

# EMFW Vorlesung 09: Rechteckhohlleiter

Wintersemester 2025/26

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 28. Januar 2026

# Vorlesungsinhalte

## 1. Kanalwellenleiter

## 2. Moden im Rechteckhohlleiter

## 3. Ausbreitungskonstanten im Rechteckhohlleiter

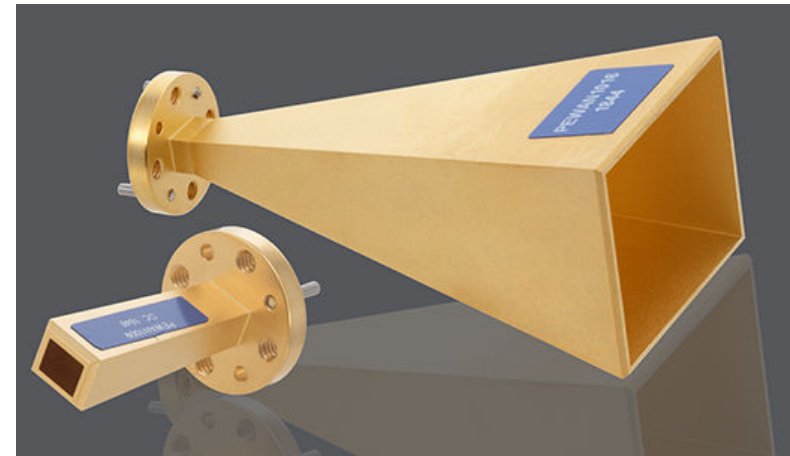
## 4. Was Sie gelernt haben sollten

## 5. Anhang

Existenz transversalelektromagnetischer Wellen  
Vollständigkeit der E- & H-Wellen bei ideal leitenden Wänden

# Einleitung und Motivation

- Für eine störereichere und geführte Übertragung von elektromagnetischen Wellen im Mikrowellen-Frequenzbereich von 300 MHz bis etwa 300 GHz werden vorwiegend Hohlleiter verwendet.
- Hohlleiter sind Metallrohre mit meist rechteckigem, kreisförmigem oder elliptischem Querschnitt.
- Verglichen mit Koaxialkabeln ermöglichen sie eine verlustärmere Übertragung bei hohen Frequenzen, da die Welle nicht durch einen Mittelleiter propagiert.
- Anwendungsgebiete: Mikrowelle, Antennenspeisung von Richtfunkanlagen, Satellitenantennen und Radioteleskopen, Plasmagenerator, Radargeräten, Teilchenbeschleuniger



# Vorlesungsinhalte

## 1. Kanalwellenleiter

## 2. Moden im Rechteckhohlleiter

## 3. Ausbreitungskonstanten im Rechteckhohlleiter

## 4. Was Sie gelernt haben sollten

## 5. Anhang

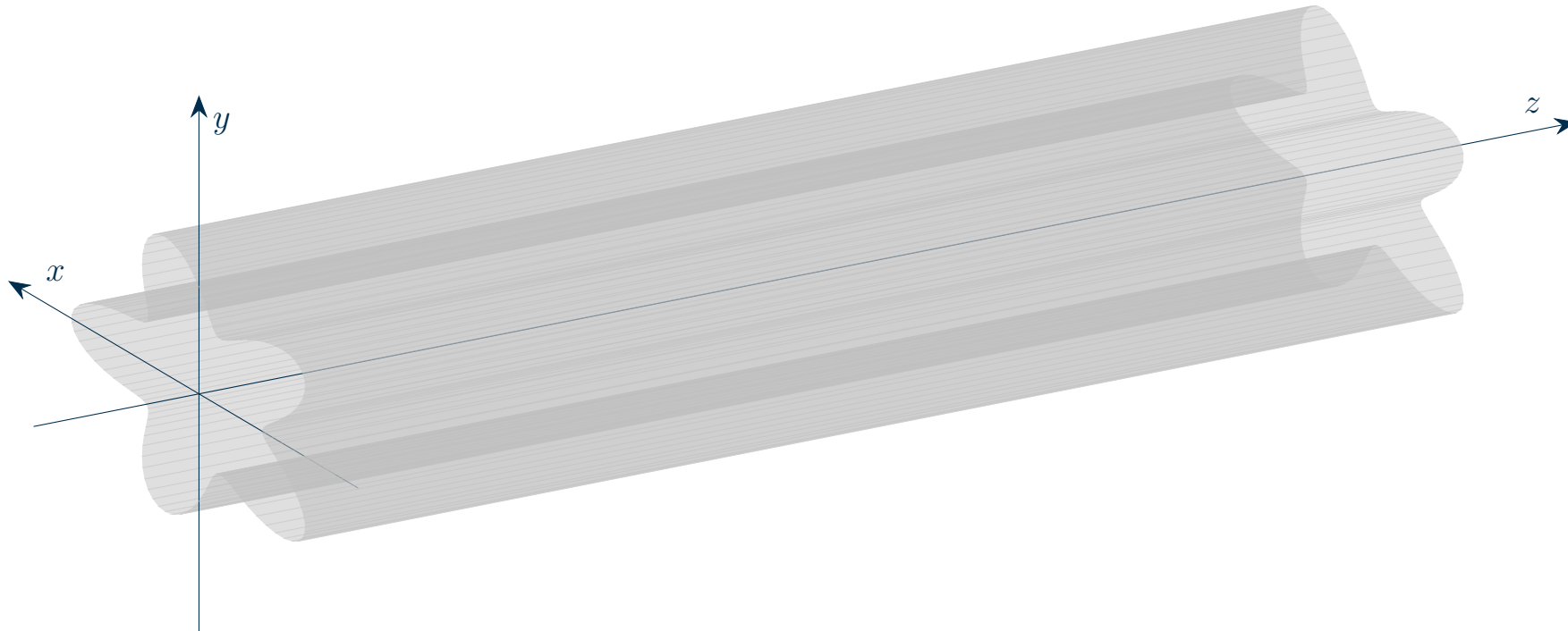
Existenz transversalelektromagnetischer Wellen  
Vollständigkeit der E- & H-Wellen bei ideal leitenden Wänden

# Kanalwellenleiter

- Im Unterschied zu Schichtwellenleitern (z. B. Parallelplattenleiter oder dielektrische Platte) besitzen Kanalwellenleiter in transversaler Richtung eine geschlossene Grenzfläche zwischen einem inneren und einem äußeren Medium.
- Wir nehmen an, dass die Medien jeweils homogen sind und sich das Querschnittsprofil in longitudinaler Richtung (d. h. in  $z$ -Richtung) nicht ändert.
- An der Grenzfläche müssen an jedem Ort die Rand- bzw. Stetigkeitsbedingungen erfüllt sein.
- Beispiele für Kanalwellenleiter sind dielektrische Stäbe (z. B. eine Glasfaser mit Stufenindexprofil) und Hohlleiter mit rechteckigem oder rundem Querschnittsprofil.
- Während bei den dielektrischen Stäben die E- und H-Felder sowohl innerhalb als auch außerhalb vorhanden sind, verschwinden diese in den Wänden eines ideal leitenden Hohlleiters.
- Wir nehmen ferner an, dass die Wellenleiter quellenfrei sind, d. h. es existieren keine Raumladungen ( $\varrho = 0$ ) und keine freien Ströme ( $\underline{\mathbf{J}} = 0$ ).

# Kanalwellenleiter: Beispiel

- Die Abbildung zeigt einen Kanalwellenleiter mit asymmetrischer Querschnittskontur.



