

EMFW Vorlesung 08: Parallelplattenleiter

Wintersemester 2025/26

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 23. Januar 2026

Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung: Grenzbedingungen

2. Reflexion am idealen Leiter

3. Parallelplattenleitung

4. Was Sie gelernt haben sollten

Einführung

- In dieser Vorlesung untersuchen wir das Verhalten elektromagnetischer Wellen am idealen Leiter, um die Wellenausbreitung im *Parallelplattenleiter* zu verstehen.
- Der Parallelplattenleiter ist ein theoretisches Konstrukt, das einen Wellenleiter bezeichnet, der aus zwei unendlich ausgedehnten, parallel angeordneten ideal leitenden Platten besteht.
- Dieses Konstrukt bildet die Grundlage für das Verständnis metallischer Hohlleiter, wie sie in der Hochfrequenztechnik Anwendung finden.
- Zunächst wiederholen wir daher das Verhalten elektromagnetischer Wellen an Grenzflächen.
- Im nächsten Schritt betrachten wir die Feldverteilungen, die durch Überlagerung der auf den Leiter einfallenden und am Leiter reflektieren Wellen entstehen.
- Auf dieser Grundlage können wir schließlich die Funktionsweise des Parallelplattenleiters verstehen.
- Abschließend untersuchen wir die Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungskonstante der Wellen im Parallelplattenleiter und die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit.

Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung: Grenzbedingungen

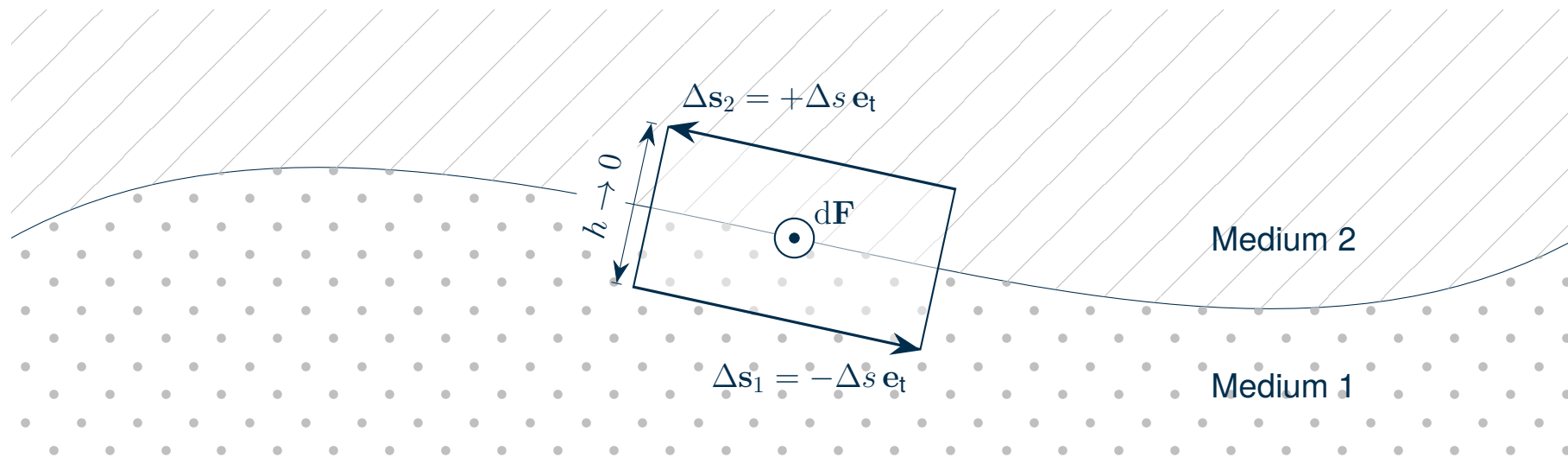
2. Reflexion am idealen Leiter

3. Parallelplattenleitung

4. Was Sie gelernt haben sollten

Stetigkeit der tangentialen Feldkomponenten (I)

- Wir untersuchen das Verhalten der elektrischen und magnetischen Feldkomponenten *tangential* zu der Grenzfläche zweier Medien mithilfe einer geschlossenen rechteckigen Integrationsschleife s , welche die Fläche F einschließt.
- Da die Tangentialrichtung auf einer Fläche im Gegensatz zur Normalrichtung e_n nicht eindeutig ist, wählen wir im Folgenden einen *beliebigen* Einheitsvektor e_t parallel zu der Grenzfläche.
- Die tangentialen Anteile des E- und H-Felds im Medium $i \in 1, 2$ bezeichnen wir mit $E_{t,i} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_t$ und $H_{t,i} = \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{e}_t$.
- Die Schleife besitzt die Breite Δs entlang e_t parallel zur Grenzfläche, und die Höhe h senkrecht dazu, wobei die Normale der Schleifenfläche $d\mathbf{F}$ auch parallel zur Grenzfläche orientiert ist.
- Im Folgenden betrachten wir den Fall $h \rightarrow 0$, wodurch die Fläche F der Schleife verschwindet.



Stetigkeit der tangentialen Feldkomponenten (II)

- Aus dem Induktions- und Durchflutungsgesetz in Integralform folgt für diese Schleife:

$$\int_F \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{F} = \oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = \int_F \mathbf{J} \cdot d\mathbf{F} + \int_F \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{F} = \int_F \mathbf{J} \cdot d\mathbf{F} = i' \Delta s$$
$$\int_F \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{F} = \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2 = - \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{F} = 0$$

- Das Wegintegral entlang der Schleife reduziert sich für $h \rightarrow 0$ auf die Beiträge der Tangentialvektoren $\Delta\mathbf{s}_1 = -\Delta s \mathbf{e}_t$ und $\Delta\mathbf{s}_2 = \Delta s \mathbf{e}_t$.
- Da F für $h \rightarrow 0$ verschwindet, gehen die Integrale über die endlichen Größen $\partial \mathbf{B} / \partial t$ und $\partial \mathbf{D} / \partial t$ gegen Null.
- Nur die idealisierte Stromdichte \mathbf{J} liefert einen endlichen Oberflächenstrom $i' \Delta s$ mit Strombelag i' (Einheit A/m).

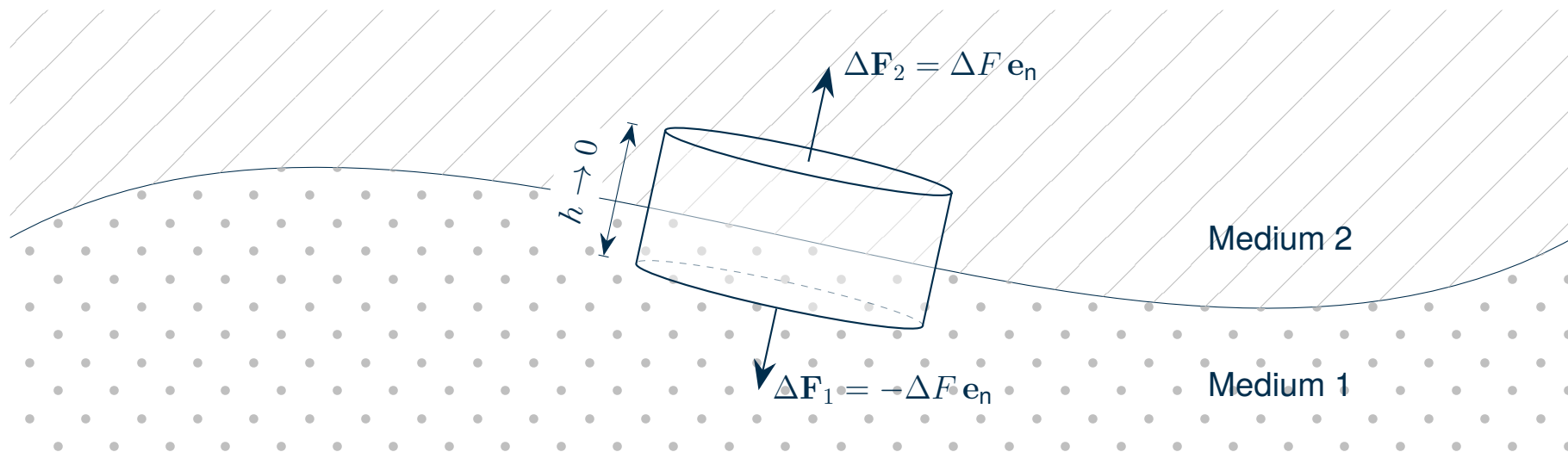
Definition:

Mit der Flächeneinheitsnormale \mathbf{e}_n und den tangentialen Feldkomponenten an der Grenzfläche in Medium 1 $H_{t,1}$ und $E_{t,1}$ sowie in Medium 2 $H_{t,2}$ und $E_{t,2}$ lauten die *Stetigkeitsbedingungen der tangentialen Feldkomponenten*

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{e}_n = H_{t,2} - H_{t,1} = i' \quad \text{und} \quad (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{e}_n = E_{t,2} - E_{t,1} = 0.$$

Stetigkeit der normalen Feldkomponenten (I)

- Zur Herleitung der Randbedingungen für die *Normalkomponenten* betrachten wir ein zylinderförmiges Volumen V .
- Mit dem Einheitsnormalenvektor der Grenzfläche \mathbf{e}_n bezeichnen wir die normalen Anteile des D- und B-Felds im Medium $i \in 1, 2$ mit $D_{n,i} = \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{e}_n$ und $B_{n,i} = \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{e}_n$.
- Die Deckel- und Bodenflächen ΔF liegen parallel zur Grenzfläche, während die Zylinderachse der Höhe h die Grenzschicht durchdringt.
- Wir führen erneut den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ durch, wodurch das Volumen des Zylinders verschwindet, die Stirnflächen jedoch erhalten bleiben.



