

# EMFW Vorlesung 10: Dielektrischer Schichtwellenleiter (I)

Wintersemester 2025/26

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel | 3. Februar 2026

# Vorlesungsinhalte

## 1. Dielektrischer Schichtwellenleiter

## 2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter

## 3. Eigenwertgleichung des dielektrischen Schichtwellenleiters

## 4. Was Sie gelernt haben sollten

## 5. Anhang

Brechungsgesetz für komplexwertige Wellenzahlen

Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion

Alternative Herleitung der Ausbreitungsbedingung

# Vorlesungsinhalte

## 1. Dielektrischer Schichtwellenleiter

## 2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter

## 3. Eigenwertgleichung des dielektrischen Schichtwellenleiters

## 4. Was Sie gelernt haben sollten

## 5. Anhang

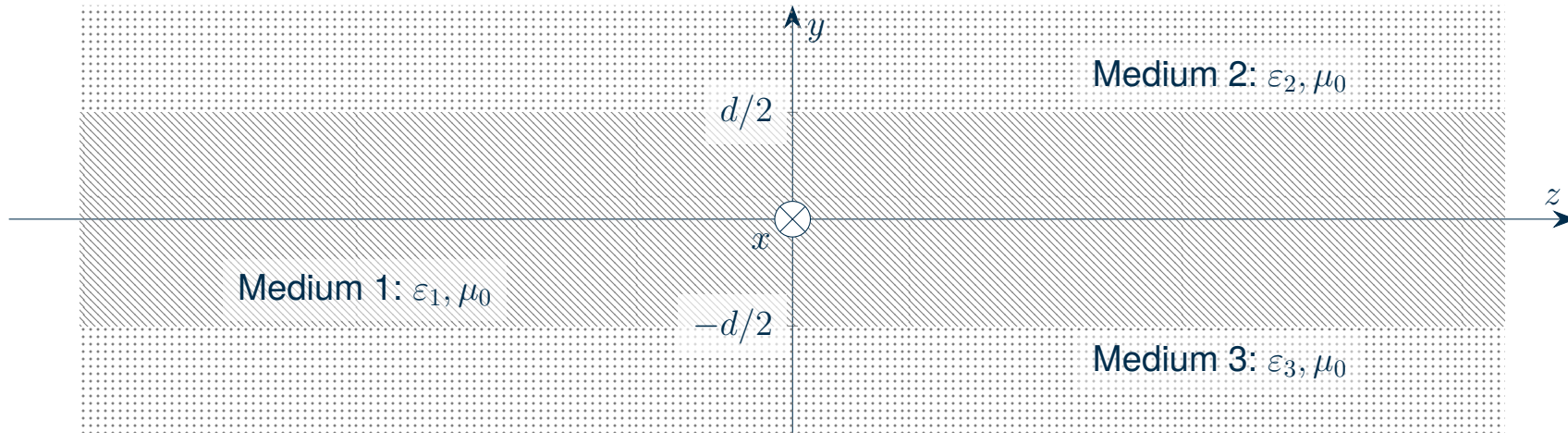
Brechungsgesetz für komplexwertige Wellenzahlen

Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion

Alternative Herleitung der Ausbreitungsbedingung

# Dielektrischer Schichtwellenleiter

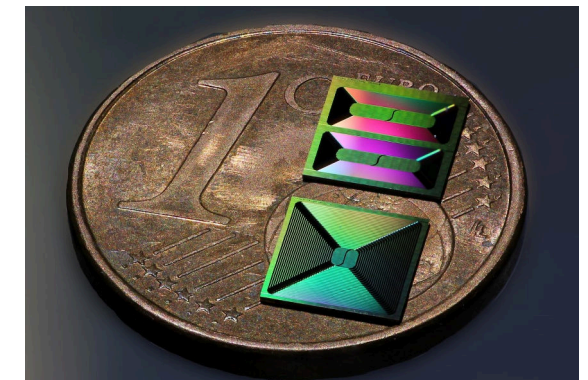
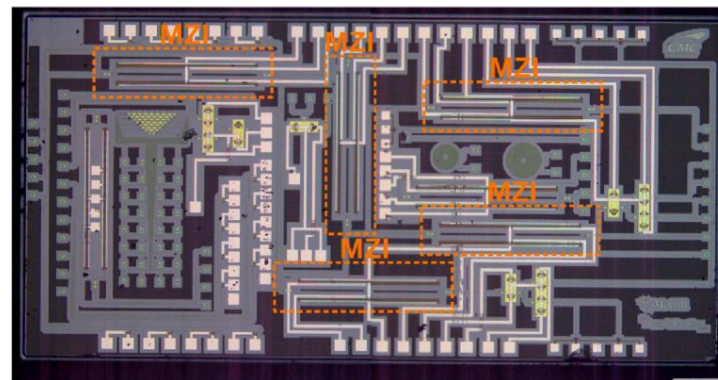
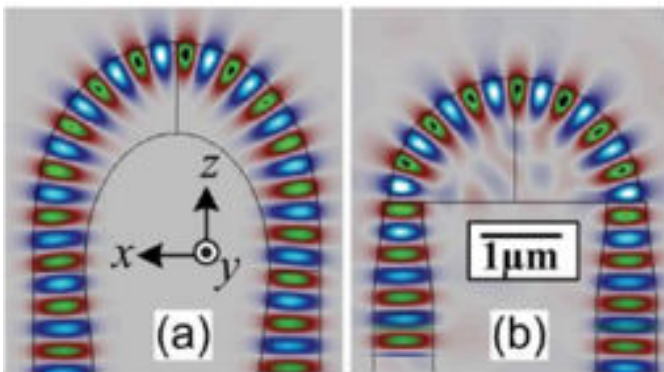
- Wie der Parallelplattenleiter gehört der dielektrische Schichtwellenleiter zur Klasse der Dreischichtenprobleme.



- Der Wellenleiter sei in der  $xz$ -Ebene unendlich ausgedehnt und habe eine Dicke  $d$ .
- Alle Schichten seien nichtleitend, d. h.  $\kappa = 0$ , frei von Raumladungen, d. h.  $\varrho = 0$ , und haben die Permeabilität  $\mu = \mu_0$ .
- Die elektrische Permittivität in der Schicht  $i \in \{1, 2, 3\}$  sei  $\varepsilon_i = \varepsilon_{r,i}\varepsilon_0 = n_i^2\varepsilon_0$  mit der Brechzahl  $n_i$  (oft auch Brechungsindex genannt).
- Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden auf den Fall  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \iff n_2 = n_3$ .

# Dielektrische Wellenleiter in der Praxis

- Der dielektrische Schichtwellenleiter ist die einfachste Form eines optischen Wellenleiters und kann aufgrund der unendlichen transversalen Ausdehnung in der Praxis nicht existieren.
- In photonischen integrierten Schaltungen (PICs) kommen meist dielektrische Wellenleiter mit rechteckigem Querschnitt zum Einsatz.
- Analog zu integrierten Schaltkreisen in der Elektronik, bezeichnen PICs photonische Mikrochips, die Lichtsignale erzeugen, verarbeiten, transportieren und empfangen.
- Anwendungsbereiche von PICs: optische Kommunikationstechnik, Messtechnik (Lidar, optische Kohärenztomographie), Biophotonik zur medizinischen Diagnostik, Quantencomputer, uvm.



# Vorlesungsinhalte

1. Dielektrischer Schichtwellenleiter

**2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter**

3. Eigenwertgleichung des dielektrischen Schichtwellenleiters

4. Was Sie gelernt haben sollten

**5. Anhang**

Brechungsgesetz für komplexwertige Wellenzahlen

Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion

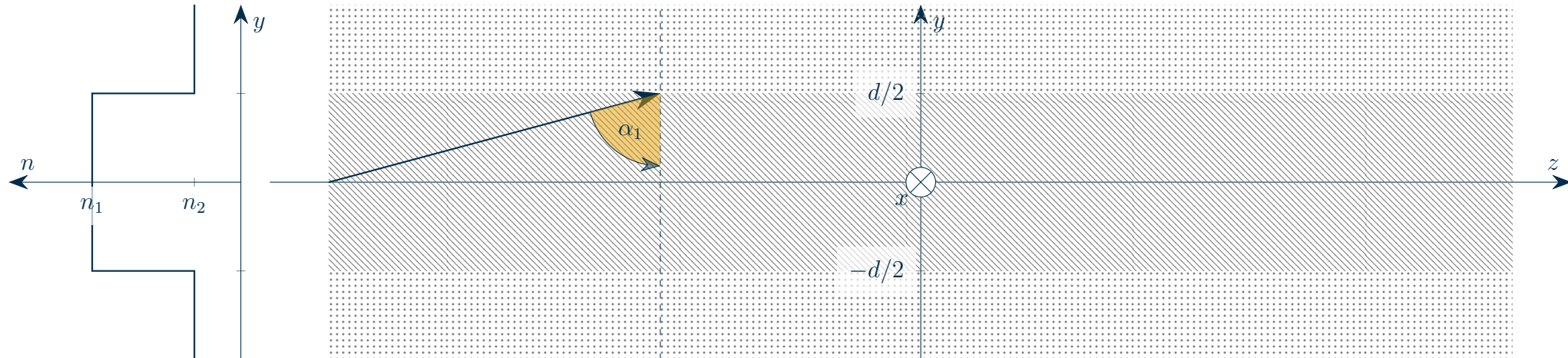
Alternative Herleitung der Ausbreitungsbedingung