# Geführte E-Wellen und H-Wellen (I)

- Im Folgenden analysieren wir die Eigenschaften geführter Wellen im Kanalwellenleiter, welche sich mit räumlich konstanter transversaler Feldverteilung in  $z$ -Richtung ausbreiten.
- Gehen wir von kartesischen Koordinaten aus, suchen wir also Lösungen der Helmholtz-Gleichungen für Feldvektoren der Form

$$\underline{\mathbf{E}}(x, y, z) = \underline{\mathbf{E}}(x, y) \exp(-j \underline{k}_z z) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}(x, y, z) = \underline{\mathbf{H}}(x, y) \exp(-j \underline{k}_z z) .$$

- Um die Lösung der Helmholtz-Gleichungen zu vereinfachen, unterscheiden wir im Folgenden sogenannte **E-Wellen** und **H-Wellen**.
- Bei der **E-Welle** verfügt nur das E-Feld über eine  $z$ -Komponente und es gilt  $\underline{E}_z^E \neq 0, \underline{H}_z^E = 0$ .
- Analog besitzt bei der **H-Welle** nur das H-Feld über eine  $z$ -Komponente und es gilt  $\underline{H}_z^H \neq 0, \underline{E}_z^H = 0$ .
- *Achtung:* Diese Unterscheidung erlaubt nur für ausgewählte Typen von Kanalwellenleitern, etwa Rechteck- oder Rundhohlleiter, die Beschreibung aller möglichen Wellenformen, vgl. Anhang S. 39.
- Würden wir hingegen Kanalwellenleiter betrachten, in denen sowohl das innere als auch das äußere Medium dielektrisch sind, ist die Unterscheidung in E- und H-Wellen im Allgemeinen nicht möglich.

# Geführte E-Wellen und H-Wellen (II)

- Somit fassen wir die Feldvektoren  $\underline{\mathbf{E}}$  und  $\underline{\mathbf{H}}$  als Superposition einer E- und einer H-Welle auf

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}^E + \underline{\mathbf{E}}^H \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}^E + \underline{\mathbf{H}}^H .$$

- E-Wellen werden auch als transversal-magnetische (TM) Wellen und H-Wellen als transversal-elektrische (TE) Wellen bezeichnet.
- Einen weiteren Sonderfall, den wir nicht näher betrachten, stellen die transversalelektromagnetischen (TEM) Wellen dar, bei denen sowohl  $\underline{E}_z = 0$  als auch  $\underline{H}_z = 0$  gilt.
- Im Anhang ab Folie 31 ist für den Rechteckhohlleiter gezeigt, dass darin keine TEM-Wellen ausbreitungsfähig sind.

# Feldkomponenten geführter E-Wellen

- Aus dem Durchflutungsgesetz  $\nabla \times \underline{\mathbf{H}}^E = j\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}}^E$  erhalten wir mit  $\underline{H}_z^E = 0$  und  $\partial/\partial z \rightarrow -jk_z$

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_x^E \\ \underline{E}_y^E \\ \underline{E}_z^E \end{pmatrix} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \underline{H}_y^E}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_x^E}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_y^E}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x^E}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \underline{E}_x^E &= \frac{k_z}{\omega\varepsilon} \underline{H}_y^E \\ \underline{E}_y^E &= -\frac{k_z}{\omega\varepsilon} \underline{H}_x^E \end{aligned}$$

- Aus dem Induktionsgesetz  $\nabla \times \underline{\mathbf{E}}^E = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}^E$  erhalten wir mit  $\underline{k}^2 = \omega^2\varepsilon\mu$  und  $\underline{k}_t^2 = \underline{k}^2 - k_z^2$

$$\begin{pmatrix} \underline{H}_x^E \\ \underline{H}_y^E \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-j\omega\mu} \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_z^E}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y^E}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x^E}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z^E}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{E}_y^E}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x^E}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \underline{H}_x^E &= -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \underline{E}_z^E}{\partial y} - \frac{k_z}{\omega\mu} \underline{E}_y^E \\ \underline{H}_y^E &= \frac{k_z}{\omega\mu} \underline{E}_x^E + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \underline{E}_z^E}{\partial x} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \underline{E}_x^E &= -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{\partial \underline{E}_z^E}{\partial x} \\ \underline{E}_y^E &= -j \frac{k_z}{k_t^2} \frac{\partial \underline{E}_z^E}{\partial y} \\ \underline{H}_x^E &= j \frac{\omega\varepsilon}{k_t^2} \frac{\partial \underline{E}_z^E}{\partial y} \\ \underline{H}_y^E &= -j \frac{\omega\varepsilon}{k_t^2} \frac{\partial \underline{E}_z^E}{\partial x} \end{aligned}$$

# Feldkomponenten geführter H-Wellen

- Aus dem Induktionsgesetz  $\nabla \times \underline{\mathbf{E}}^H = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}^H$  erhalten wir mit  $\underline{E}_z^H = 0$  und  $\partial/\partial z \rightarrow -jk_z$

$$\begin{pmatrix} \underline{H}_x^H \\ \underline{H}_y^H \\ \underline{H}_z^H \end{pmatrix} = \frac{1}{-j\omega\mu} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \underline{E}_y^H}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x^H}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_y^H}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x^H}{\partial y} \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} \underline{H}_x^H &= -\frac{k_z}{\omega\mu} \underline{E}_y^H \\ \underline{H}_y^H &= \frac{k_z}{\omega\mu} \underline{E}_x^H \end{aligned}$$

- Aus dem Durchflutungsgesetz  $\nabla \times \underline{\mathbf{H}}^H = j\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}}^H$  erhalten wir mit  $\underline{k}^2 = \omega^2\varepsilon\mu$  und  $\underline{k}_t^2 = \underline{k}^2 - \underline{k}_z^2$

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_x^H \\ \underline{E}_y^H \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}_z^H}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_y^H}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_x^H}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z^H}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{H}_y^H}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x^H}{\partial y} \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} \underline{E}_x^H &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_z^H}{\partial y} + \frac{k_z}{\omega\varepsilon} \underline{H}_y^H \\ \underline{E}_y^H &= -\frac{k_z}{\omega\varepsilon} \underline{H}_x^H - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \underline{H}_z^H}{\partial x} \end{aligned} \implies \begin{aligned} \underline{E}_x^H &= -j \frac{\omega\mu}{\underline{k}_t^2} \frac{\partial \underline{H}_z^H}{\partial y} \\ \underline{E}_y^H &= j \frac{\omega\mu}{\underline{k}_t^2} \frac{\partial \underline{H}_z^H}{\partial x} \\ \underline{H}_x^H &= -j \frac{k_z}{\underline{k}_t^2} \frac{\partial \underline{H}_z^H}{\partial x} \\ \underline{H}_y^H &= -j \frac{k_z}{\underline{k}_t^2} \frac{\partial \underline{H}_z^H}{\partial y} \end{aligned}$$

# Transversale Feldkomponenten

- Da wir alle Feldvektoren als Superposition einer E- und einer H-Welle darstellen können, erhalten wir für die transversalen Feldkomponenten in Abhängigkeit von  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$

$$\begin{aligned}\underline{E}_x &= \underline{E}_x^E + \underline{E}_x^H = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left( \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} + \frac{\omega \mu}{\underline{k}_z} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \right) \\ \underline{E}_y &= \underline{E}_y^E + \underline{E}_y^H = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left( \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\omega \mu}{\underline{k}_z} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \right) \\ \underline{H}_x &= \underline{H}_x^H + \underline{H}_x^E = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left( \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} - \frac{\omega \varepsilon}{\underline{k}_z} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \right) \\ \underline{H}_y &= \underline{H}_y^H + \underline{H}_y^E = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left( \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} + \frac{\omega \varepsilon}{\underline{k}_z} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right) .\end{aligned}$$

# Skalare Wellengleichungen

- Für geführte Wellen können wir also alle vier transversalen Feldkomponenten aus den beiden unabhängigen longitudinalen Feldkomponenten  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  ableiten, für welche wir im Folgenden ansetzen:

$$\begin{aligned}\underline{E}_z(x, y, z) &= \underline{E}_{z,0} F^E(x, y) \exp(-j \underline{k}_z^E z) \\ \underline{H}_z(x, y, z) &= \underline{H}_{z,0} F^H(x, y) \exp(-j \underline{k}_z^H z) .\end{aligned}$$

- Zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen genügt also nunmehr die Lösung der beiden skalaren Wellengleichungen

$$\begin{aligned}\Delta \underline{E}_z + \underline{k}^2 \underline{E}_z &= 0 \\ \Delta \underline{H}_z + \underline{k}^2 \underline{H}_z &= 0 .\end{aligned}$$

- An der Grenzfläche zwischen den zwei Medien müssen die Stetigkeits- bzw. die Randbedingungen erfüllt sein.