Stetigkeit der normalen Feldkomponenten (II)

- Für das Volumen folgt aus dem Gaußschen Gesetz sowie der Quellenfreiheit des magnetischen Felds:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dV = \oint_O \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} = \mathbf{D}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = \int_V \varrho \, dV = \sigma \Delta F$$
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = \oint_O \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = \mathbf{B}_1 \cdot \Delta\mathbf{F}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \Delta\mathbf{F}_2 = 0.$$

- Die Beiträge des Mantelflächenintegrals verschwinden für $h \rightarrow 0$, sodass nur die Flüsse durch die Stirnflächen mit den Normalenvektoren $\Delta\mathbf{F}_1 = -\Delta F \mathbf{e}_n$ und $\Delta\mathbf{F}_2 = \Delta F \mathbf{e}_n$ verbleiben.
- Das Volumenintegral über die Raumladungsdichte $\int \varrho \, dV$ liefert die Flächenladungsdichte σ (Einheit A s/m²).

Definition:

Mit der Flächeneinheitsnormale \mathbf{e}_n und den normalen Feldkomponenten an der Grenzfläche in Medium 1 $D_{n,1}$ und $B_{n,1}$ sowie in Medium 2 $D_{n,2}$ und $B_{n,2}$ folgen daraus die *Stetigkeitsbedingungen der normalen Feldkomponenten*

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{e}_n = D_{n,2} - D_{n,1} = \sigma & \quad \text{und} & \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{e}_n = B_{n,2} - B_{n,1} = 0 \\ (\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{e}_n = \varepsilon_2 E_{n,2} - \varepsilon_1 E_{n,1} = \sigma & \quad \text{und} & \quad (\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{e}_n = \mu_2 H_{n,2} - \mu_1 H_{n,1} = 0. \end{aligned}$$

Spezialfall: Randbedingungen am idealen Leiter

- In Vorlesung 4 haben wir bereits gesehen, dass das Innere idealer Leiter (Leitfähigkeit $\kappa \rightarrow \infty$) stets feldfrei ist.
- Ist das Medium 2 ein idealer Leiter, verschwinden dort alle Feldgrößen ($\mathbf{E}_2 = 0, \mathbf{H}_2 = 0$), wodurch sich die Stetigkeitsbedingungen vereinfachen.

Randbedingungen:

Da die Felder nur noch auf einer Seite der Grenzfläche (im Medium 1) existieren, sprechen wir in diesem Fall von *Randbedingungen*. Das elektrische Feld steht also stets senkrecht auf dem Leiter, das magnetische Feld verläuft tangential dazu:

$$H_{t,1} = -i' , \quad E_{t,1} = 0 , \quad D_{n,1} = -\sigma , \quad B_{n,1} = 0$$

Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung: Grenzbedingungen

2. Reflexion am idealen Leiter

3. Parallelplattenleitung

4. Was Sie gelernt haben sollten

Reflexions- & Transmissionsfaktor am idealen Leiter

- Eine elektromagnetische Welle breite sich in einem Medium mit Wellenwiderstand \underline{Z}_1 aus und treffe unter dem Winkel α_1 auf die Grenzfläche zu einem idealen Leiter mit Wellenwiderstand \underline{Z}_2 ($\kappa_2 \rightarrow \infty$).
- Für den komplexwertigen Wellenwiderstand des idealen Leiters erhalten wir (vgl. Vorlesung 04)

$$\underline{Z}_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\underline{\epsilon}_2}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 - j \kappa_2 / \omega}} = \sqrt{\mu_2 \frac{\epsilon_2 + j \kappa_2 / \omega}{\epsilon_2^2 + \kappa_2^2 / \omega^2}} \xrightarrow{\kappa_2 \rightarrow \infty} 0.$$

- Damit ergibt sich für die Reflexions- und Transmissionsfaktoren am idealen Leiter für senkrechte bzw. parallele Polarisation

$$\underline{r}_s = \frac{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) - \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} -1$$

$$\underline{r}_p = \frac{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) - \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} 1$$

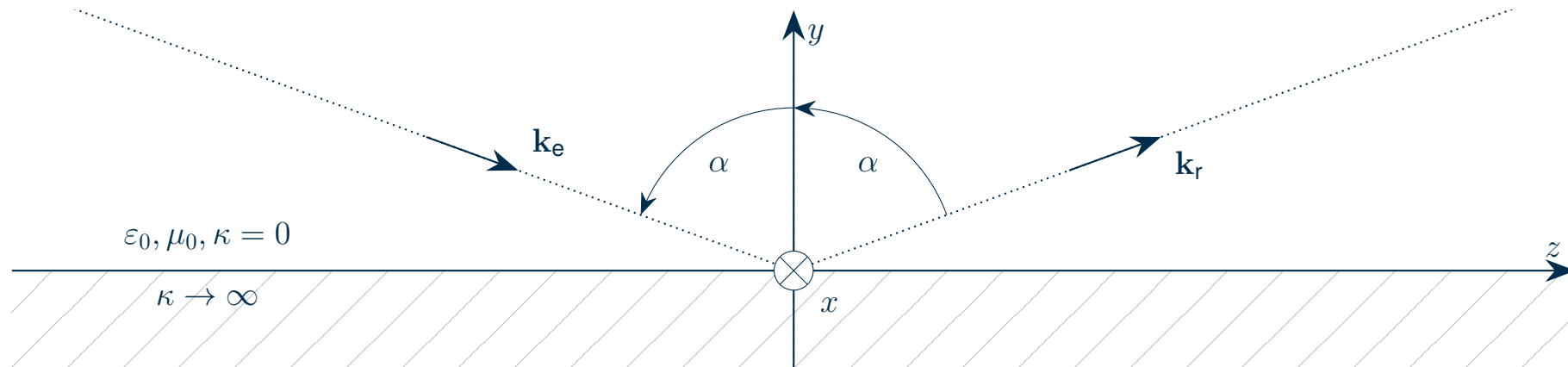
$$\underline{t}_s = \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_2)} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} 0$$

$$\underline{t}_p = \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_1)}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_1) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_2)} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} 0.$$

Reflexion am idealen Leiter (I)

- Betrachten wir nun eine einfallende Welle, welche unter einem Winkel α auf eine in der xz -Ebene liegende Grenzfläche zwischen Vakuum und einem ideal leitenden Medium trifft.
- Die Einfallsebene sei die yz -Ebene und die Welle werde wegen $\kappa \rightarrow \infty$ vollständig reflektiert.
- Für die Wellenvektoren gilt mit $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ und den Einheitsvektoren \mathbf{e}_e und \mathbf{e}_r

