(\mathbf{r}') dV' = \int_V \underline{U}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \underline{U}(\mathbf{r}).$$

Mathematische Formulierung Huygenssches Prinzip (II)

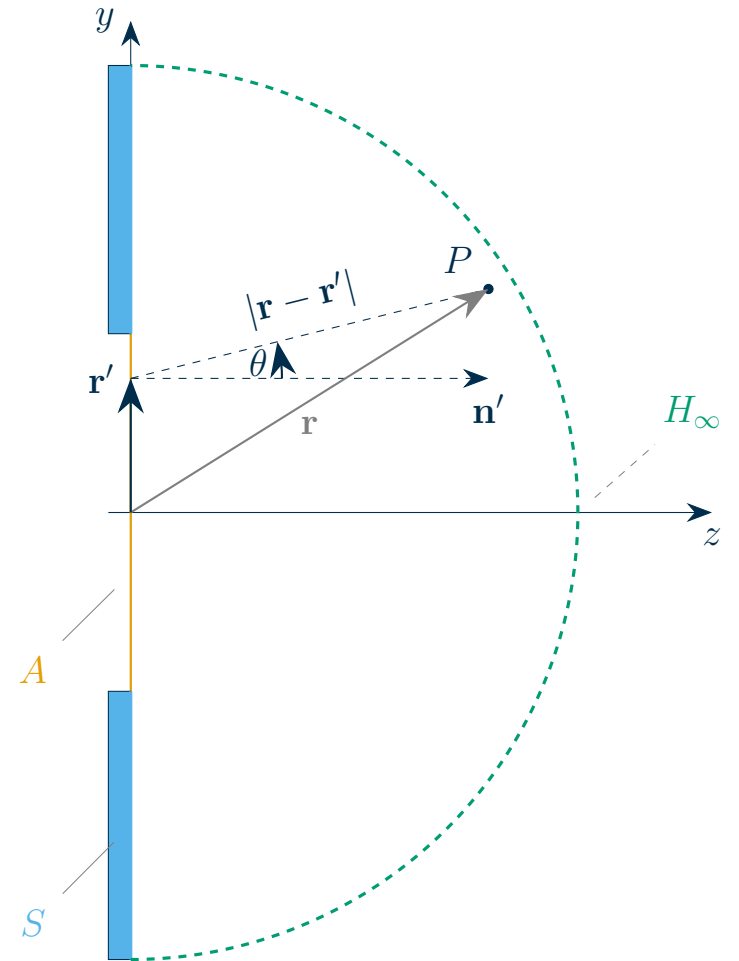
- Somit können wir nun für alle Punkte \mathbf{r} innerhalb des Volumens V das Skalarfeld \underline{U} aus dem Feld auf der Oberfläche O berechnen

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \oint_O \underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} dF' .$$

- Da \underline{G} gerade Kugelwellen darstellt, handelt es sich hierbei um die mathematische Formulierung des Huygensschen Prinzips in drei Dimensionen.

Kirchhoffsche Näherungen

- Das Volumen V des Halbraums $z > 0$ können wir im folgenden als Halbkugel verstehen, deren Radius gegen Unendlich läuft (s. Abb.).
- Die Oberfläche O von V zerlegen wir nun in drei Teilflächen: Die Aperturfläche A , die Schirmfläche (ohne Apertur) S und die Fläche der ins Unendliche ausgedehnten Halbkugel H_∞ .
- Kirchhoff hat für diese drei Teilintegrale folgende Näherungen getroffen:
 - Innerhalb der Apertur beeinflusst das Vorhandensein des Schirms die komplexe Amplitude \underline{U} und deren Ableitung $\frac{\partial \underline{U}}{\partial n'}$ nicht.
 - Auf dem Schirm ($z = 0+$) gilt hingegen $\underline{U} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial n'} \equiv 0$, weshalb das Integral über S zu null wird.
 - Die Wellen im Halbraum $z > 0$ klingen mit zunehmendem Abstand von der Apertur hinreichend schnell ab, sodass der Beitrag des Integrals über H_∞ verschwindet. Nähere Informationen finden sich z. B. in [2] unter dem Stichwort „Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung“.