# Produktansatz von Bernoulli (I)

- Die Lösung der Wellengleichung kann elegant über den Produktansatz von Bernoulli (auch Separationsansatz) gefunden werden.
- Dazu nehmen wir für die transversale Feldverteilung an, dass  $F(x, y) = X(x)Y(y)$ , d. h.

$$\underline{E}_z = \underline{E}_{z,0} \underline{X}^E(x) \underline{Y}^E(y) \exp(-j \underline{k}_z^E z)$$
$$\underline{H}_z = \underline{H}_{z,0} \underline{X}^H(x) \underline{Y}^H(y) \exp(-j \underline{k}_z^H z)$$

- Eingesetzt in die Helmholtzgleichung ergeben sich für die  $E$ - und die  $H$ -Welle jeweils Gleichungen der Form

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \underline{k}^2 - \underline{k}_z^2 = 0$$

# Produktansatz von Bernoulli (II)

- Diese Gleichungen lassen sich mit  $\underline{k}_x^2 + \underline{k}_y^2 = \underline{k}^2 - \underline{k}_z^2$  in zwei homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung separieren:

$$\frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial x^2} + \underline{k}_x^2 \underline{X}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \underline{Y}}{\partial y^2} + \underline{k}_y^2 \underline{Y}(y) = 0 .$$

- Im Allgemein lautet deren Lösung

$$\underline{X}(x) = \begin{cases} \underline{a} \sin(\underline{k}_x x) + \underline{b} \cos(\underline{k}_x x) & \forall \quad \underline{k}_x \neq 0 \\ \underline{a}_0 + \underline{b}_0 x & \forall \quad \underline{k}_x = 0 \end{cases}$$

$$\underline{Y}(y) = \begin{cases} \underline{c} \sin(\underline{k}_y y) + \underline{d} \cos(\underline{k}_y y) & \forall \quad \underline{k}_y \neq 0 \\ \underline{c}_0 + \underline{d}_0 y & \forall \quad \underline{k}_y = 0 . \end{cases}$$

# Vorlesungsinhalte

1. Kanalwellenleiter

**2. Moden im Rechteckhohlleiter**

3. Ausbreitungskonstanten im Rechteckhohlleiter

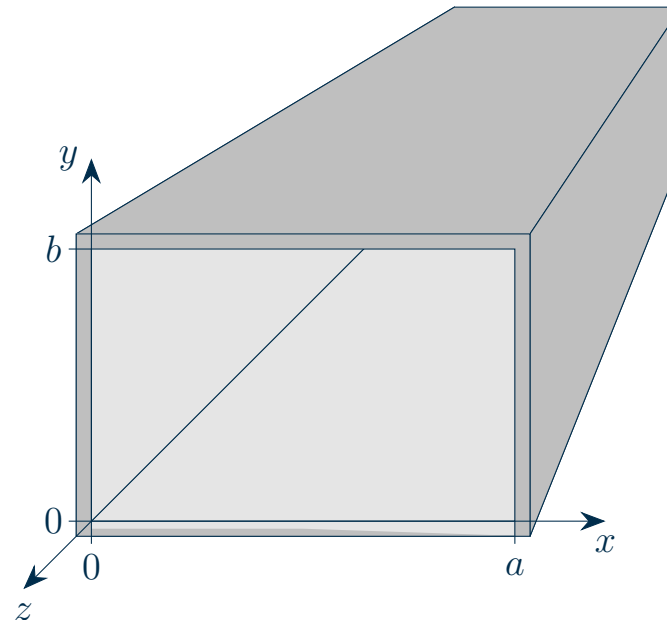
4. Was Sie gelernt haben sollten

**5. Anhang**

Existenz transversalelektromagnetischer Wellen  
Vollständigkeit der E- & H-Wellen bei ideal leitenden Wänden

# Geometrie des Rechteckhohlleiters

- Als Beispiel für einen Kanalwellenleiter betrachten wir einen Rechteckhohlleiter der Breite  $a$  und Höhe  $b$ .
- Wir nehmen an, dass die Wände des Hohlleiters ideal leitend sind ( $\kappa \rightarrow \infty$ ) und in seinem Inneren ein Vakuum herrscht (d. h.  $\kappa = 0$  und  $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ ).



# E-Wellen im Rechteckhohlleiter

- Gemäß den Randbedingungen müssen die tangentialen elektrischen Feldkomponenten an den Wänden verschwinden

$$\begin{aligned}\underline{E}_z(x = 0, y, z) &= \underline{E}_z(x = a, y, z) = 0 \\ \underline{E}_z(x, y = 0, z) &= \underline{E}_z(x, y = b, z) = 0.\end{aligned}$$

- Nichttriviale Lösungen, d. h. Lösungen die von der Nulllösung abweichen, ergeben sich daher gemäß Folie 14 für  $\underline{b} = \underline{d} = 0$  mit  $\underline{k}_x = m\pi/a$  und  $\underline{k}_y = n\pi/b$ , wobei  $m, n \in \mathbb{N}$ , also  $m, n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ .
- Im Allgemeinen erhalten wir damit für E-Wellen Lösungen der Form

$$\underline{E}_z(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{E}_z^{m,n}(x, y, z)$$

mit

$$\underline{E}_z^{m,n}(x, y, z) = \underline{E}_{z,0}^{m,n} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-j \underline{k}_{z,m,n}z) .$$

# H-Wellen im Rechteckhohlleiter

- Auch für H-Wellen müssen die tangentialen elektrischen Feldkomponenten an den Wänden verschwinden.
- Daraus folgt mit Folie 10

$$\left. \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \right|_{x=0,y,z} = \left. \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \right|_{x=a,y,z} = 0 \quad \text{sowie} \quad \left. \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \right|_{x,y=0,z} = \left. \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \right|_{x,y=b,z} = 0 .$$

- Nichttriviale Lösungen ergeben sich daher gemäß Folie 14 für  $\underline{a} = \underline{c} = 0$  mit  $\underline{k}_x = \frac{m\pi}{a}$  und  $\underline{k}_y = \frac{n\pi}{b}$ , wobei  $m, n \in \mathbb{N}_0$ , also  $m, n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .
- Allerdings dürfen  $m$  und  $n$  nicht gleichzeitig null sein, andernfalls wäre  $\underline{H}_z = \text{const}$  wodurch das zugehörige E-Feld verschwinden würde - eine Wellenausbreitung wäre nicht mehr möglich.
- Für H-Wellen erhalten wir also Lösungen der Form

$$\underline{H}_z(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{\infty} \underline{H}_z^{m,n}(x, y, z)$$