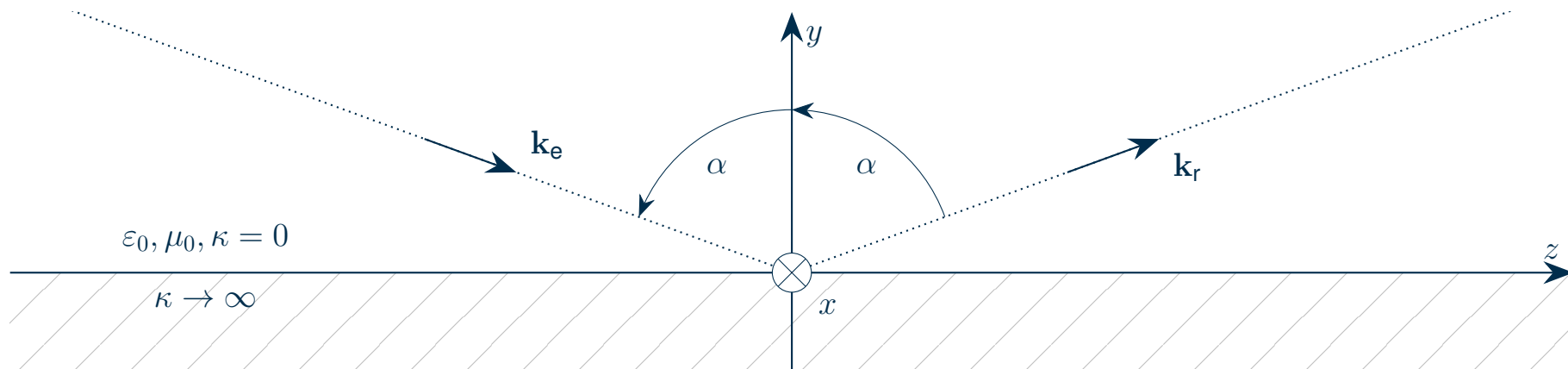
$$\mathbf{k}_e = k_0 \mathbf{e}_e = k_0 (-\cos \alpha \mathbf{e}_y + \sin \alpha \mathbf{e}_z) \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_r = k_0 \mathbf{e}_r = k_0 (\cos \alpha \mathbf{e}_y + \sin \alpha \mathbf{e}_z)$$



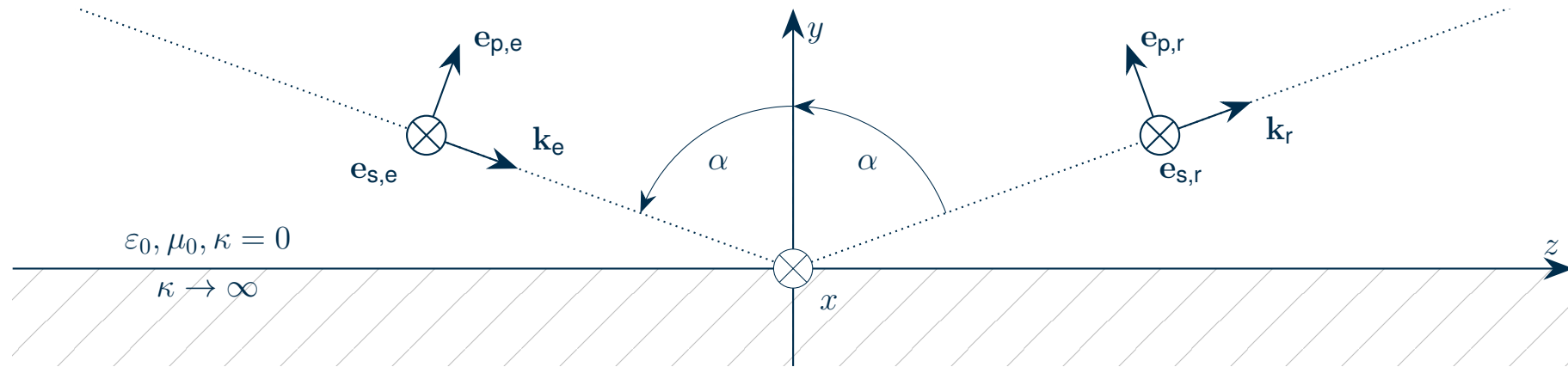
Reflexion am idealen Leiter (II)

- Die einfallende Welle sei zeitharmonisch und eben, d.h. wir erhalten mit dem Wellenwiderstand des freien Raumes Z_0 für die komplexen Amplituden der Feldvektoren

$$\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,e} \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_e(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{H}}_{0,e} \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})) = \frac{1}{Z_0} \mathbf{e}_e \times \underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t)$$
$$\underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,r} \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_r(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{H}}_{0,r} \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})) = \frac{1}{Z_0} \mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t)$$



Senkrechte und parallele Polarisation



- Bezogen auf die Einfallsebene (hier die yz -Ebene) können wir die einfallende Welle aufteilen in ein parallel polarisiertes und ein senkrecht polarisiertes Feld gemäß

$$\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_e^{\parallel}(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{E}}_e^{\perp}(\mathbf{r}, t) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_r^{\parallel}(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{E}}_r^{\perp}(\mathbf{r}, t).$$

- Dabei führen wir mit $i \in \{e, r\}$ die Einheitsvektoren in Richtung des elektrischen Feldvektors der senkrecht bzw. parallel polarisierten Welle $\mathbf{e}_{s,i}$ bzw. $\mathbf{e}_{p,i}$ so ein, dass sie stets ein Rechtssystem mit dem Wellenvektor \mathbf{k}_i bilden.

Reflexion am idealen Leiter: Parallele Polarisation (I)

- Im Fall der parallelen Polarisation gilt für den Reflexionsfaktor $r_p = 1$.
- Daher zeigt das E-Feld nach der Reflexion in $+e_{p,r}$ -Richtung.
- Wir erhalten also für das einfallende und reflektierte elektrische Feld

$$\underline{\mathbf{E}}_{0,e}^{\parallel} = \underline{E}_0^{\parallel} \mathbf{e}_{p,e} = \underline{E}_0^{\parallel} (\sin \alpha \mathbf{e}_y + \cos \alpha \mathbf{e}_z) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}}_{0,r}^{\parallel} = \underline{E}_0^{\parallel} \mathbf{e}_{p,r} = \underline{E}_0^{\parallel} (\sin \alpha \mathbf{e}_y - \cos \alpha \mathbf{e}_z)$$

- Dementsprechend zeigt das H-Feld in die Richtung $\mathbf{e}_e \times \mathbf{e}_{p,e} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_{p,r} = -\mathbf{e}_x$ und lässt sich ausdrücken als

$$\underline{\mathbf{H}}_{0,e}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\underline{E}_0^{\parallel}}{Z_0} \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})) \mathbf{e}_x \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_{0,r}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\underline{E}_0^{\parallel}}{Z_0} \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})) \mathbf{e}_x .$$

Reflexion am idealen Leiter: Parallele Polarisation (II)

- Die resultierende Welle, die sich durch Überlagerung der einfallenden und reflektierten Welle ergibt, erhalten wir

$$\underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_e^{\parallel}(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{E}}_r^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_y^{\parallel}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_y + \underline{E}_z^{\parallel}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_z$$

- Dementsprechend können wir mit $\mathbf{k}_e = k_0 (-\cos \alpha \mathbf{e}_y + \sin \alpha \mathbf{e}_z)$ und $\mathbf{k}_r = k_0 (\cos \alpha \mathbf{e}_y + \sin \alpha \mathbf{e}_z)$ die einzelnen Feldkomponenten schreiben als

$$\begin{aligned} \underline{E}_y^{\parallel}(\mathbf{r}, t) &= \underline{E}_0^{\parallel} \sin \alpha (\exp(j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})) + \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}))) \\ &= \underline{E}_0^{\parallel} \sin \alpha (\exp(j k_0 \cos \alpha y) + \exp(-j k_0 \cos \alpha y)) \exp(j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)) \\ &= 2\underline{E}_0^{\parallel} \sin \alpha \cos(k_0 \cos \alpha y) \exp(j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \underline{E}_z^{\parallel}(\mathbf{r}, t) &= \underline{E}_0^{\parallel} \cos \alpha (\exp(j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})) - \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}))) \\ &= \underline{E}_0^{\parallel} \cos \alpha (\exp(j k_0 \cos \alpha y) - \exp(-j k_0 \cos \alpha y)) \exp(j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)) \\ &= j 2\underline{E}_0^{\parallel} \cos \alpha \sin(k_0 \cos \alpha y) \exp(j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)) . \end{aligned}$$

Reflexion am idealen Leiter: Senkrechte Polarisation

- Im Fall der senkrechten Polarisation gilt für den Reflexionsfaktor $\underline{r}_s = -1$.
- Wir erhalten also für das einfallende und reflektierte elektrische Feld (letzteres zeigt in $-\mathbf{e}_{s,r}$ -Richtung!)

$$\underline{\mathbf{E}}_{0,e}^\perp = \underline{E}_0^\perp \mathbf{e}_{s,e} = \underline{E}_0^\perp \mathbf{e}_x \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}}_{0,r}^\perp = -\underline{E}_0^\perp \mathbf{e}_{s,r} = -\underline{E}_0^\perp \mathbf{e}_x ,$$

weshalb wir folgende Ausdrücke für das magnetische Feld erhalten

$$\underline{\mathbf{H}}_{0,e}^\perp = \frac{\underline{E}_0^\perp}{Z_0} (\sin \alpha \mathbf{e}_y + \cos \alpha \mathbf{e}_z) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_{0,r}^\perp = \frac{\underline{E}_0^\perp}{Z_0} (-\sin \alpha \mathbf{e}_y + \cos \alpha \mathbf{e}_z) .$$