# Einführung

- Nachdem wir uns in den letzten Vorlesungen den Hohlleitern mit ideal leitenden Wänden gewidmet haben, beschäftigen wir uns nun mit dielektrischen Wellenleitern.
- Die Führung elektromagnetischer Wellen in dielektrischen Wellenleitern basiert auf dem Prinzip der Totalreflexion, das wir in Vorlesung 06 kennengelernt haben.
- Folglich müssen die Materialien dieser Wellenleiter so gewählt werden, dass der Bereich, in dem die Welle geführt werden soll, eine größere Brechzahl als die umliegenden Strukturen aufweist.
- Um zu verstehen, unter welchen Bedingungen Wellen in diesem Wellenleiter ausbreitungsfähig sind, beschreiben wir analog zu Vorlesung 08 die Wellenausbreitung zunächst durch ebene Wellen, die den Wellenleiter entlang eines Zick-Zack-Pfades durchlaufen.

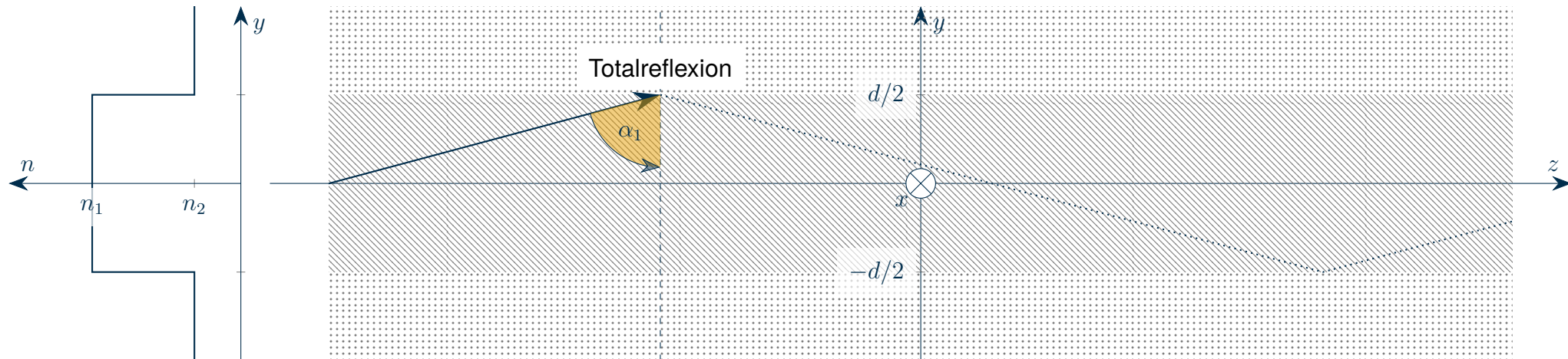
# Wellenausbreitung im Schichtwellenleiter

- Im Folgenden betrachten wir eine harmonische ebene Welle, die unter einem Winkel  $\alpha_1$  innerhalb des Wellenleiters auf die Grenzfläche trifft.
- Die Wellenführung ist nur dann möglich, wenn die Welle innerhalb der wellenführenden Schicht hin und her reflektiert wird.
- Demnach muss an der Grenzfläche vollständige Reflexion bzw. Totalreflexion auftreten.
- Für die Wellenzahl innerhalb bzw. außerhalb der Platte gilt  $k_{1,2} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_{1,2}} = \frac{\omega}{c_0} n_{1,2} = k_0 n_{1,2}$ .