mit

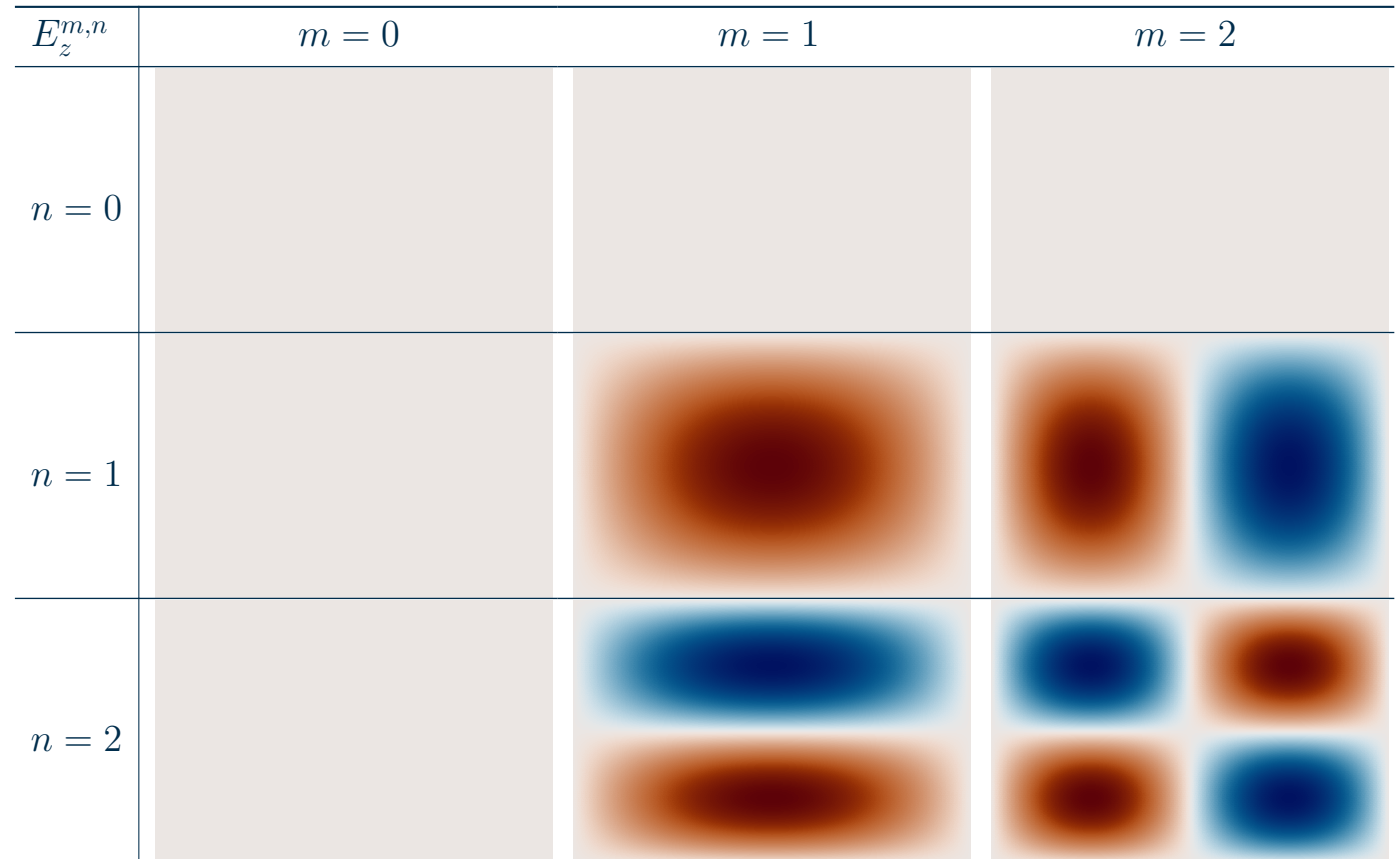
$$\underline{H}_z^{m,n}(x, y, z) = \underline{H}_{z,0}^{m,n} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-j \underline{k}_{z,m,n}z) .$$

# Moden im Wellenleiter

- Eine Mode (lat. Modus) in einem Wellenleiter bezeichnet eine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für  $\underline{E}$  und  $\underline{H}$  unter gegebenen Rand- bzw. Stetigkeitsbedingungen, deren transversale Feldverteilung sich während der Ausbreitung nicht ändert.
- In Kanalwellenleitern mit endlichen Abmessungen ist abhängig von der Frequenz eine endliche Zahl an Moden ausbreitungsfähig.
- Die Menge der Moden (lat. Modi) bildet ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bzw. eine orthogonale Modenbasis.
- Jede im Wellenleiter ausbreitungsfähige Feldverteilung kann als gewichtete Überlagerung von Einzelmoden dargestellt werden.
- Nicht jede Mode wird im Wellenleiter geführt, es können ggf. auch Strahlungsmoden existieren, welche nach außen abgestrahlt werden.

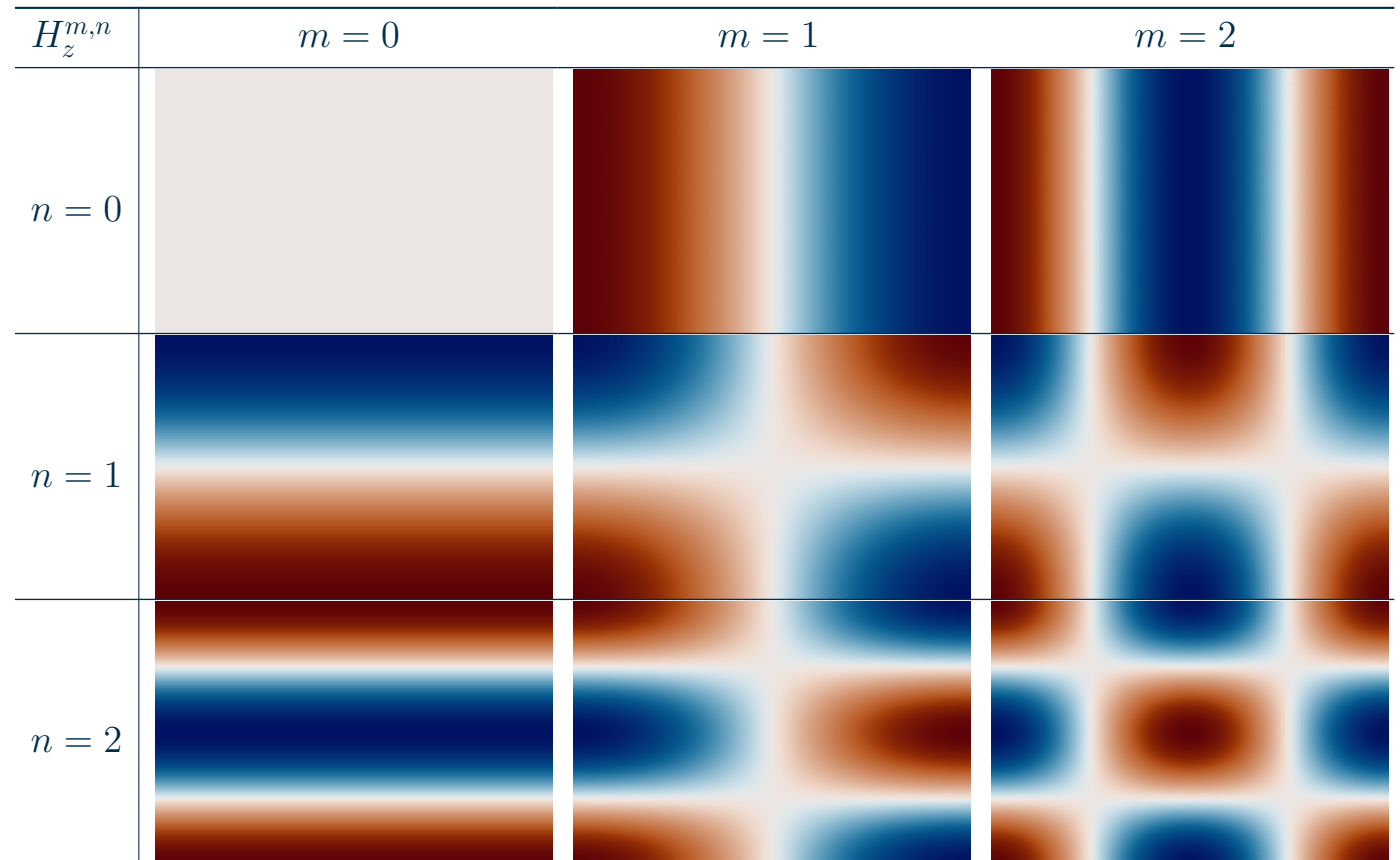
# Moden der E-Wellen im Rechteckhohlleiter

- Die Tabelle zeigt die transversalen Feldbilder  $E_z^{m,n} = \Re\{E_z^{m,n}\}$  der ersten vier Moden der E-Welle in der Ebene  $z = 0$  für  $a/b = 3/2$ .
- Je kräftiger der Rotton, desto positiver der dargestellte Wert, je kräftiger der Blauton, desto negativer.
- Offenbar bestimmt...
  - ...  $m$  die Anzahl der *Extrema* entlang der horizontalen  $x$ -Achse.
  - ...  $n$  die Anzahl der *Extrema* entlang der vertikalen  $y$ -Achse.
- Zudem erkennen wir, dass  $E_z^{m,n}$  als Tangentialkomponente an den Hohlleiterwänden stets verschwindet.