- Für die Überlagerung von einfallender und reflektierter Welle erhalten wir

$$\underline{\mathbf{E}}^\perp(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_e^\perp(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{E}}_r^\perp(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_x^\perp(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_x .$$

- Die einzige nicht-verschwindende Komponentenfunktion können wir schreiben als

$$\begin{aligned} \underline{E}_x^\perp(\mathbf{r}, t) &= \underline{E}_0^\perp (\exp(j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_e \cdot \mathbf{r})) - \exp(j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_r \cdot \mathbf{r}))) \\ &= j 2 \underline{E}_0^\perp \sin(k_0 \cos \alpha y) \exp(j(\omega t - k_0 \sin \alpha z)) . \end{aligned}$$

Wellenausbreitung bei Reflexion am idealen Leiter

- Die Interpretation der obigen Ausdrücke lässt sich vereinfachen, indem wir die Wellenzahlen k_y und k_z einführen:

$$k_y = k_0 \cos \alpha \quad \text{und} \quad k_z = k_0 \sin \alpha$$

- Es gilt also $k_0^2 = k_y^2 + k_z^2$.
- Wir erhalten dementsprechend für den Halbraum $y \geq 0$ im Fall paralleler Polarisation

$$\underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_y^{\parallel}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_y + \underline{E}_z^{\parallel}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_z = \frac{2\underline{E}_0^{\parallel}}{k_0} (k_z \cos(k_y y) \mathbf{e}_y + j k_y \sin(k_y y) \mathbf{e}_z) \exp(j(\omega t - k_z z))$$

und im Fall senkrechter Polarisation

$$\underline{\mathbf{E}}^{\perp}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_x^{\perp}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_x = j 2\underline{E}_0^{\perp} \sin(k_y y) \exp(j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_x .$$

- Wir beobachten also unabhängig von der Polarisation eine Welle, welche sich in $+z$ -Richtung ausbreitet und deren Amplitude von y abhängt.

Sonderfälle der Wellenausbreitung am idealen Leiter

- Im Fall $\alpha = 0^\circ$ trifft die einfallende Welle senkrecht auf die Grenzfläche. Wie erhalten $k_y = k_0$ und $k_z = 0$. Die reflektierte Welle breitet sich also in entgegengesetzter Richtung zur einfallenden Welle aus.
- Durch die Überlagerung der einfallenden und der reflektierten Welle erhalten wir lediglich eine in y -Richtung stehende Welle.
- Im Fall $\alpha = 90^\circ$ kommt es zu keiner Reflexion und die einfallende Welle breitet sich ungestört im Halbraum $y \geq 0$ aus. Es gilt $k_y = 0$ und $k_z = k_0$.

Darstellung mittels Wellenlängen

- Die Welle kann auch mithilfe der Wellenlängen

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{k_y} = \frac{\lambda_0}{\cos \alpha} \quad \text{und} \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{\lambda_0}{\sin \alpha}$$

beschrieben werden, wobei $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi c_0}{\omega}$ die Wellenlänge im Vakuum ist und $\alpha \in (0, \pi/2)$.

- Die beiden Wellenlängen erfüllen also die Beziehung $\frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}$, wobei $\lambda_y, \lambda_z \geq \lambda_0$.
- Damit lassen sich die komplexen Zeiger der elektrischen Feldstärkevektoren für die parallele bzw. senkrechte Polarisation schreiben als

$$\underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_0^{\parallel} \left[2 \frac{\lambda_0}{\lambda_z} \cos \left(\frac{2\pi y}{\lambda_y} \right) \mathbf{e}_y + j 2 \frac{\lambda_0}{\lambda_y} \sin \left(\frac{2\pi y}{\lambda_y} \right) \mathbf{e}_z \right] \exp \left(j \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z} \right) \right)$$
$$\underline{\mathbf{E}}^{\perp}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_0^{\perp} \left[j 2 \sin \left(\frac{2\pi y}{\lambda_y} \right) \mathbf{e}_x \right] \exp \left(j \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z} \right) \right) .$$

Reellwertige Feldkomponenten

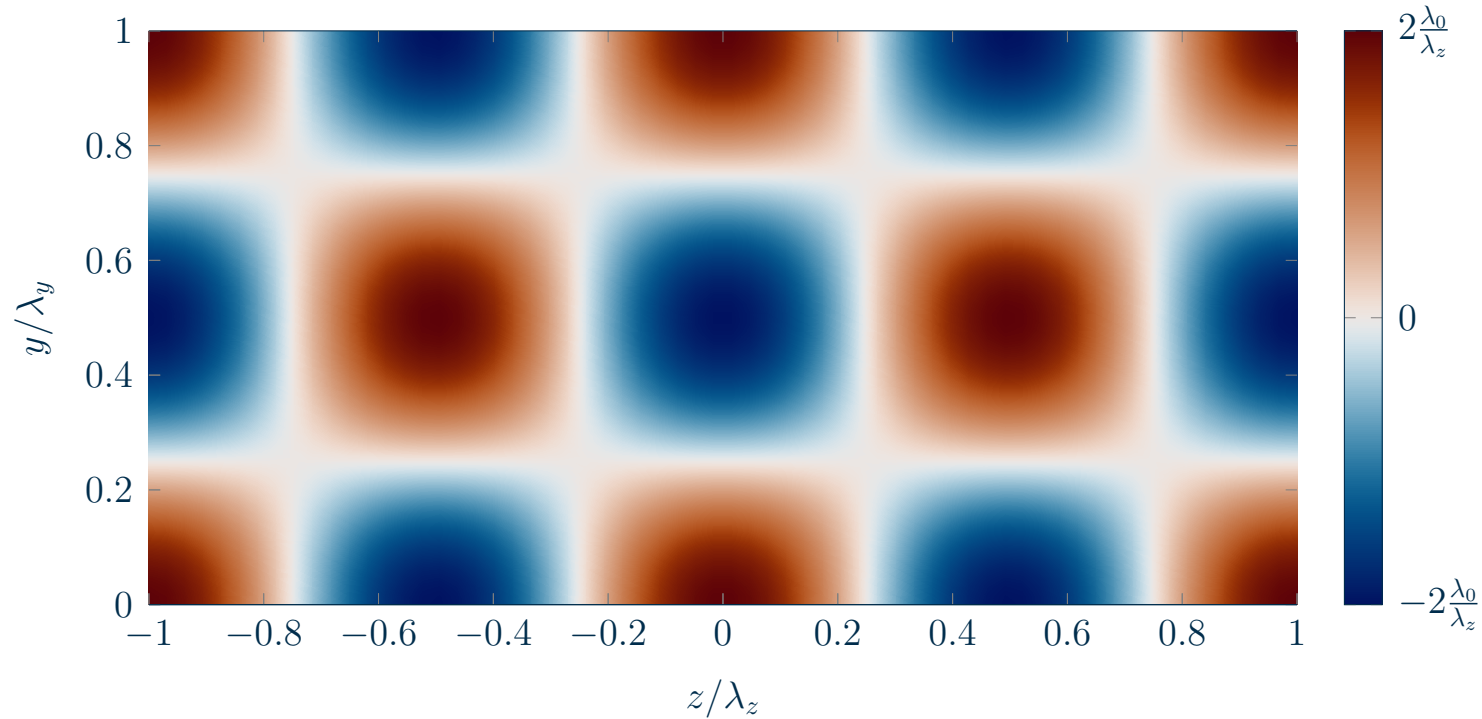
- Die reellwertigen E-Feldkomponenten erhalten wir mit $\underline{E}_0 = E_0 \exp(j \varphi_0)$ als Realteil der komplexen Zeiger auf der vorherigen Folie zu

$$\mathbf{E}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) \} = E_0^{\parallel} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \frac{\lambda_0}{\lambda_z} \cos \left(\frac{2\pi y}{\lambda_y} \right) \cos \left(\varphi_0 + \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z} \right) \\ 2 \frac{\lambda_0}{\lambda_y} \sin \left(\frac{2\pi y}{\lambda_y} \right) \sin \left(\varphi_0 + \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z} \right) \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{E}^{\perp}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \underline{\mathbf{E}}^{\perp}(\mathbf{r}, t) \} = E_0^{\perp} \begin{pmatrix} 2 \sin \left(\frac{2\pi y}{\lambda_y} \right) \sin \left(\varphi_0 + \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_z} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- Da im idealen Leiter kein elektrisches Feld existieren kann, verschwinden die tangentialen E-Feldkomponenten (hier E_z und E_x) auf der Grenzfläche $y = 0$ gemäß den Stetigkeitsbedingungen der Maxwellschen Gleichungen.