# Wellenausbreitung im Schichtwellenleiter

- Im Folgenden betrachten wir eine harmonische ebene Welle, die unter einem Winkel  $\alpha_1$  innerhalb des Wellenleiters auf die Grenzfläche trifft.
- Die Wellenführung ist nur dann möglich, wenn die Welle innerhalb der wellenführenden Schicht hin und her reflektiert wird.
- Demnach muss an der Grenzfläche vollständige Reflexion bzw. Totalreflexion auftreten.
- Für die Wellenzahl innerhalb bzw. außerhalb der Platte gilt  $k_{1,2} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_{1,2}} = \frac{\omega}{c_0} n_{1,2} = k_0 n_{1,2}$ .



# Grenzwinkel der Totalreflexion (Wdh.)

- Beim Übergang von einem Medium  $n = n_1$  mit höherem Brechungsindex (optisch dichter) zu einem Medium  $n = n_2$  mit geringerem Brechungsindex (optisch dünner), kann - für hinreichend große Einfallswinkel gegenüber der Grenzflächennormalen  $\alpha_1$  - Totalreflexion auftreten.
- Gemäß dem Snelliusschen Brechungsgesetz gilt für den Transmissionswinkel  $\alpha_2$

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1 .$$

- Wegen  $n_1 > n_2$  existiert ein kritischer Winkel  $\alpha_1 = \alpha_{\text{krit}}$  mit

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_{\text{krit}} = 1 \quad \iff \quad \alpha_{\text{krit}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) .$$

- Aufgrund der Monotonie des Sinus beobachten wir für alle Einfallswinkel  $\alpha_1 \geq \alpha_{\text{krit}}$  Totalreflexion.
- Insbesondere wird der Winkel  $\alpha_2 = \underline{\alpha}_2$  für  $\alpha_1 > \alpha_{\text{krit}}$  komplexwertig mit einem Realteil von  $90^\circ$ .
- Bei Totalreflexion breitet sich der „transmittierte“ Teil der Welle also entlang der Grenzfläche aus.

# Vorlesungsinhalte

1. Dielektrischer Schichtwellenleiter

2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter

**3. Eigenwertgleichung des dielektrischen Schichtwellenleiters**

4. Was Sie gelernt haben sollten

5. Anhang

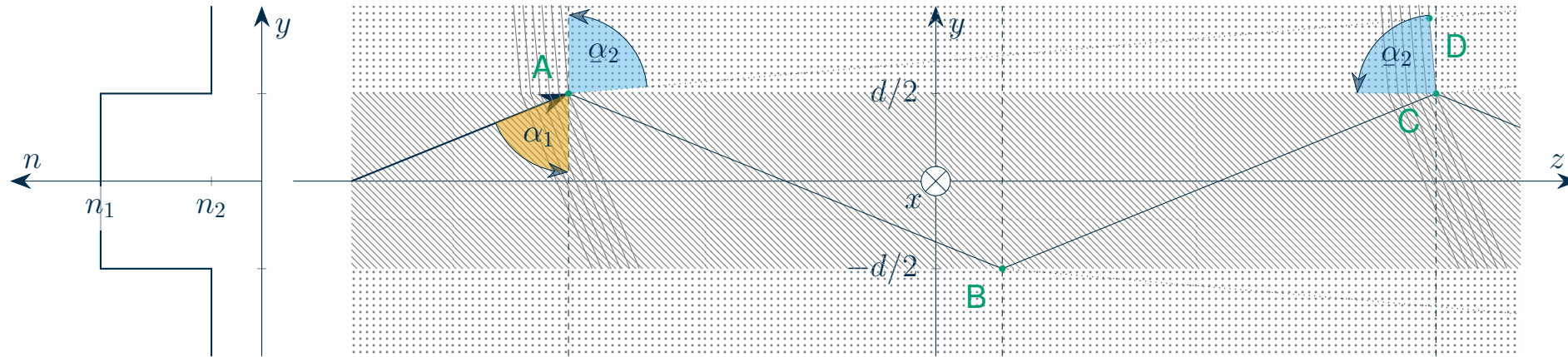
Brechungsgesetz für komplexwertige Wellenzahlen

Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion

Alternative Herleitung der Ausbreitungsbedingung



# Ausbreitungsbedingung (II)



- Also muss die akkumulierte Phasendrehung auf dem Pfad  $\overline{ABC}$  durch die wellenführende Schicht (Reflexion in A und B) sowie dem direkten Pfad  $\overline{AD}$  entlang der Grenzfläche in Medium 2 bis auf ein ganzzahliges Vielfaches  $m$  von  $2\pi$  identisch sein:

$$\arg\{\underline{r}\} + \overline{AB}k_1 + \arg\{\underline{r}\} + \overline{BC}k_1 = \overline{AD}k_2 + m 2\pi .$$

- Hier bezeichnet  $\underline{r}$  den Reflexionskoeffizienten gemäß den Fresnelschen Beziehungen.