# Moden der H-Wellen im Rechteckhohlleiter

- Die Tabelle zeigt die transversalen Feldbilder  $H_z^{m,n} = \Re\{H_z^{m,n}\}$  der ersten acht Moden der H-Welle in der Ebene  $z = 0$  für  $a/b = 3/2$ .
- Je kräftiger der Rotton, desto positiver der dargestellte Wert, je kräftiger der Blauton, desto negativer.
- Offenbar bestimmt...
  - ...  $m$  die Anzahl der *Nullstellen* entlang der horizontalen  $x$ -Achse.
  - ...  $n$  die Anzahl der *Nullstellen* entlang der vertikalen  $y$ -Achse.
- Als Tangentialkomponente ist  $H_z^{m,n}$  an den Hohlleiterwänden im Allgemeinen von null verschieden.



# Vorlesungsinhalte

1. Kanalwellenleiter

2. Moden im Rechteckhohlleiter

**3. Ausbreitungskonstanten im Rechteckhohlleiter**

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

Existenz transversalelektromagnetischer Wellen  
Vollständigkeit der E- & H-Wellen bei ideal leitenden Wänden

# Ausbreitungskonstante und Grenzfrequenz

- Bei der Lösung der skalaren Helmholtz-Gleichung haben wir für die transversale Wellenzahl die Bedingung  $\underline{k}_t^2 = \underline{k}^2 - \underline{k}_z^2 = \underline{k}_x^2 + \underline{k}_y^2$  erhalten.
- Im Rechteckhohlleiter mit  $\underline{k} = k_0 = \omega/c_0$  erhalten wir daraus für eine gegebene Kombination der Indizes  $m$  und  $n$  die Ausbreitungskonstante

$$\underline{k}_{z,m,n} = \beta_{m,n} + j\alpha_{m,n} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \pm \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_{g,m,n}^2}.$$

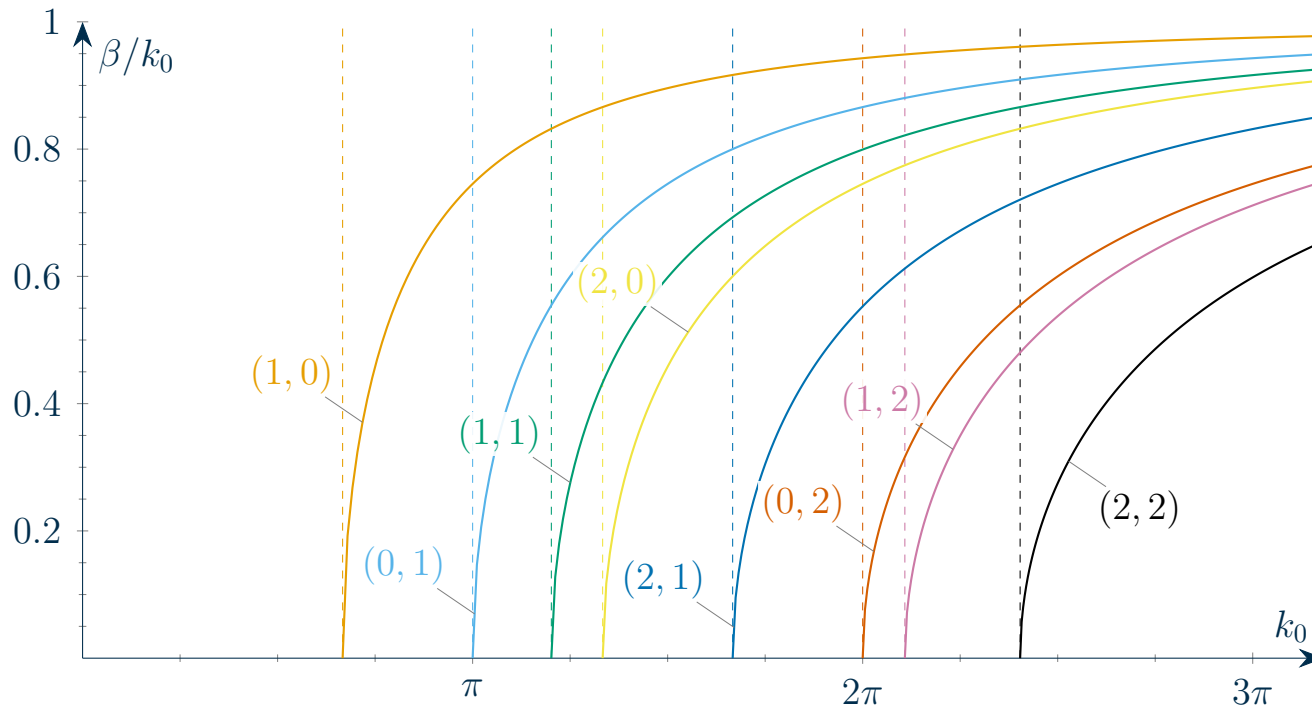
- *Achtung:* Wir nehmen nachfolgend Ausbreitung in  $+z$ -Richtung an, weshalb wir uns auf positives  $\underline{k}_{z,m,n}$  beschränken.
- Für Frequenzen größer der Grenzfrequenz, also für

$$\omega > \omega_{g,m,n} = \pi c_0 \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

wird der Term unter der Wurzel positiv und die Ausbreitungskonstante somit reellwertig, was einer verlustlosen Ausbreitung entspricht.

# Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungskonstante

- Die Abbildung zeigt die normierte Ausbreitungskonstante  $\beta/k_0$  als Funktion der Wellenzahl  $k_0 = \omega/c_0$  für  $a/b = 3/2$ .
- Die gestrichelten vertikalen Linien heben jeweils die normierten Grenzfrequenzen hervor.
- Für  $a/b > 1$  bzw.  $a/b < 1$  ist die  $H^{1,0}$ - bzw.  $H^{0,1}$ -Mode die Grundmode.



## Wichtig:

Für ein gegebenes Modenzahlpaar  $(m, n)$  sind die Ausbreitungskonstanten der E- und H-Moden im Rechteckhohlleiter identisch!

$\omega_{g,m,n}/c$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$n = 0$	-	2,0944	4,1888	6,2832
$n = 1$	3,1416	3,7757	5,2360	7,0248
$n = 2$	6,2832	6,6231	7,5515	8,8858
$n = 3$	9,4248	9,6547	10,3137	11,3272

# Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (I)

- Lösen wir für  $\omega > \omega_{g,m,n}$  den obigen Ausdruck für die Phasenkonstante nach  $\omega$  auf, so erhalten wir die Dispersionsrelation

$$\omega = \sqrt{\beta_{m,n}^2 c_0^2 + \omega_{g,m,n}^2} = \beta_{m,n} c_0 \sqrt{1 + \frac{\omega_{g,m,n}^2}{\beta_{m,n}^2 c_0^2}}.$$