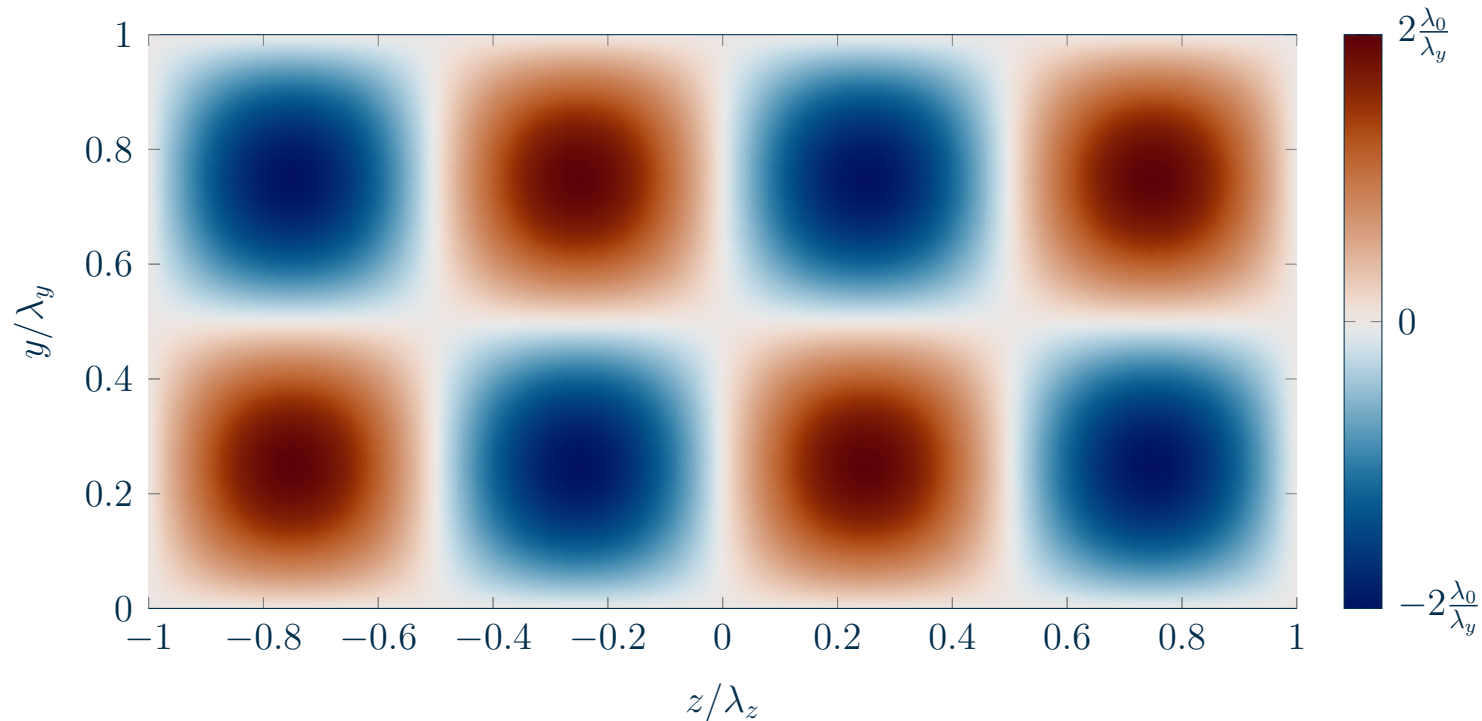
Amplitudenverteilung von E_y^{\parallel}

- Die Abbildung zeigt die normierte y -Komponente $E_y^{\parallel}/E_0^{\parallel}$ des *parallel polarisierten* elektrischen Feldstärkevektors zum Zeitpunkt $t = 0$ für $\varphi_0 = 0$.



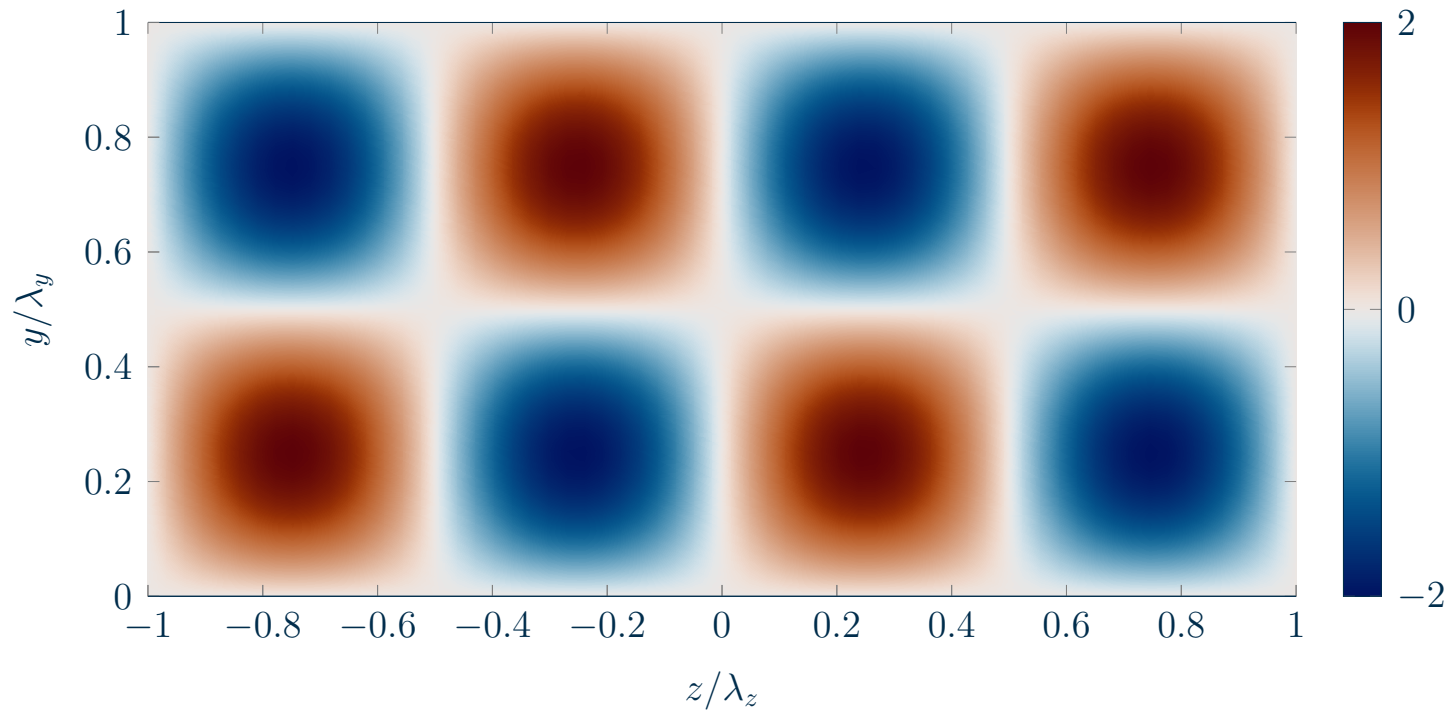
Amplitudenverteilung von E_z^{\parallel}

- Die Abbildung zeigt die normierte z -Komponente $E_z^{\parallel}/E_0^{\parallel}$ des *parallel polarisierten* elektrischen Feldstärkevektors zum Zeitpunkt $t = 0$ für $\varphi_0 = 0$.



Amplitudenverteilung von E_x^\perp

- Die Abbildung zeigt die normierte x -Komponente E_x^\perp / E_0^\perp des *senkrecht polarisierten* elektrischen Feldstärkevektors zum Zeitpunkt $t = 0$ für $\varphi_0 = 0$.



Dispersionsrelation

- Da k_z reell ist, breitet sich die Welle verlustfrei aus.
- Wir erhalten also für die Phasenkonstante in z -Richtung

$$\beta_z = k_z = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_y^2}.$$

- Offenbar weist β_z also auch im Vakuum eine Frequenzabhängigkeit auf.
- Diese Form der Dispersion ist unabhängig von der Materialdispersion aus Vorlesung 04.
- Aufgelöst nach ω ergibt sich daraus die Dispersionsrelation

$$\omega(\beta_z) = c_0 \sqrt{\beta_z^2 + k_y^2},$$

aus welcher im Folgenden die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bestimmt werden kann.