Das Kirchhoffsche Beugungsintegral (I)

- Wir nehmen an, dass die Apertur in der Ebene $z = 0$ liegt und deren Normale in $+z$ -Richtung zeigt.
- Damit erhalten wir unter Verwendung von $\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{\partial}{\partial z'}$ und $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ folgende Beziehung für die Ableitung der Greenschen Funktion in Normalenrichtung

$$\frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} = \frac{\partial \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{z - z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{1 + j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

- Mit den Kirchhoffschen Näherungen erhalten wir für $z' = 0$ das *Kirchhoffsche Beugungsintegral*

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \int_A \left[\frac{z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{(1 + j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \underline{U}(\mathbf{r}') - \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'} \Big|_{z'=0} \right] \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dF'$$

- Mithilfe dieses Integrals können wir, unter Voraussetzung der Kirchhoffschen Näherungen, das Skalarfeld $\underline{U}(\mathbf{r})$ im Halbraum $z > 0$ berechnen.
- Dafür notwendig ist allein die Kenntnis des Feldes sowie seiner Ableitung in Normalenrichtung innerhalb der Apertur.
- In vielen Szenarien ist der Beobachtungspunkt mindestens mehrere Wellenlängen von der Apertur entfernt, wodurch $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$ bzw. $k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg 1$ gilt.

Das Kirchhoffsche Beugungsintegral (II)

- Ferner gilt mit dem Winkel θ (siehe auch Folie 18), dass $\frac{z}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \cos(\theta)$ wobei $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
- Mit diesen beiden Approximationen können wir das Kirchhoffsche Beugungsintegral annähern durch

$$\begin{aligned} \underline{U}(\mathbf{r}) &= \int_A \left[j k \cos(\theta) \underline{U}(\mathbf{r}') - \left. \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'} \right|_{z'=0} \right] \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dF' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_A \left[j k \cos(\theta) \underline{U}(\mathbf{r}') - \left. \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'} \right|_{z'=0} \right] \frac{\exp(-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF'. \end{aligned}$$

Beispiel: Beugung einer ebenen Welle (I)

- Im Halbraum $z < 0$ breite sich eine ebene Welle in $+z$ -Richtung aus, die bei $z = 0$ auf die Apertur A treffe.
- Für $z < 0$ gilt dann $\underline{U}(\mathbf{r}) = \underline{U}_0 \exp(-j k z)$ und in der Apertur bei $z = 0$

$$\underline{U}(\mathbf{r}') = \underline{U}_0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'} \right|_{z'=0} = -j k \underline{U}(\mathbf{r}') = -j k \underline{U}_0 .$$

- Damit erhalten wir für das Feld im Halbraum $z > 0$

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{j k}{2\pi} \int_A \underline{U}(\mathbf{r}') \frac{1 + \cos(\theta) \exp(-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF' .$$

- Dieser Ausdruck vereinfacht sich für kleine Winkel θ wegen $\cos(\theta) \approx 1$ weiter zu

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{j}{\lambda} \int_A \underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\exp(-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF' = \frac{j \underline{U}_0}{\lambda} \int_A \frac{\exp(-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF' .$$

Beispiel: Beugung einer ebenen Welle (II)

- Nehmen wir zusätzlich an, dass

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{r},$$

erhalten wir

$$\underline{U}(\mathbf{r}) \approx \frac{j \underline{U}_0}{\lambda r} \int_A \exp(-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dF'.$$

- Wir können auch für Kugelwellen, welche die größtmögliche Phasenkrümmung aufweisen, denselben Ausdruck herleiten (siehe Anhang Folie 43).
- *Wichtig:* Im Exponenten der Exponentialfunktion dürfen wir die Näherung $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$ im Allgemeinen nicht verwenden, da auch für große r ein Fehler in der Größenordnung von π zu einem Vorzeichenwechsel führt.
- Für eine analytische Lösung benötigen wir daher präzise Näherungen des Phasenterms, die wir in den folgenden Abschnitten als Fresnel- und Fraunhofer-Näherung kennenlernen.