# Geom. Betrachtung Ausbreitungsbedingung

- Aus den trigonometrischen Beziehungen erhalten wir direkt

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{d}{\cos(\alpha_1)} \quad \text{und} \quad \overline{AC} = 2d \tan(\alpha_1).$$

- In dem Medium 2 breitet sich die Welle unter dem komplexwertigen Winkel  $\underline{\alpha}_2$  gegenüber der Grenzflächennormalen aus (die Vektoren  $\underline{DC}$  und  $\underline{DA}$  schließen einen rechten Winkel ein)

$$\overline{AD} = \overline{AC} \sin(\underline{\alpha}_2) = 2d \frac{n_1 \sin^2(\alpha_1)}{n_2 \cos(\alpha_1)} = 2d \frac{n_1 (1 - \cos^2(\alpha_1))}{n_2 \cos(\alpha_1)} = \frac{n_1}{n_2} \frac{2d}{\cos(\alpha_1)} - \frac{n_1}{n_2} 2d \cos(\alpha_1).$$

- Damit können wir die Bedingung für die Wellenführung (Ausbreitungsbedingung) vereinfachen zu

$$\arg\{r\} = -d k_1 \cos(\alpha_1) + m \pi.$$

- Alternativ können wir diese Beziehung auch über die Welle innerhalb der Schicht mit  $n = n_1$  bestimmen, siehe dazu Folie 32 im Anhang.

# Wdh.: Fresnelsche Beziehungen (I)

- Die Fresnelschen Beziehungen für die Reflexionskoeffizienten für senkrechte bzw. parallele Polarisation haben wir in der Vorlesung zu ebenen Wellen an Grenzflächen hergeleitet als