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (I)

- Die Phasengeschwindigkeit in z -Richtung ergibt sich aus der Dispersionsrelation zu

$$v_{\text{ph},z} = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{\omega}{k_0 \sin \alpha} = \frac{c_0}{\sin \alpha} \geq c_0 .$$

- Für die Gruppengeschwindigkeit in z -Richtung erhalten wir analog

$$v_{\text{gr},z} = \frac{d\omega}{d\beta_z} = \frac{\beta_z c_0}{\sqrt{\beta_z^2 + k_y^2}} = \frac{\beta_z c_0}{k_0} = \frac{\beta_z c_0^2}{\omega} = \frac{c_0^2}{v_{\text{ph},z}} = c_0 \sin \alpha \leq c_0 .$$

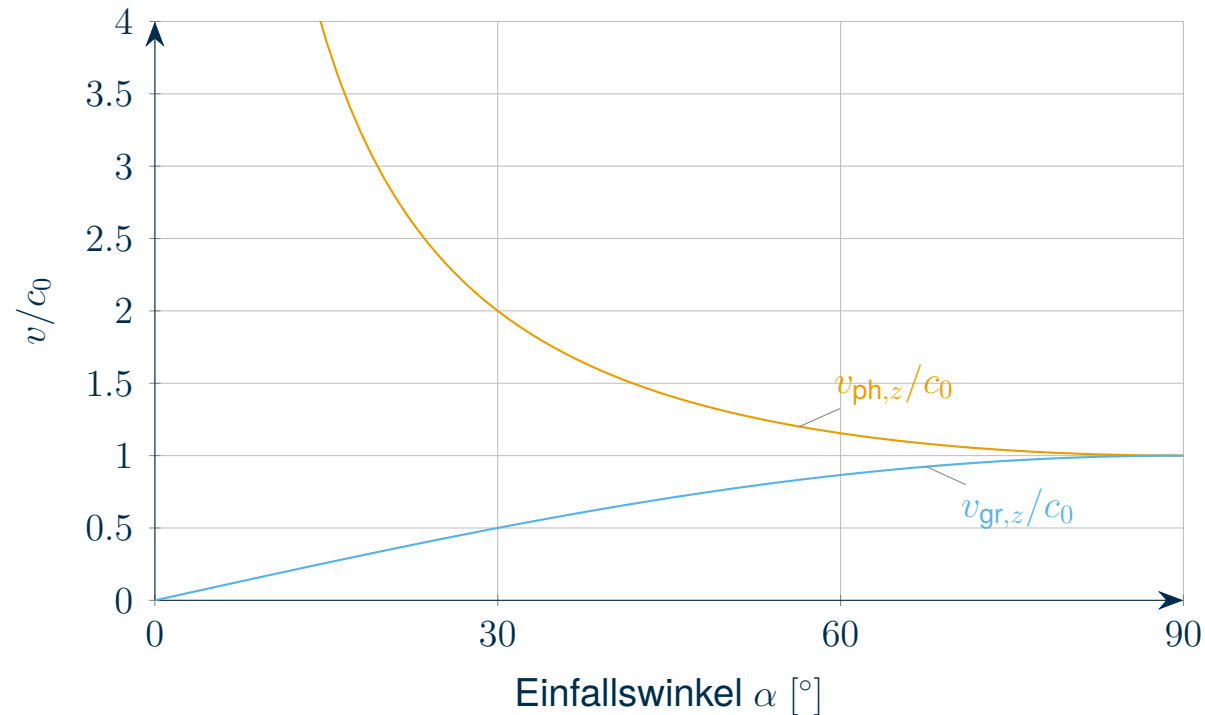
- Damit ergibt sich für die Reflexion am idealen Leiter die Beziehung

$$v_{\text{ph},z} v_{\text{gr},z} = c_0^2$$

d.h. dass das Produkt von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit gleich dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit ist.

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (II)

- Die Abbildung zeigt die normierte Phasen- und Gruppengeschwindigkeit einer ebenen Welle bei Reflexion am idealen Leiter als Funktion des Einfallswinkels α .



Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung: Grenzbedingungen

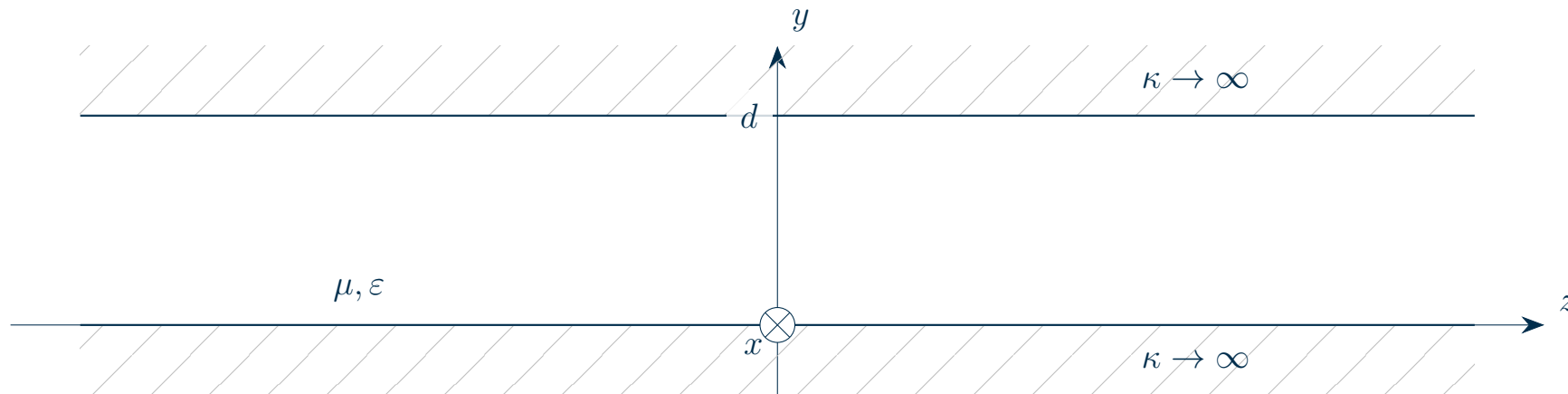
2. Reflexion am idealen Leiter

3. Parallelplattenleitung

4. Was Sie gelernt haben sollten

Parallelplattenleitung

- Gemäß den Randbedingungen verschwindet die tangentielle E_z -Komponente auf der Grenzfläche, d.h. das elektrische Feld muss senkrecht orientiert sein.
- In den xz -Ebenen bei $y = n\frac{\lambda_y}{2}$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ (d.h. für $n \in \mathbb{N}$) verschwindet die E_z Komponente ebenfalls.
- Man kann in diesen Ebenen also ideal leitende Platten im Abstand $d = n\frac{\lambda_y}{2}$ einziehen, ohne dass sich das Feld zwischen den Platten verändern würde.
- Eine solche Anordnung heißt *Parallelplattenleiter*.



Moden im Parallelplattenleiter (I)

- Für einen gegebenen Plattenabstand d beobachten wir im Parallelplattenleiter abhängig von der Frequenz verschiedene Feldbilder, die sich in der Anzahl der Nullstellen unterscheiden.
- Je größer n , desto mehr Nullstellen existieren zwischen den Platten.
- Die verschiedenen Feldbilder bezeichnen wir als die *Moden* des Parallelplattenleiters.
- Für das parallel bzw. senkrecht polarisierte elektrische Feld erhalten wir dann mit $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, $k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y} = \frac{n\pi}{d}$ und $k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z}$

$$\underline{\mathbf{E}}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_0^{\parallel} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{k_z}{k_0} \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \\ j 2\frac{k_y}{k_0} \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \end{pmatrix} \exp(j(\omega t - k_z z)) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}}^{\perp}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_0^{\perp} \begin{pmatrix} j 2 \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(j(\omega t - k_z z)) .$$

- Aus dem Induktionsgesetz erhalten wir dann die zugehörigen magnetischen Felder zu