Visualisierung: Beugung einer ebenen Welle

- Der erhaltene Ausdruck beschreibt die Beugung einer ebenen Welle an einer beliebigen Apertur.
- Die untenstehenden Abbildungen zeigen mögliche Verteilungen von $\Re\{U(\mathbf{r})\}$ in der yz -Ebene für Aperturen mit unterschiedlicher Breite d .
- Trotz der Kirchhoffschen Näherungen, deren Begründungen zunächst wage erscheinen, zeigen die Ergebnisse eine erstaunlich geringe Abweichung von experimentellen Beobachtungen.



$$\lambda \sim d$$



$$\lambda \ll d$$

Visualisierung: Interferenz am Doppelspalt

- Neben der Beugung am Einzelspalt können wir nach dem selben Prinzip auch das Phänomen der Interferenz am Doppelspalt mithilfe des Beugungsintegrals beschreiben.
- Gemäß dem Superpositionsprinzip können die Feldverteilungen für jeden Spalt (Breite d) separat berechnet und das Gesamtfeld als Summe der Einzellösungen erhalten werden.
- Bei der Darstellung mittels komplexer Amplituden interferieren die Felder entsprechend ihrer Phasenrelation entweder konstruktiv oder destruktiv, wodurch das bekannte Interferenzmuster entsteht.



$$\lambda \sim d$$

Vorlesungsinhalte

1. Beugung & Huygenssches Prinzip

2. Mathematische Formulierung des Huygensschen Prinzips

3. Fresnel- und Fraunhofer-Näherung

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

Greensche Funktionen: Bedeutung

Dirac-Impuls

Beugung einer Kugelwelle

Literatur

Fresnel-Näherung

- Wir können das Beugungsintegral weiter vereinfachen, indem wir $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ für $z' = 0$ wie folgt umformen

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{z^2}}.$$

- Die Wurzel können wir nun in eine Taylorreihe entwickeln, gemäß $\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha^3}{16} - \mathcal{O}(\alpha^4)$.
- Für $z^2 \gg (x - x')^2 + (y - y')^2$ wird $\alpha \ll 1$, sodass wir die Wurzel durch die ersten beiden Terme der Taylorreihe annähern können:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx z \left(1 + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z^2} \right).$$

- Kritisch ist insbesondere der Approximationsfehler im Argument der komplexen Exponentialfunktion, der in der Größenordnung von π zu einer Vorzeichendrehung führt.
- Wir bezeichnen diese Näherung, welche zudem die Approximation $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{z}$ erlaubt, als *Fresnel-Näherung*.
- Mit der komplexen Amplitudenverteilung in der Aperturebene \underline{U} erhalten wir so das *Fresnelsche Beugungsintegral*

$$\underline{U}^{(\text{Fresnel})}(\mathbf{r}) = \frac{j \exp(-j k z)}{\lambda z} \iint_A \underline{U}(x', y') \exp\left(-j k \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}\right) dx' dy'$$

Räumliche Fouriertransformation

- Die zweidimensionale räumliche Fouriertransformation einer Funktion $f(x, y)$ definieren wir folgendermaßen:

$$F(\xi, \nu) = \mathcal{F} \{f(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-j 2\pi(\xi x + \nu y)) \, dx \, dy .$$

- Hierbei bezeichnen wir ξ und ν als *Orts- oder Raumfrequenzen*.
- Die dazugehörige inverse Fouriertransformation lautet dementsprechend

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{F(\xi, \nu)\} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \nu) \exp(j 2\pi(\xi x + \nu y)) \, d\xi \, d\nu .$$

Fresnelsches Beugungsintegral als Fourierintegral (I)

- Führen wir eine Funktion $A(x, y)$ ein, welche die Apertur A beschreibt, können wir die Grenzen des Fresnelschen Beugungsintegrals ins Unendliche erweitern

$$\underline{U}^{(\text{Fresnel})}(\mathbf{r}) = \frac{j \exp(-j k z)}{\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} A(x', y') \underline{U}(x', y') \exp\left(-j k \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}\right) dx' dy' .$$

- Für eine kreisförmige, vollständig durchlässige Apertur mit Radius r_A gilt dabei

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 \leq r_A^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

während für eine quadratische Variante mit Seitenlänge D gilt, dass

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & -\frac{D}{2} \leq x \leq \frac{D}{2} \text{ und } -\frac{D}{2} \leq y \leq \frac{D}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Fresnelsches Beugungsintegral als Fourierintegral (II)

- Mit den Raumfrequenzen $\xi = -x/\lambda z$ und $v = -y/\lambda z$ und $\underline{U}_A(x', y') = A(x', y')\underline{U}(x', y')$, können wir das Fresnelsche Beugungsintegral folgendermaßen ausdrücken

$$\frac{j \exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \underline{U}_A(x', y') \exp\left(-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \exp(-j 2\pi(\xi x' + v y')) dx' dy'.$$