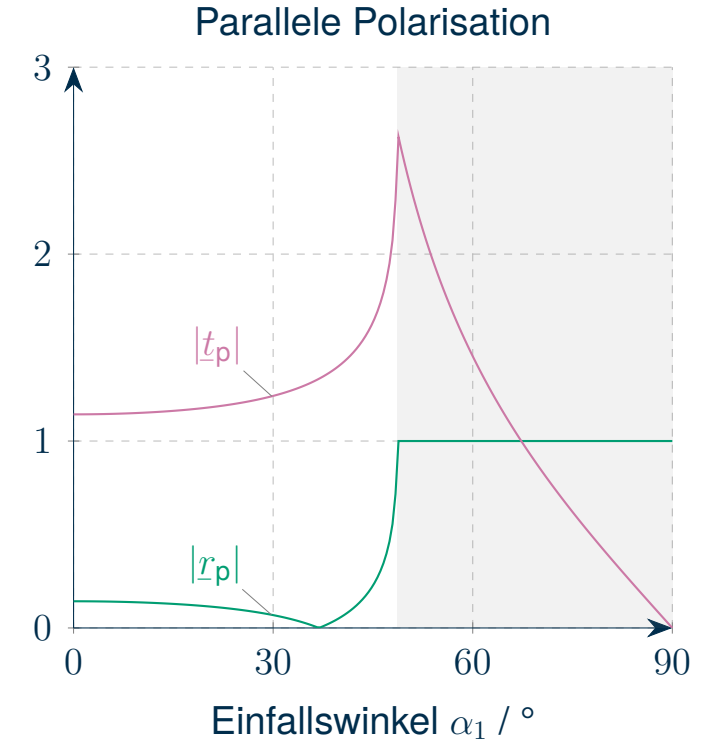
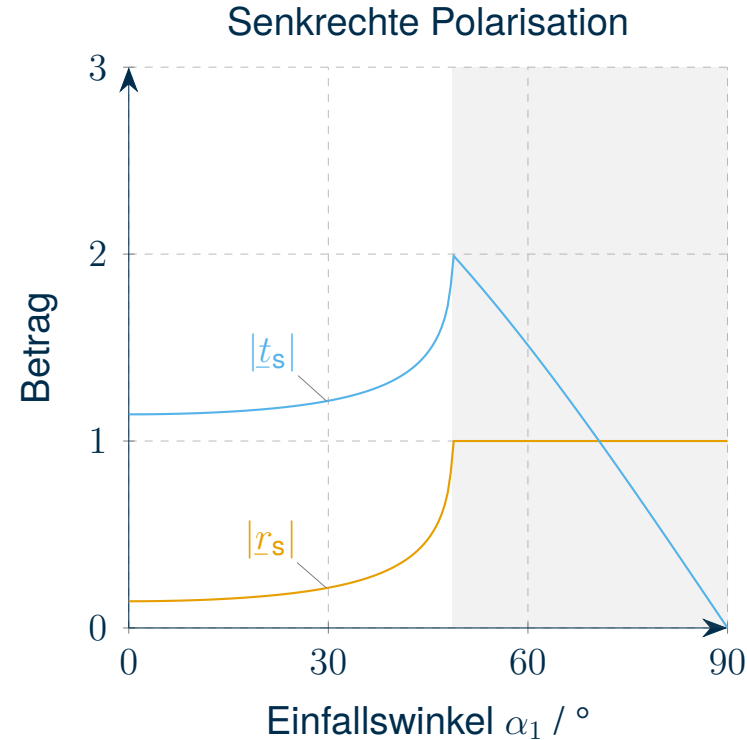
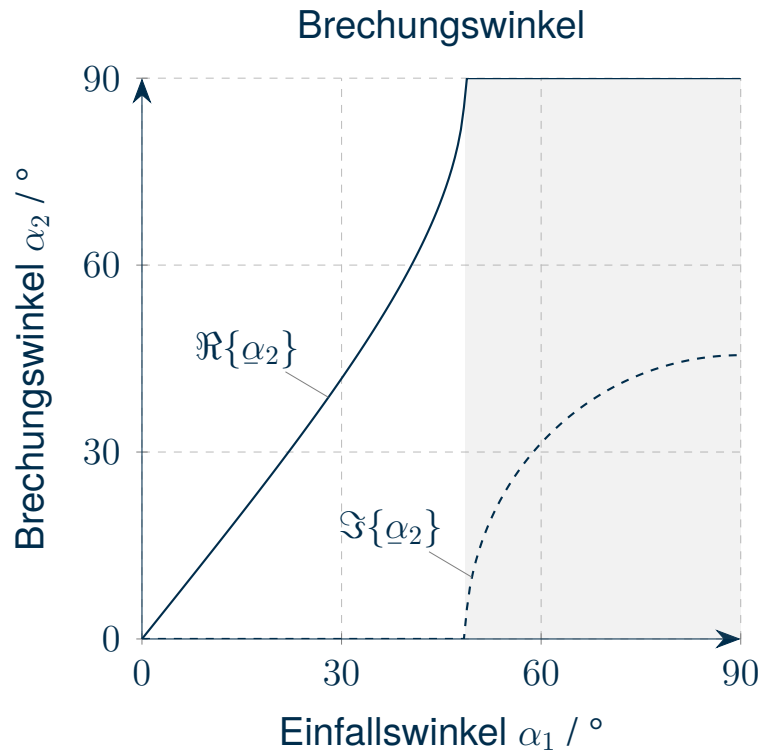
$$\underline{r}_s = \frac{n_1 \cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} \quad \text{bzw.} \quad \underline{r}_p = \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - n_1 \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)}$$

- Für die Transmissionskoeffizienten gilt entsprechend

$$\underline{t}_s = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} \quad \text{bzw.} \quad \underline{t}_p = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)}$$

# Wdh: Fresnelsche Beziehungen (II)

- Der Brechungswinkel sowie die Beträge der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für den Übergang von Wasser mit  $n_1 = 1,333$  (bei  $\lambda = 589 \text{ nm}$ , vgl. Vorlesung 6) zu Vakuum mit  $n_2 = 1$ .
- Für Einfallswinkel  $\alpha_1 \geq \alpha_{\text{krit}} = 48,8^\circ$  erhalten wir Totalreflexion und damit ein komplexes  $\alpha_2$  (vgl. Folie 26).