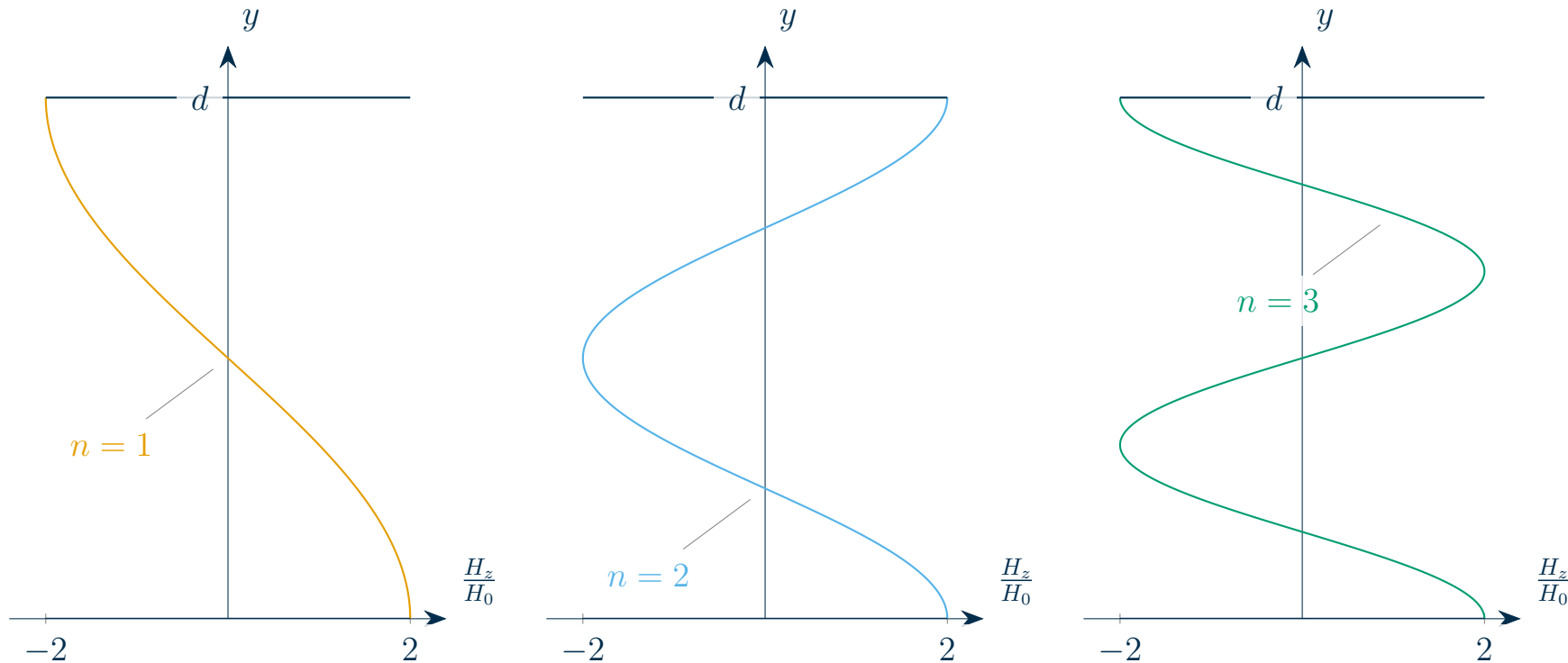
$$\underline{\mathbf{H}}^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{Z} \underline{E}_0^{\parallel} \begin{pmatrix} 2 \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(j(\omega t - k_z z)) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}^{\perp}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{Z} \underline{E}_0^{\perp} \begin{pmatrix} 0 \\ -j 2\frac{k_z}{k_0} \sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \\ 2\frac{k_y}{k_0} \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right) \end{pmatrix} \exp(j(\omega t - k_z z)) .$$

Moden im Parallelplattenleiter (II)

- Offenbar besitzt bei den parallel polarisierten Moden nur das elektrische Feld, bei den senkrecht polarisierten Moden hingegen nur das magnetische Feld einen Anteil in Ausbreitungsrichtung.
- Wir bezeichnen daher die parallel bzw. senkrecht polarisierten Wellen auch als *E-* bzw. *H-Wellen* oder als *transversal-magnetische* (TM-Wellen) bzw. *transversal-elektrische* Wellen (TE-Wellen).
- Für $n = 0$ verschwindet das senkrecht polarisierte E-Feld, weshalb keine Wellenausbreitung möglich ist.
- Bei paralleler Polarisation können jedoch auch bei $n = 0$ \underline{E}_y^\perp und \underline{H}_x^\perp von null verschieden sein.
- Diese Welle weist keine Feldkomponenten in Ausbreitungsrichtung auf, es handelt sich daher um eine sogenannte *transversalelektromagnetische* Welle.

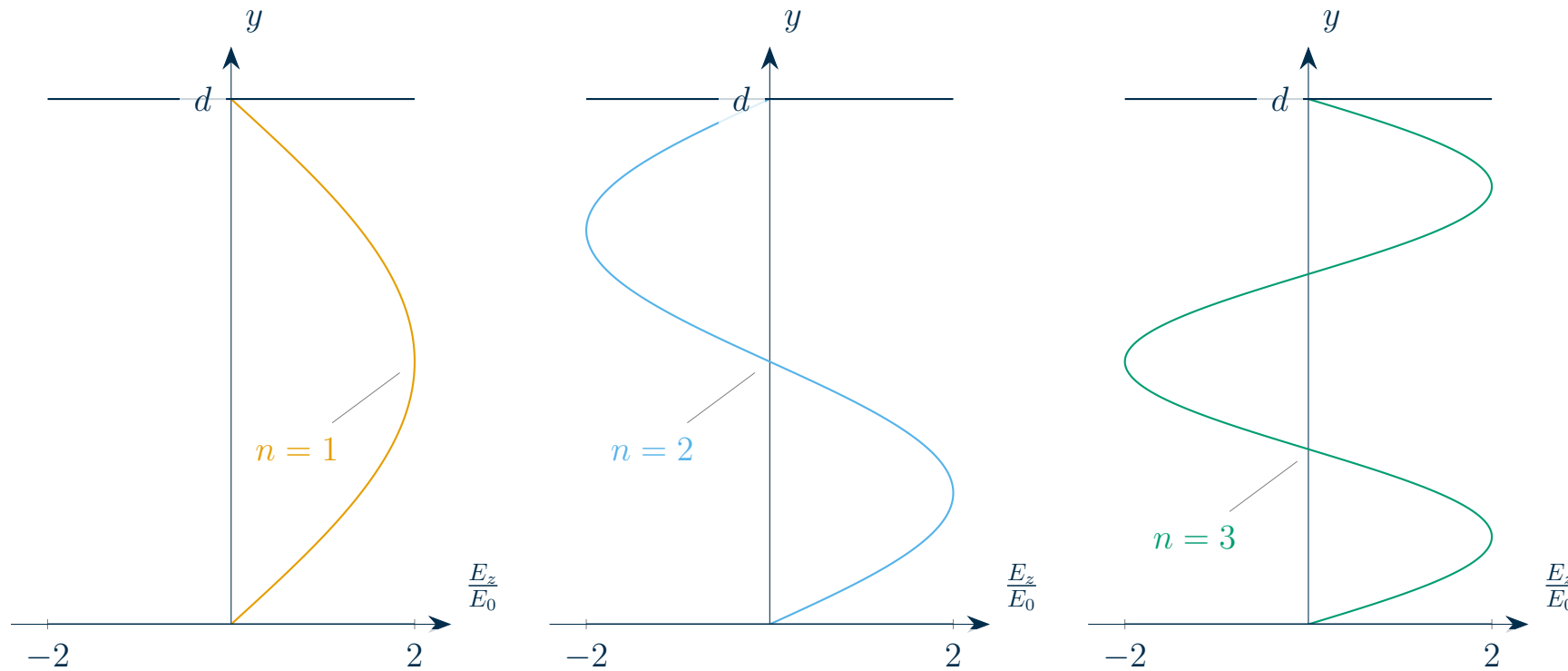
Moden bei senkrechter Polarisation

- Die Abbildungen zeigen die Amplitudenverteilungen von $H_z^\perp = \Re\{H_z^\perp\}$ des senkrecht polarisierten Feldes für $t = 0$, $z = 0$, $E_0^\perp = E_0$ und verschiedene Werte von n . Zudem sei $H_0 = \frac{k_y}{k_0} \frac{E_0}{Z}$.



Moden bei paralleler Polarisation

- Die Abbildungen zeigen die Amplitudenverteilungen von $E_z^{\parallel} = \Re\{\underline{E}_z^{\parallel}\}$ des parallel polarisierten Feldes für $t = 0$, $z = 0$, $\underline{E}_0^{\perp} = -j E_0$ und verschiedene Werte von n .



Dispersionsrelation der Parallelplattenleitung (I)

- Ist der Plattenabstand d fest vorgegeben, so folgt für gegebenes n

$$d = n \frac{\lambda_y}{2} \quad \text{bzw.} \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y} = n \frac{\pi}{d}$$

- Damit ergibt sich für die Ausbreitungskonstante bzw. für die Wellenlänge in Ausbreitungsrichtung

$$k_z = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{k_y}{k_0}\right)^2} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2d}\right)^2}}.$$

- Für $n = 0$ erhalten wir dabei $k_y = 0$ und $k_z = k_0$ bzw. $\lambda_z = \lambda_0$.
- Die zugehörige Welle breitet sich also wie eine ebene Welle aus.