- Dabei erkennen wir, dass das Fresnelsche Beugungsintegral der räumlichen Fouriertransformation von \underline{U}_A multipliziert mit einem quadratischen Phasenterm entspricht:

$$\underline{U}^{(\text{Fresnel})}(\mathbf{r}) = \frac{j \exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \mathcal{F} \left\{ \underline{U}_A(x', y') \exp\left(-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \right\}.$$

- Auf diese Weise können wir die analytische Lösung des Fresnelschen Beugungsintegrals für gewisse Funktionen \underline{U}_A vereinfachen, indem wir auf bekannte Fourierkorrespondenzen zurückgreifen.

Fraunhofer-Näherung

- Eine weitere Vereinfachung ergibt sich mit folgender zusätzlicher Näherung:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx z + \frac{x^2 - 2xx' + y^2 - 2yy'}{2z} .$$

- Diese Approximation bezeichnen wir als *Fraunhofer-Näherung*, welche das Fresnelsche Beugungsintegral weiter vereinfacht zu

$$\underline{U}^{(\text{Fraunhofer})}(\mathbf{r}) = \frac{j \exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \underline{U}_A(x', y') \exp\left(j k \frac{xx' + yy'}{z}\right) dx' dy'$$

- Setzen wir die zusätzliche Näherung in die Fourierdarstellung des Fresnelschen Beugungsintegrals ein, können wir den quadratischen Phasenterm vernachlässigen und erhalten das *Fraunhofersche Beugungsintegral*

$$\underline{U}^{(\text{Fraunhofer})}(\mathbf{r}) = \frac{j \exp(-j k z)}{\lambda z} \exp\left(-j k \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \mathcal{F} \{ \underline{U}_A(x', y') \} .$$

Gültigkeit der Fraunhofer-Näherung

- Bei dem Übergang zur Fraunhofer-Näherung haben wir im Integranden den Term $\exp\left(-j k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right)$ vernachlässigt.
- Nehmen wir nun eine kreisförmige Apertur mit dem Radius R an, gilt im Integranden unter Berücksichtigung der Aperturfunktion stets $R^2 \geq x'^2 + y'^2$.
- Damit der vernachlässigte Term keinen signifikanten Beitrag liefert, muss wegen $\exp(-j x) \stackrel{|x| \ll \pi}{\approx} 1$ mit $z > 0$ gelten:

$$k \frac{R^2}{2z} = \frac{2\pi R^2}{\lambda 2z} \ll \pi$$

- Daraus folgt als Bedingung für die Gültigkeit der Fraunhofer-Näherung

$$z \gg R^2 / \lambda \quad \text{bzw.} \quad R \ll \sqrt{\lambda z}.$$

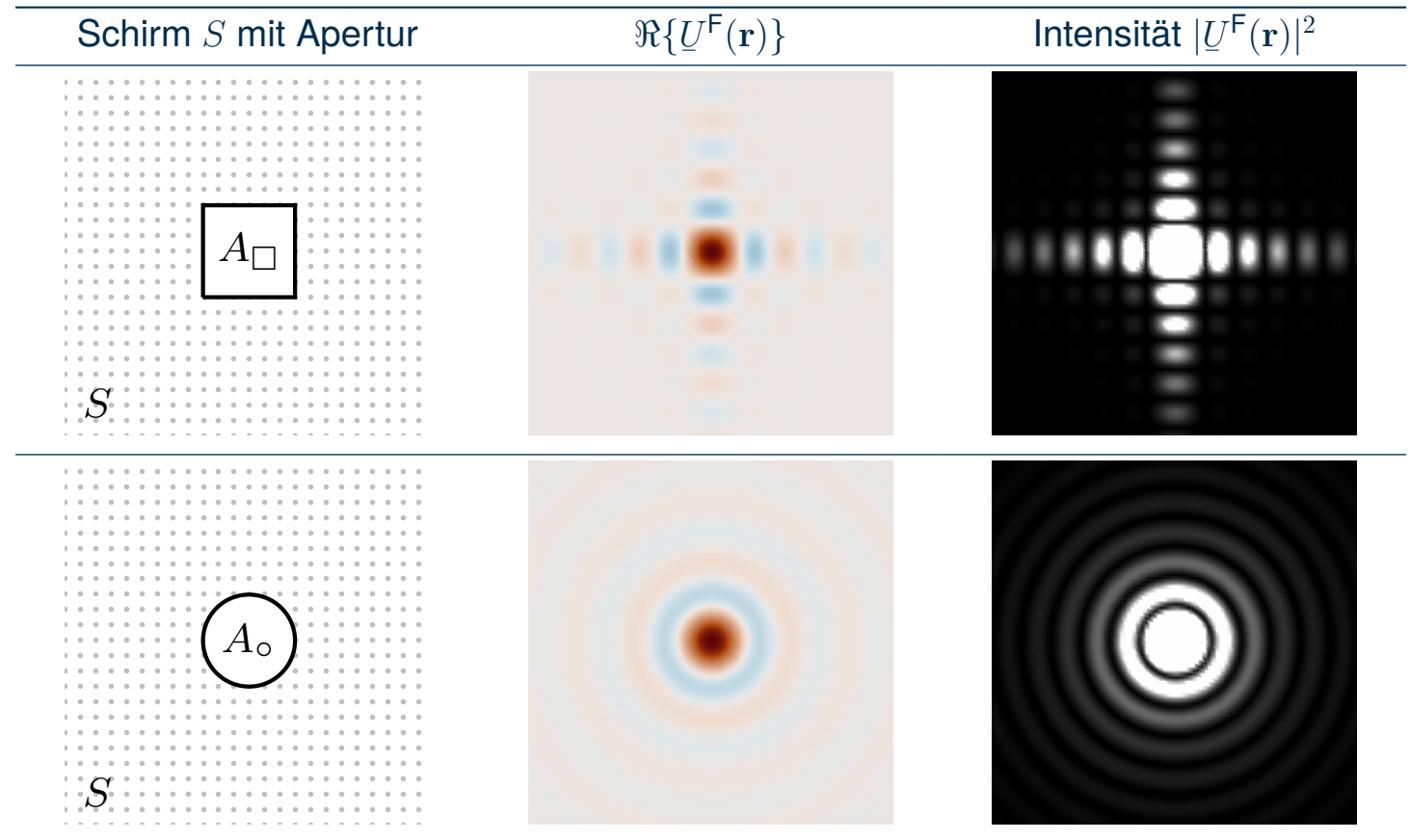
Beispiel:

Für rotes Licht mit einer Wellenlänge von 700 nm, das von einer Lochblende mit Durchmesser $2R = 1$ mm gebeugt wird, gilt die Fraunhofer-Näherung in einem Abstand von der Apertur von

$$z \gg \frac{R^2}{\lambda} = \frac{2,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2}{7 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \approx 0,357 \text{ m}.$$

Beugungsmuster typischer Aperturen

- Eine ebene Welle breite sich in $+z$ -Richtung aus und treffe bei $z = 0$ auf den Schirm S mit quadratischer Apertur A_{\square} bzw. kreisförmiger Apertur A_{\circ} .
- In $z = 0$ gelte $\underline{U}(\mathbf{r}') = \underline{U}_0$.
- $\underline{U}^F(\mathbf{r})$ bezeichne die komplexe Amplitude nach Beugung an der Apertur *im Fernfeld* (Fraunhofer-Näherung).
- Das sichtbare Muster entspricht gerade der Fouriertransformierten der jeweiligen Aperturfunktion.



Fresnel-Zahl

- Die Fresnel-Zahl ist eine dimensionslose Kenngröße, die beschreibt, wie stark eine Welle an einer Blende gebeugt wird und insbesondere in der Optik verwendet wird. Sie ist definiert als

$$F = \frac{R^2}{\lambda z} = \frac{(R/\lambda)^2}{z/\lambda}.$$

- Folgende Fälle lassen sich grob unterscheiden (alle Größenangaben relativ zur Wellenlänge):
 - Ist $F \ll 1$, so ist die Blende sehr klein oder der Abstand zur Apertur z sehr groß, was dem Fernfeld bzw. der Fraunhofer-Beugung entspricht.
 - Gilt $F \simeq 1$, so liegt Fresnel-Beugung vor.
 - Falls $F \gg 1$ gilt, ist die Blende sehr groß oder der Abstand zur Apertur z sehr klein, sodass Beugungseffekte vernachlässigbar sind.
- Somit dient die Fresnel-Zahl als Richtwert, um für eine gegebene Problemstellung die passende Beschreibung der Beugung einer Welle sicherzustellen.