# Phasendrehung bei Totalreflexion (I)

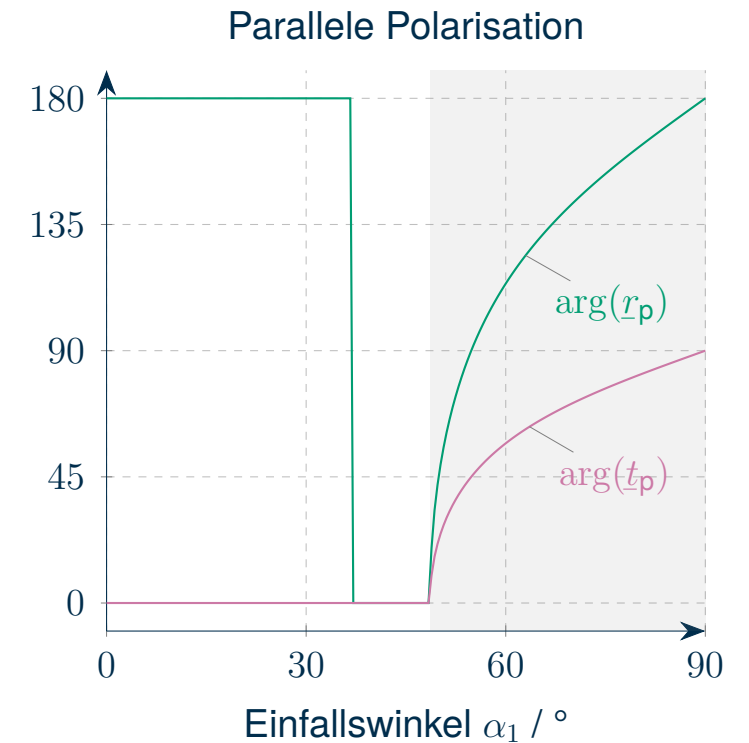
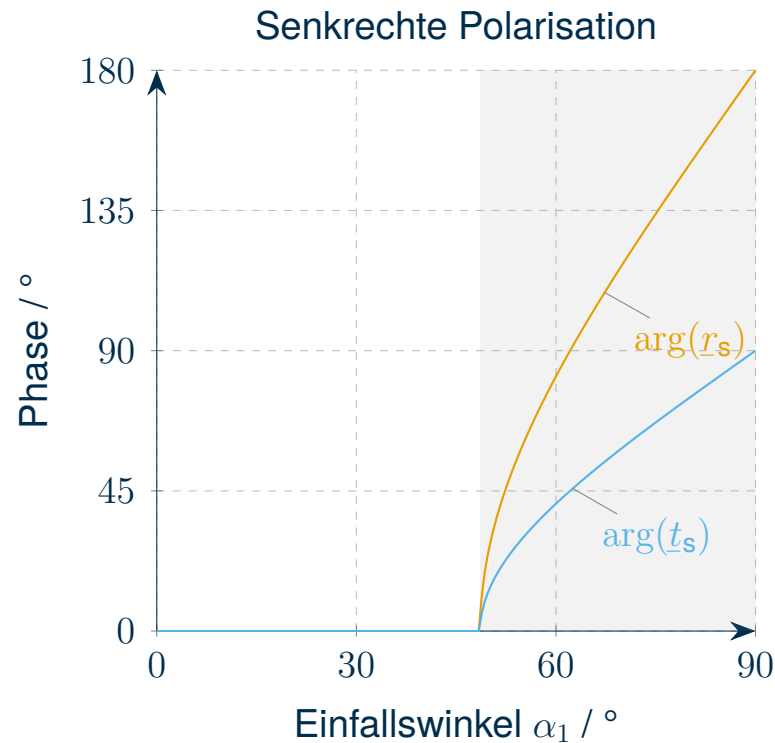
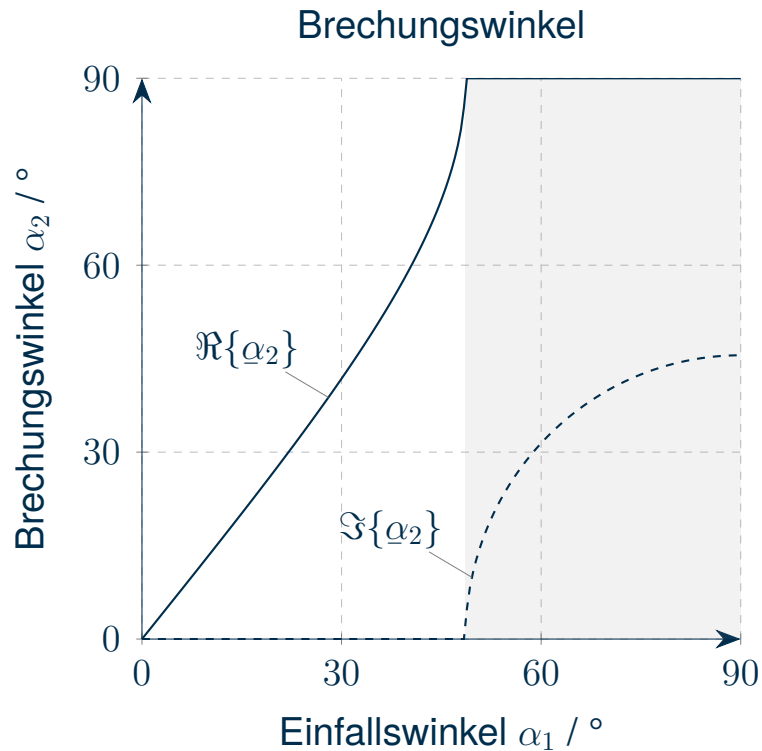
- Im Falle von Totalreflexion werden die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten komplexwertig, d. h.  $\underline{r}_{s,p} = |\underline{r}_{s,p}| \exp(j \arg\{\underline{r}_{s,p}\})$  und  $\underline{t}_{s,p} = |\underline{t}_{s,p}| \exp(j \arg\{\underline{t}_{s,p}\})$ .
- Daher erfahren die reflektierte und transmittierte Welle an der Grenzfläche im Allgemeinen eine Phasendrehung, die von  $0^\circ$  und  $180^\circ$  verschieden ist.
- Die Argumente der Reflexionskoeffizienten ergeben sich zu (vgl. Anhang Folie 28)