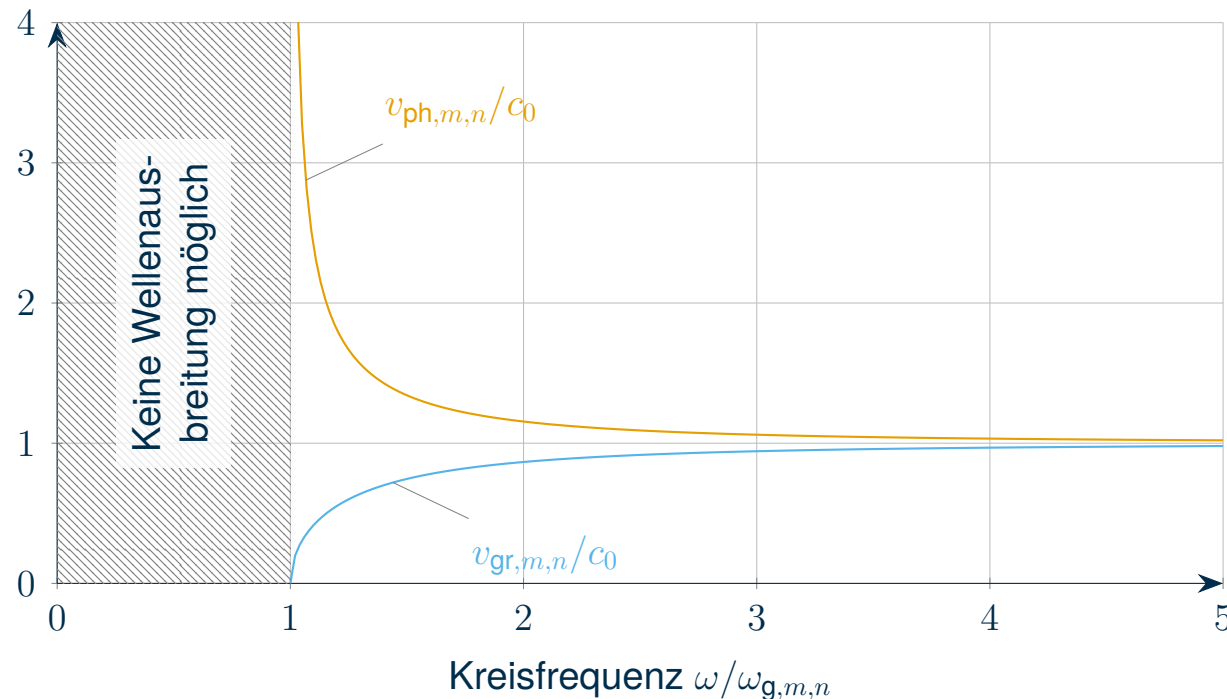
- Daraus ergeben sich nun die Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeit zu

$$v_{\text{ph},m,n} = \frac{\omega}{\beta_{m,n}} = c_0 \sqrt{1 + \frac{\omega_{g,m,n}^2}{\beta_{m,n}^2 c_0^2}} = c_0 \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{g,m,n}^2}}$$
$$v_{\text{gr},m,n} = \frac{d\omega}{d\beta_{m,n}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega_{g,m,n}^2}{\beta_{m,n}^2 c_0^2}}} = c_0 \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{g,m,n}^2}{\omega^2}}.$$

- Wir erhalten somit wie bei der Reflexion am Leiter  $v_{\text{ph},m,n} v_{\text{gr},m,n} = c_0^2$ .

# Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (II)

- Die Abbildung zeigt die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit normiert auf die Grenzfrequenz der jeweiligen Modenzahlen.
- Die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit verhält sich damit unabhängig von der Mode - bezogen auf die entsprechende Grenzfrequenz - exakt wie im Parallelplattenleiter.



# Vorlesungsinhalte

1. Kanalwellenleiter

2. Moden im Rechteckhohlleiter

3. Ausbreitungskonstanten im Rechteckhohlleiter

**4. Was Sie gelernt haben sollten**

5. Anhang

Existenz transversalelektromagnetischer Wellen  
Vollständigkeit der E- & H-Wellen bei ideal leitenden Wänden

# Was Sie gelernt haben sollten

- Was eine E- bzw. H-Welle ist und welche Rolle diese Unterscheidung für die Lösung der Maxwellschen Gleichungen in Kanalwellenleitern spielt.
- Wie wir die Wellengleichungen für die longitudinalen Feldkomponenten analytisch lösen können.
- Welche Randbedingungen im Rechteckhohlleiter erfüllt sein müssen und welche Lösungen wir daher für die longitudinalen Feldkomponenten der E- und H-Wellen erhalten.
- Was eine Mode ist und unter welchen Bedingungen sich die einzelnen Moden im Rechteckhohlleiter ausbreiten können.
- Welche Modenzahlen für die E- bzw. H-Wellen zulässig sind.
- Wie die Moden im Rechteckhohlleiter aussehen.
- Die Bedeutung der Grenzfrequenz für die Moden des Rechteckhohlleiters.
- Wie sich die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im Rechteckhohlleiter verhalten.

# Vorlesungsinhalte

1. Kanalwellenleiter

2. Moden im Rechteckhohlleiter

3. Ausbreitungskonstanten im Rechteckhohlleiter

4. Was Sie gelernt haben sollten

## 5. Anhang

Existenz transversalelektromagnetischer Wellen  
Vollständigkeit der E- & H-Wellen bei ideal leitenden Wänden

# Vorlesungsinhalte: Anhang

## 5. Anhang

Existenz transversalelektromagnetischer Wellen

Vollständigkeit der E- & H-Wellen bei ideal leitenden Wänden

# Transversalelektromagnetische Wellen (I)

- Bei transversalelektromagnetischen Wellen (TEM-Wellen) weisen das E- und das H-Feld keine Komponenten in Ausbreitungsrichtung auf, es gilt also  $\underline{E}_z = \underline{H}_z = 0$ .
- Wir betrachten nun zeitharmonische Wellen im nichtleitenden, homogenen Medium, die sich innerhalb des Rechteckhohlleiters von Folie 16 mit der Breite  $a$  und Höhe  $b$  in  $+z$ -Richtung ausbreiten, d. h. es gilt  $\kappa = 0, \varepsilon = \text{const}, \mu = \text{const}$  und  $\frac{\partial}{\partial z} = -j k_z$ .
- Dann erhalten wir aus dem Durchflutungs- bzw. Induktionsgesetz

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon\underline{\mathbf{E}} &\iff \begin{pmatrix} j k_z \underline{H}_y \\ -j k_z \underline{H}_x \\ \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = j\omega\varepsilon \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}} &\iff \begin{pmatrix} j k_z \underline{E}_y \\ -j k_z \underline{E}_x \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -j\omega\mu \begin{pmatrix} \underline{H}_x \\ \underline{H}_y \\ 0 \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

# Transversalelektromagnetische Wellen (II)

- Offenbar sind also  $\underline{E}_x$  und  $\underline{H}_y$  sowie  $\underline{E}_y$  und  $\underline{H}_x$  miteinander verknüpft, wobei gelten muss, dass

$$\underline{E}_x = \frac{k_z}{\omega \varepsilon} \underline{H}_y = \frac{\omega \mu}{k_z} \underline{H}_y$$
$$\underline{E}_y = -\frac{k_z}{\omega \varepsilon} \underline{H}_x = -\frac{\omega \mu}{k_z} \underline{H}_x .$$

- Diese Gleichungen sind nur erfüllt, wenn

$$k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = \frac{\omega^2}{c^2} = k^2, \text{ wobei } k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 .$$

- Demzufolge müssen die transversalen Wellenzahlen  $k_x$  und  $k_y$  gleich null sein - derartige Wellen breiten sich also parallel zur Wellenleiterachse aus.