Grenzfrequenz im Parallelplattenleiter

- Wird die Ausbreitungskonstante k_z zu null, kann sich die Welle nicht mehr ausbreiten.
- Daher bezeichnen wir die Frequenz, bei der $k_z = 0$ gilt, als *Grenzfrequenz* f_c („cut-off frequency“).
- Dementsprechend gilt für gegebenes n

$$1 - \left(\frac{k_y}{k_0}\right)^2 = 0 \quad \iff \quad k_y = k_0 \quad \iff \quad \frac{n\pi}{d} = \frac{2\pi f_{c,n}}{c_0} \quad \iff \quad f_{c,n} = \frac{nc_0}{2d}.$$

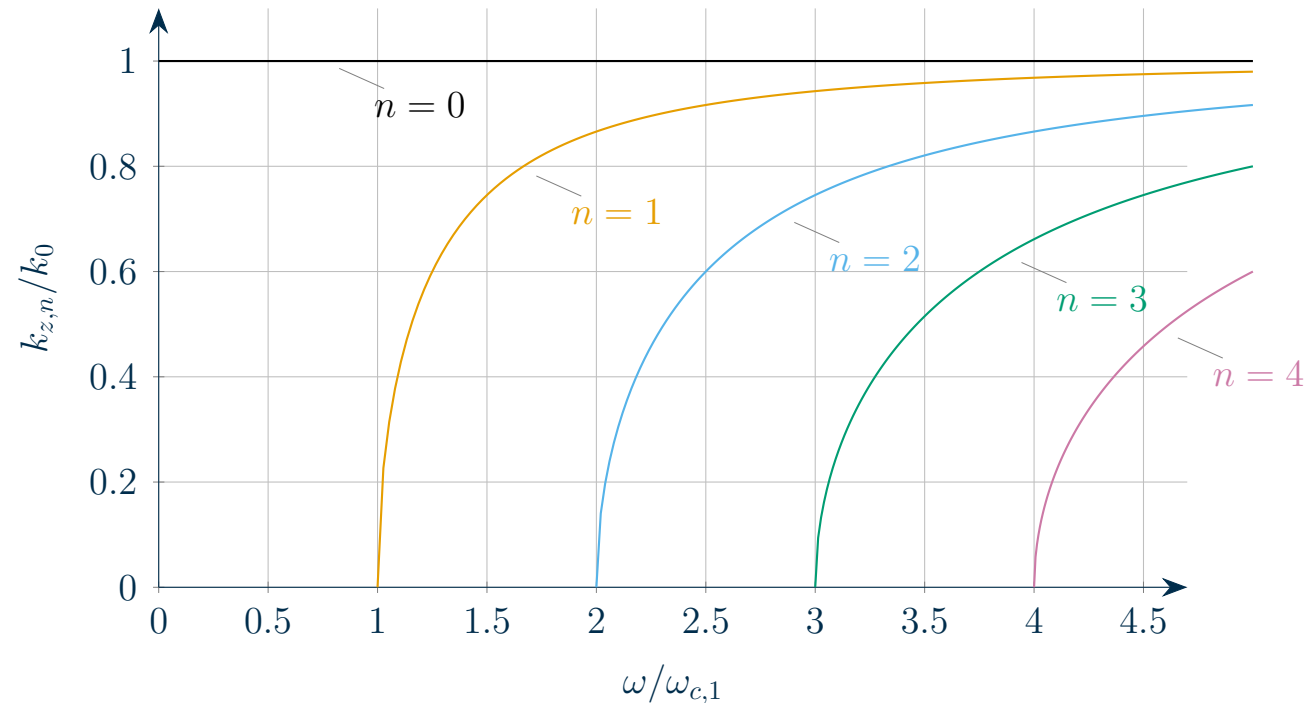
- Nun können wir mit $\omega_{c,n} = 2\pi f_{c,n}$ die Ausbreitungskonstante der n -ten Mode ausdrücken durch

$$k_{z,n} = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,n}}{\omega}\right)^2}.$$

- Für Frequenzen $f < f_{c,n}$ wird k_z imaginär, d.h. die Mode wird in z -Richtung exponentiell gedämpft.
- Eine ungedämpfte Wellenausbreitung ist also für gegebenes n nur bei Frequenzen $f \geq f_{c,n}$ möglich.

Dispersionsrelation der Parallelplattenleitung (II)

- Die Abbildung zeigt die Realteile der normierten Ausbreitungskonstante $k_{z,n}/k_0$ als Funktion der Kreisfrequenz ω bezogen auf die Grenzfrequenz $\omega_{c,1}$.

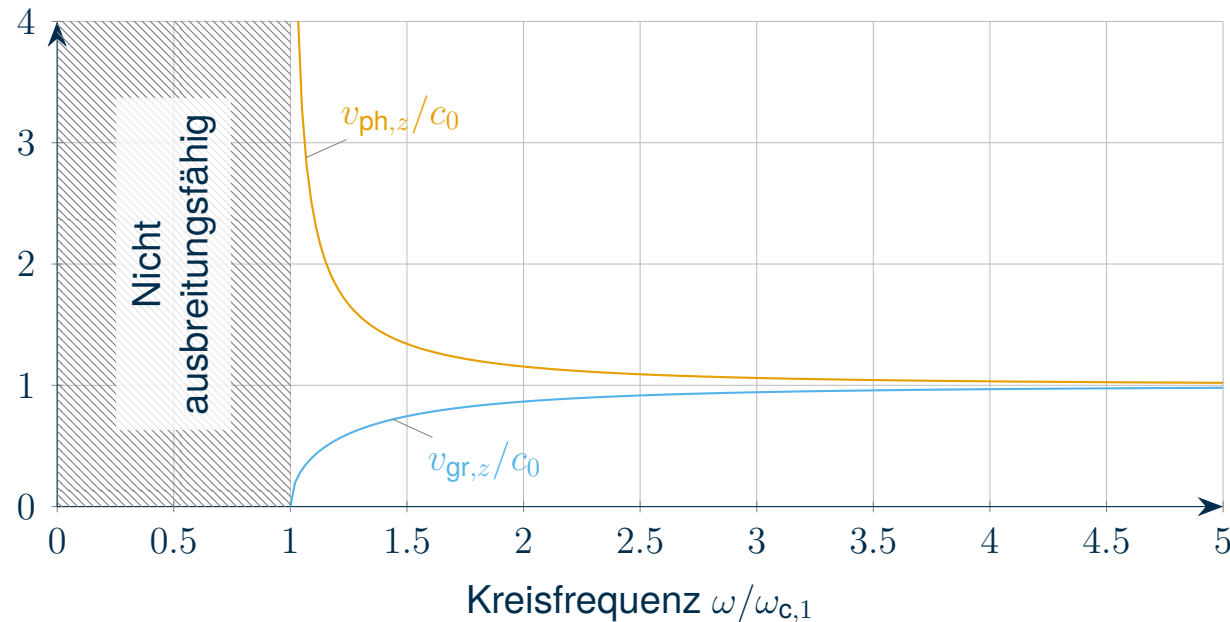


Phasen- & Gruppengeschwindigkeit

- Mit $\beta_z = k_z$ gilt für die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im Parallelplattenleiter

$$v_{\text{ph},z} = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \quad \text{und} \quad v_{\text{gr},z} = \frac{c_0^2}{v_{\text{ph},z}} = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

- Die Abbildung zeigt die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit für die Mode mit $n = 1$.



Vorlesungsinhalte

1. Wiederholung: Grenzbedingungen

2. Reflexion am idealen Leiter

3. Parallelplattenleitung

4. Was Sie gelernt haben sollten

Was Sie gelernt haben sollten

- Wie sich elektromagnetische Wellen an Grenzflächen, insbesondere an idealen Leitern verhalten.
- Dass die Überlagerung von einfallender und am Leiter reflektierter Welle in einer - senkrecht zur Grenzfläche - stehenden Welle resultiert.
- Wie die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der, durch die Überlagerung resultierenden Welle, mit dem Einfallswinkel zusammenhängt.
- Wie das Funktionsprinzip des Parallelplattenleiters von der Betrachtung des Welleneinfalls auf den idealen Leiter abgeleitet werden kann.
- Was eine Mode ist und unter welchen Bedingungen sich die einzelnen Moden im Parallelplattenleiter ausbreiten können.
- Die Bedeutung der Grenzfrequenz für die einzelnen Moden des Parallelplattenleiters.
- Wie sich die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im Parallelplattenleiter verhalten.