Vorlesungsinhalte

1. Beugung & Huygenssches Prinzip

2. Mathematische Formulierung des Huygensschen Prinzips

3. Fresnel- und Fraunhofer-Näherung

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

Greensche Funktionen: Bedeutung

Dirac-Impuls

Beugung einer Kugelwelle

Literatur

Was Sie gelernt haben sollten

- Die Aussage des Huygensschen Prinzips, dass jede Wellenfunktion als Überlagerung von Kugelwellen dargestellt werden kann, habe ich verstanden.
- Mir ist klar, weshalb wir neben dem Ortsvektor \mathbf{r} , der sich auf den Beobachtungspunkt bezieht, die Integration über den Ortsvektor \mathbf{r}' benötigen.
- Ich habe verstanden, welche Annahmen wir bei der Herleitung des Kirchhoffsche Beugungsintegrals getroffen haben.
- Die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung sowie deren Gültigkeitsbereiche habe ich verstanden.
- Ich habe verstanden, dass das Beugungsintegral gemäß der Fraunhofer-Näherung für eine ebene Welle der zweidimensionalen Fouriertransformation der Aperturfunktion entspricht.

Vorlesungsinhalte

1. Beugung & Huygenssches Prinzip

2. Mathematische Formulierung des Huygensschen Prinzips

3. Fresnel- und Fraunhofer-Näherung

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

Greensche Funktionen: Bedeutung

Dirac-Impuls

Beugung einer Kugelwelle

Literatur

Vorlesungsinhalte: Anhang

5. Anhang

Greensche Funktionen: Bedeutung

Dirac-Impuls

Beugung einer Kugelwelle

Literatur

Greensche Funktionen: Bedeutung (I)

- Mithilfe der Greenschen Funktion $\underline{G} = \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ eines Differentialoperators L können wir inhomogene Differentialgleichungen lösen.
- Betrachten wir z. B. die inhomogene Helmholtz-Gleichung für ein Skalarfeld $\underline{U} = \underline{U}(\mathbf{r})$ mit der Quelle $\underline{f} = \underline{f}(\mathbf{r})$, erhalten wir

$$L\underline{U} = (\Delta + k^2)\underline{U} = \Delta\underline{U} + k^2\underline{U} = \underline{f}. \quad (2)$$

- Die Greensche Funktion erfüllt dabei folgende Beziehung:

$$L\underline{G} = (\Delta + k^2)\underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Delta\underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2\underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

- Dabei wirkt der Laplace-Operator auf \mathbf{r} und nicht auf \mathbf{r}' .
- Multiplizieren wir nun formell von rechts mit $\underline{f}(\mathbf{r}')$ und integrieren über \mathbf{r}' , so erhalten wir

$$(\Delta + k^2) \int \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \underline{f}(\mathbf{r}') dV' = - \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \underline{f}(\mathbf{r}') dV' = -\underline{f}(\mathbf{r}).$$

Greensche Funktionen: Bedeutung (II)

- Der Vergleich dieses Zusammenhangs mit der inhomogenen Helmholtz-Gleichung (2) zeigt, dass

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = - \int \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \underline{f}(\mathbf{r}') dV' .$$

- Da die Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung translationsinvariant ist, d. h. $\underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ gilt, reduziert sich die Ermittlung von \underline{U} auf die Faltung der Greenschen Funktion \underline{G} mit der Quelle \underline{f}

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = - \int \underline{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \underline{f}(\mathbf{r}') dV' .$$

- Dementsprechend können wir die Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung auch als Impulsantwort des Differentialoperators $L = \Delta + k^2$ verstehen.

Vorlesungsinhalte: Anhang

5. Anhang

Greensche Funktionen: Bedeutung

Dirac-Impuls

Beugung einer Kugelwelle

Literatur

Dirac-Impuls mehrerer Variablen

- Für eine beliebige Skalarfunktion f definieren wir den Dirac-Impuls $\delta(t)$ implizit durch die Abtasteigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau).$$

- Diese Abtasteigenschaft für Funktionen einer Variable können wir analog auf den Fall mehrerer Variablen erweitern.
- So erhalten wir z. B. im dreidimensionalen Fall mit $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ bzw. $\mathbf{r}' = x' \mathbf{e}_x + y' \mathbf{e}_y + z' \mathbf{e}_z$ die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}) dV = \iiint_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') f(x, y, z) dx dy dz = f(\mathbf{r}').$$