# Lösungsansatz für die Helmholtz-Gleichung

- Setzen wir nun mit  $k_z = k$  beispielsweise für  $U = \underline{E}_{x,y}$  an, dass

$$\underline{U}(x, y, z, t) = X(x)Y(y) \exp(j(\omega t - kz)) ,$$

vereinfacht sich die Helmholtz-Gleichung für  $\underline{U}$  zu der Laplace-Gleichung

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 .$$

- Zur Separation der Variablen dividieren wir diese Gleichung durch das Produkt  $X(x)Y(y)$  und bringen die  $y$ -Abhängigkeit auf die rechte Seite:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = - \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} .$$

# Lösungen der Laplace-Gleichung

- Da die linke Seite nur von  $x$  und die rechte Seite nur von  $y$  abhängt, muss der Ausdruck zwingend einer Konstanten entsprechen, die wir als  $\pm m^2$  wählen.
- Die Wahl des positiven Vorzeichens  $+m^2$  für diese Konstante führt dabei auf das erste Lösungspaar, wohingegen das negative Vorzeichen  $-m^2$  die Funktionen des zweiten Paares liefert.
- Damit erhalten wir für  $X$  und  $Y$  die folgenden zwei fundamentalen Lösungsansätze für  $m \neq 0$ :

1. Lösung:

$$X_1(x) = c_1 \sinh(mx) + c_2 \cosh(mx)$$

$$Y_1(y) = c_3 \sin(my) + c_4 \cos(my)$$

2. Lösung:

$$X_2(x) = d_1 \sin(mx) + d_2 \cos(mx)$$

$$Y_2(y) = d_3 \sinh(my) + d_4 \cosh(my)$$

- Für den Fall  $m = 0$  würden wir Lösungen der Form  $X(x) = \alpha x + \beta$  bzw.  $Y(y) = \gamma y + \delta$  erhalten, welche jedoch die Randbedingungen für das tangential E-Feld nicht erfüllen können.

# Randbedingungen für $\underline{E}_x$

- Die Lösung der Laplace-Gleichung muss die Randbedingungen an den Hohlleiterwänden erfüllen, weshalb das tangentielle E-Feld unabhängig von  $x$  und  $z$  an den Wänden verschwinden muss.
- Wir fordern daher bei der Betrachtung von  $\underline{U} = \underline{E}_x$ , dass  $Y(y = 0) = Y(y = b) = 0$ .
- Betrachten wir zunächst den Lösungsansatz  $Y_2$ , folgt aus der Bedingung  $Y_2(y = 0) = 0$  direkt  $d_4 = 0$ .
- Da der Sinus hyperbolicus jedoch nur für  $y = 0$  verschwindet, kann die Bedingung  $Y_2(y = b) = 0$  ausschließlich für  $d_3 = 0$  erfüllt sein, wir erhalten also die Nulllösung  $Y_2(y) = 0$  (und damit keine Wellenausbreitung).
- Für  $Y_1$  folgt analog aus  $Y_1(y = 0) = 0$ , dass  $c_4 = 0$  gelten muss.
- Zudem fordern wir erneut, dass  $Y_1(y = b) = 0$ , womit wir mit der resultierenden Bedingung  $m = \frac{n\pi}{b}, n \in \mathbb{N}$  und  $c'_{1,2} = c_3 c_{1,2}$  schließlich folgenden Lösungsansatz erhalten

$$\underline{E}_x(x, y, z, t) = \left( c'_1 \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + c'_2 \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(j(\omega t - kz)) .$$

# Randbedingungen für $\underline{E}_y$

- Fordern wird nun die Erfüllung der Randbedingungen für  $\underline{E}_y$ , ergibt sich

$$X(x = 0) = X(x = a) = 0 .$$

- Analog zu der Untersuchung von  $\underline{E}_x$ , stellt hier nur der Lösungsansatz  $X_2$  eine nichttriviale Lösung dar.
- Mit  $X_2(x = 0) = 0$  bzw.  $X_2(x = a) = 0$  folgt dann  $d_2 = 0$  bzw.  $m = \frac{\ell\pi}{a}, \ell \in \mathbb{N}$ .
- Somit erhalten wir mit  $d'_{3,4} = d_1 d_{3,4}$  schließlich folgenden Lösungsansatz

$$\underline{E}_y(x, y, z, t) = \sin\left(\frac{\ell\pi}{a}x\right) \left( d'_3 \sinh\left(\frac{\ell\pi}{a}y\right) + d'_4 \cosh\left(\frac{\ell\pi}{a}y\right) \right) \exp(j(\omega t - kz)) .$$

# Validierung der Lösungsansätze

- Gemäß dem Induktionsgesetz müssen TEM-Wellen zudem die folgende Bedingung erfüllen

$$\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} = 0.$$

- Einsetzen liefert dann

$$\frac{\ell\pi}{a} \cos\left(\frac{\ell\pi}{a}x\right) \left( d'_3 \sinh\left(\frac{\ell\pi}{a}y\right) + d'_4 \cosh\left(\frac{\ell\pi}{a}y\right) \right) - \left( c'_1 \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + c'_2 \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \right) \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = 0.$$

- Diese Gleichung ist nur dann für alle  $x$  und  $y$  erfüllt, wenn  $\ell = n = 0$  oder  $d'_3 = d'_4 = c'_1 = c'_2 = 0$ .
- Unter diesen Bedingungen erhalten wir allerdings stets die Nulllösung, d. h.

$$\underline{E}_x(x, y, z, t) = \underline{E}_y(x, y, z, t) = 0.$$

- Damit haben wir nachgewiesen, dass im Rechteckhohlleiter keine TEM-Wellen existieren können.
- **Anmerkung:** Im Parallelplattenleiter fällt eine der Randbedingungen entlang  $x$  oder  $y$  weg, womit abhängig von der Geometrie eine Lösung der Form  $X = \text{const}$  oder  $Y = \text{const}$  zulässig wäre.

# Vorlesungsinhalte: Anhang

## 5. Anhang

Existenz transversalelektromagnetischer Wellen

Vollständigkeit der E- & H-Wellen bei ideal leitenden Wänden

# Motivation

- Bei der Betrachtung von Kanalwellenleitern mit ideal leitenden Wänden haben wir ohne Beweis angenommen, dass wir alle möglichen Wellenformen bzw. Lösungen entweder den E- oder H-Wellen zuordnen können.
- In diesem Abschnitt werden wir am Beispiel des Rechteckhohlleiters von Folie 16 mit der Breite  $a$  und Höhe  $b$  sehen, dass diese Annahme gerechtfertigt ist.
- Zu diesem Zweck ermitteln wir erneut die Bedingungen an die Feldverteilungen der Longitudinalkomponenten und untersuchen die erhaltenen Ergebnisse anschließend näher.

# Lösungsansatz

- Da wir ideal leitende Wände annehmen, müssen diese überall feldfrei sein.
- Innerhalb der Struktur müssen die Wellen stets die Helmholtz-Gleichung erfüllen und wir erhalten für die Longitudinalkomponenten des E- und H-Felds

$$\begin{aligned}\Delta \underline{E}_z + \underline{k}^2 \underline{E}_z &= 0 \\ \Delta \underline{H}_z + \underline{k}^2 \underline{H}_z &= 0 .\end{aligned}$$

- Gemäß dem Separationsansatz setzen wir zur Lösung der Helmholtzgleichungen an, dass

$$\begin{aligned}\underline{E}_z(x, y, z) &= \underline{E}_0 X^E(x) Y^E(y) \exp(-j \underline{k}_z^E z) \\ \underline{H}_z(x, y, z) &= \underline{H}_0 X^H(x) Y^H(y) \exp(-j \underline{k}_z^H z) .\end{aligned}$$

- Im nächsten Schritt fordern wir, dass diese beiden Lösungsansätze die bekannten Grenzbedingungen aus Vorlesung 6 erfüllen.