- Die Abtasteigenschaft bleibt auch nach dem Vertauschen der Variablen \mathbf{r} und \mathbf{r}' erhalten, es gilt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) f(\mathbf{r}') dV' = f(\mathbf{r}).$$

Vorlesungsinhalte: Anhang

5. Anhang

Greensche Funktionen: Bedeutung

Dirac-Impuls

Beugung einer Kugelwelle

Literatur

Beispiel: Beugung einer Kugelwelle (I)

- Während ebene Wellen eine minimale Krümmung der Phasenfront aufweisen, zeichnen sich Kugelwellen durch eine maximale Krümmung der Phasenfront aus.
- Sowohl ebene Wellen als auch Kugelwellen sind rein mathematische Konstrukte und können nur näherungsweise die Ausbreitung von realen Wellen beschreiben.
- Dennoch können wir das Beugungsverhalten von ebenen Wellen bzw. Kugelwellen als untere bzw. obere Schranke für das Verhalten realistischer Wellenformen heranziehen.
- Im Halbraum $z < 0$ breite sich ausgehend von dem Punkt Q mit Ortsvektor $\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{e}_x + y_0 \mathbf{e}_y + z_0 \mathbf{e}_z$ eine Kugelwelle aus, die bei $z = 0$ auf die Apertur treffe.
- Für $z < 0$ gelte dann

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{U_0 \exp(-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

Beispiel: Beugung einer Kugelwelle (II)

- Demzufolge erhalten wir dann in der Apertur bei $z = 0$

$$\underline{U}(\mathbf{r}') = \frac{\underline{U}_0 \exp(-j k |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|)}{4\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \quad \text{bzw.} \quad \left. \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'} \right|_{z'=0} = \frac{z' - z_0}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \frac{1 + j k |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \underline{U}(\mathbf{r}').$$

- Nehmen wir an, dass der Punkt Q in $z < 0$ zumindest mehrere Wellenlängen von der Apertur entfernt ist, gilt in guter Näherung $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| \gg \frac{\lambda}{2\pi}$ bzw. $k|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| \gg 1$.
- Führen wir zudem den Winkel θ_0 ein (analog zu Folie 18), den wir aus der Beziehung $\cos(\theta_0) = \frac{z_0}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|}$ erhalten, können wir den Ableitungsterm in $z' = 0$ vereinfachen zu

$$\left. \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial z'} \right|_{z'=0} \approx -j k \cos(\theta_0) \underline{U}(\mathbf{r}').$$

- Einsetzen in das Kirchhoffsche Beugungsintegral führt schließlich mit $\cos(\theta) = \frac{z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ auf

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{j}{\lambda} \int_A \underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\cos(\theta) + \cos(\theta_0)}{2} \frac{\exp(-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF' \stackrel{\theta, \theta_0 \ll \pi/2}{\approx} \frac{j}{\lambda} \int_A \underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\exp(-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF'.$$

Beispiel: Beugung einer Kugelwelle (III)

- Solange die Beobachtungspunkte bzw. Quellen zumindest mehrere Wellenlängen von der Apertur entfernt und die Winkel zwischen der Wellenfront- und Aperturnormalen hinreichend klein sind, erhalten wir also sowohl für ebene Wellen als auch für Kugelwellen die gleiche Form des Kirchhoffschen Beugungsintegrals.
- Da wir diese beiden Wellenformen als obere und untere Schranke für das Verhalten realistischer Wellenformen betrachten können, schlussfolgern wir, dass wir auch für realistische Wellenformen mit skalarer komplexer Amplitude \underline{U} ansetzen können, dass

$$\underline{U}(\mathbf{r}) = \frac{j}{\lambda} \int_A \underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\exp(-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dF' .$$

Vorlesungsinhalte: Anhang

5. Anhang

Greensche Funktionen: Bedeutung

Dirac-Impuls

Beugung einer Kugelwelle

Literatur

Literatur

- [1] *Wellenwanne* | *LEIFlphysik*. URL: <https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-wellen/versuche/wellenwanne> (besucht am 05. 12. 2022).
- [2] Heino Henke. *Elektromagnetische Felder: Theorie und Anwendung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. DOI: 10.1007/978-3-662-62235-3.
- [3] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier optics*. 3. Aufl. Englewood, Colo: Roberts & Co, 2005.