# Betrachtung der Stetigkeitsbedingungen: $z$ (I)

- Die Longitudinalkomponenten des E-Feldes müssen folgenden Bedingungen genügen

$$\underline{E}_z(x = 0, y, z) = 0$$

$$\underline{E}_z(x = a, y, z) = 0$$

$$\underline{E}_z(x, y = 0, z) = 0$$

$$\underline{E}_z(x, y = b, z) = 0$$

- Setzen wir nun den Ansatz für  $\underline{E}_z$  bzw.  $\underline{H}_z$  ein, erhalten wir

$$\underline{E}_0 X^E(x = 0) Y^E(y) \exp(-j k_z^E z) = 0$$

$$\underline{E}_0 X^E(x = a) Y^E(y) \exp(-j k_z^E z) = 0$$

$$\underline{E}_0 X^E(x) Y^E(y = 0) \exp(-j k_z^E z) = 0$$

$$\underline{E}_0 X^E(x) Y^E(y = b) \exp(-j k_z^E z) = 0.$$

- Die einfachste Lösung stellt hierbei der Fall  $\underline{E}_0 = 0$  dar, welcher jedoch gerade auf eine TE- bzw. H-Welle mit  $\underline{E}_z = 0$  führt.
- Im Folgenden gehen wir nun von  $\underline{E}_0 \neq 0$  aus. Da die Bedingungen für alle  $x$ ,  $y$  und  $z$  gelten müssen, schlussfolgern wir, dass

$$X^E(x = 0) = X^E(x = a) = 0 \quad \text{und} \quad Y^E(y = 0) = Y^E(y = b) = 0.$$

# Betrachtung der Stetigkeitsbedingungen: $z$ (II)

- Anhand dieser Bedingungen können wir bereits die zulässigen transversalen Feldverteilungen von  $\underline{E}_z$  bis auf einen beliebigen Vorfaktor  $\underline{E}_0$  bestimmen.
- Neben der longitudinalen elektrischen Feldkomponente können wir auch das magnetische Feld in Ausbreitungsrichtung betrachten.
- Das tangentiale H-Feld ruft dabei gemäß der Grenzbedingungen einen Oberflächenstrom hervor, der senkrecht zu dem H-Feld orientiert ist.
- Dementsprechend erhalten wir für den Lösungsansatz von  $\underline{H}_z$  keine Bedingungen aus der Stetigkeitsforderung.

# Betrachtung der Stetigkeitsbedingungen: $x$ (I)

- An den Leiterflächen mit  $y = 0$  und  $y = b$  ist auch  $\underline{E}_x$  Tangentialkomponente des E-Felds.
- Dementsprechend fordern wir gemäß Folie 11

$$\underline{E}_x(x, y = 0, z) = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left( \left. \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right|_{y=0} + \frac{\omega \mu}{\underline{k}_z} \left. \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \right|_{y=0} \right) = 0$$
$$\underline{E}_x(x, y = b, z) = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left( \left. \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right|_{y=b} + \frac{\omega \mu}{\underline{k}_z} \left. \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \right|_{y=b} \right) = 0 .$$

- Nun betrachten wir zunächst nun die auftretenden Ableitungen

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = \underline{E}_0 \frac{\partial X^E(x)}{\partial x} Y^E(y) \exp(-j \underline{k}_z^E z)$$
$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = \underline{H}_0 X^H(x) \frac{\partial Y^H(y)}{\partial y} \exp(-j \underline{k}_z^H z) .$$

# Betrachtung der Stetigkeitsbedingungen: $x$ (II)

- Mit  $Y^E(y=0) = Y^E(y=b) = 0$  erhalten wir somit

$$\left. \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right|_{y=b} = 0$$

und die Stetigkeitsbedingungen für  $\underline{E}_x$  vereinfachen sich zu

$$\underline{E}_x(x, y=0, z) = -j \frac{\omega \mu}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \underline{H}_0 X^H(x) \left. \frac{\partial Y^H(y)}{\partial y} \right|_{y=0} \exp(-j \underline{k}_z^H z) = 0$$
$$\underline{E}_x(x, y=b, z) = -j \frac{\omega \mu}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \underline{H}_0 X^H(x) \left. \frac{\partial Y^H(y)}{\partial y} \right|_{y=b} \exp(-j \underline{k}_z^H z) = 0.$$

- Die einfachste Lösung stellt hierbei der Fall  $\underline{H}_0 = 0$  dar, welcher jedoch gerade auf eine TM- bzw. E-Welle mit  $\underline{H}_z = 0$  führt.

# Betrachtung der Stetigkeitsbedingungen: $x$ (III)

- Im Folgenden gehen wir allerdings von  $\underline{H}_0 \neq 0$  aus. Da die beiden Bedingungen in  $y = 0$  und  $y = b$  für alle  $x$  und  $z$  gelten müssen, schlussfolgern wir, dass

$$\left. \frac{\partial Y^H(y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial Y^H(y)}{\partial y} \right|_{y=b} = 0.$$

- Somit erhalten wir eine Bedingung für die  $y$ -Abhängigkeit  $Y^H(y)$  von  $\underline{H}_z$ .
- An den Leiterflächen mit  $x = 0$  und  $x = a$  ist außerdem  $\underline{H}_x$  Normalkomponente des H-Felds und muss damit verschwinden.
- Dementsprechend fordern wir gemäß Folie 11

$$\underline{H}_x(x = 0, y, z) = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left( \left. \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \right|_{x=0} - \frac{\omega \underline{\epsilon}}{\underline{k}_z} \left. \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \right|_{x=0} \right) = 0$$
$$\underline{H}_x(x = a, y, z) = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \left( \left. \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \right|_{x=a} - \frac{\omega \underline{\epsilon}}{\underline{k}_z} \left. \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \right|_{x=a} \right) = 0.$$

# Betrachtung der Stetigkeitsbedingungen: $x$ (IV)

- Analoges Vorgehen wie für  $\underline{E}_x$  führt dann wegen  $X^E(x=0) = X^E(x=a) = 0$  auf

$$\underline{H}_x(x=0, y, z) = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \underline{H}_0 \frac{\partial X^H(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} Y^H(y) \exp(-j \underline{k}_z^H z) = 0$$

$$\underline{H}_x(x=a, y, z) = -j \frac{\underline{k}_z}{\underline{k}^2 - \underline{k}_z^2} \underline{H}_0 \frac{\partial X^H(x)}{\partial x} \Big|_{x=a} Y^H(y) \exp(-j \underline{k}_z^H z) = 0.$$

- Da die beiden Bedingungen in  $x=0$  und  $x=a$  für alle  $y$  und  $z$  gelten müssen, schlussfolgern wir, dass

$$\frac{\partial X^H(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial X^H(x)}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0.$$

- Somit haben wir auch eine Bedingung für die  $x$ -Abhängigkeit  $X^H(x)$  von  $\underline{H}_z$  erhalten, womit wir die transversalen Verteilungen von  $\underline{H}_z$  bis auf eine beliebige Amplitude  $\underline{H}_0$  bestimmen können.
- Würden wir analog für die  $y$ -Komponenten des E- und H-Felds vorgehen, würden wir äquivalente Bedingungen erhalten.

# Diskussion

- Die Stetigkeitsbedingungen im Rechteckhohlleiter mit ideal leitenden Wänden sind folglich genau dann erfüllt, wenn

$$\underline{E}_0 = 0 \quad \text{oder} \quad X^E(x=0) = X^E(x=a) = Y^E(y=0) = Y^E(y=b) = 0$$

sowie

$$\underline{H}_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \left. \frac{\partial X^H(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial X^H(x)}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial Y^H(y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial Y^H(y)}{\partial y} \right|_{y=b} = 0.$$

- Für  $\underline{E}_0 = 0$  und  $\underline{H}_0 = 0$  würde sich keine Welle ausbreiten.
- Offenbar besteht also keine Abhängigkeit zwischen  $\underline{E}_0$  und  $\underline{H}_0$ , die Feldkomponenten  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  sind voneinander unabhängig.
- Da im Rechteckhohlleiter keine TEM-Wellen ausbreitungsfähig sind, kann jede mögliche Wellenform als Überlagerung von E- und H-Wellen dargestellt werden.

# Anmerkung: Oberflächenladungen & -ströme

- Bislang haben wir lediglich die Grenzbedingungen für das tangentielle E-Feld und das normale H-Feld betrachtet.
- In Vorlesung 6 haben wir jedoch auch die Bedingungen für die Normalkomponente der Verschiebungsdichte bzw. für die Tangentialkomponente der magnetischen Flussdichte hergeleitet.
- Anhand dieser beiden Grenzbedingungen könnten wir nun auf Basis der zulässigen Lösungen für  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  sowohl die Oberflächenströme als auch die Oberflächenladungen auf den Leiterflächen bestimmen.