$$\arg\{\underline{r}_s\} = -2 \arctan \left( \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_1^2 \cos^2(\alpha_1)}} \right) \quad \text{bzw.} \quad \arg\{\underline{r}_p\} = -2 \arctan \left( \frac{n_1^2}{n_2^2} \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_1^2 \cos^2(\alpha_1)}} \right)$$

- Für die Transmissionskoeffizienten gilt (nur bei Totalreflexion) jeweils  $\arg\{\underline{t}_{s,p}\} = \frac{1}{2} \arg\{\underline{r}_{s,p}\}$ .
- *Wichtig:* Im Fall von Totalreflexion verschwinden die Transmissionskoeffizienten keineswegs.
- Aufgrund der resultierenden Phasendifferenz zwischen einfallender und reflektierter Welle verschwinden die Tangentialkomponenten der resultierenden Welle an der Grenzfläche im Allgemeinen nicht!

# Phasendrehung bei Totalreflexion (II)

- Brechungswinkel sowie Phase der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für den Übergang von Wasser mit  $n_1 = 1,333$  (bei  $\lambda = 589 \text{ nm}$ ) zu Vakuum mit  $n_2 = 1$ .



# Eigenwertgleichungen

- Die Ausbreitungsbedingung für geführte Wellen wird auch als Eigenwertgleichung bezeichnet.
- Für die senkrechte Polarisation lässt sich diese schreiben als

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_1^2 \cos^2(\alpha_1)}}\right) = \frac{d k_0}{2} n_1 \cos(\alpha_1) - m \frac{\pi}{2}$$

- Für die parallele Polarisation erhalten wir analog

$$\arctan\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_1^2 \cos^2(\alpha_1)}}\right) = \frac{d k_0}{2} n_1 \cos(\alpha_1) - m \frac{\pi}{2}$$

# Normierte Darstellung der Eigenwertgleichungen

- Die Eigenwertgleichung lässt sich vereinfachen mit den normierten Größen

$$U = \frac{dk_0}{2} n_1 \cos(\alpha_1) \quad \text{und} \quad W = \frac{dk_0}{2} \sqrt{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}$$

- Zudem führen wir die normierte Frequenz ein als

$$V = \omega \frac{d}{2c_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{U^2 + W^2} \quad \implies \quad W = \sqrt{V^2 - U^2}$$

- Damit lässt sich die Eigenwertgleichung für die senkrechte Polarisation umformen zu

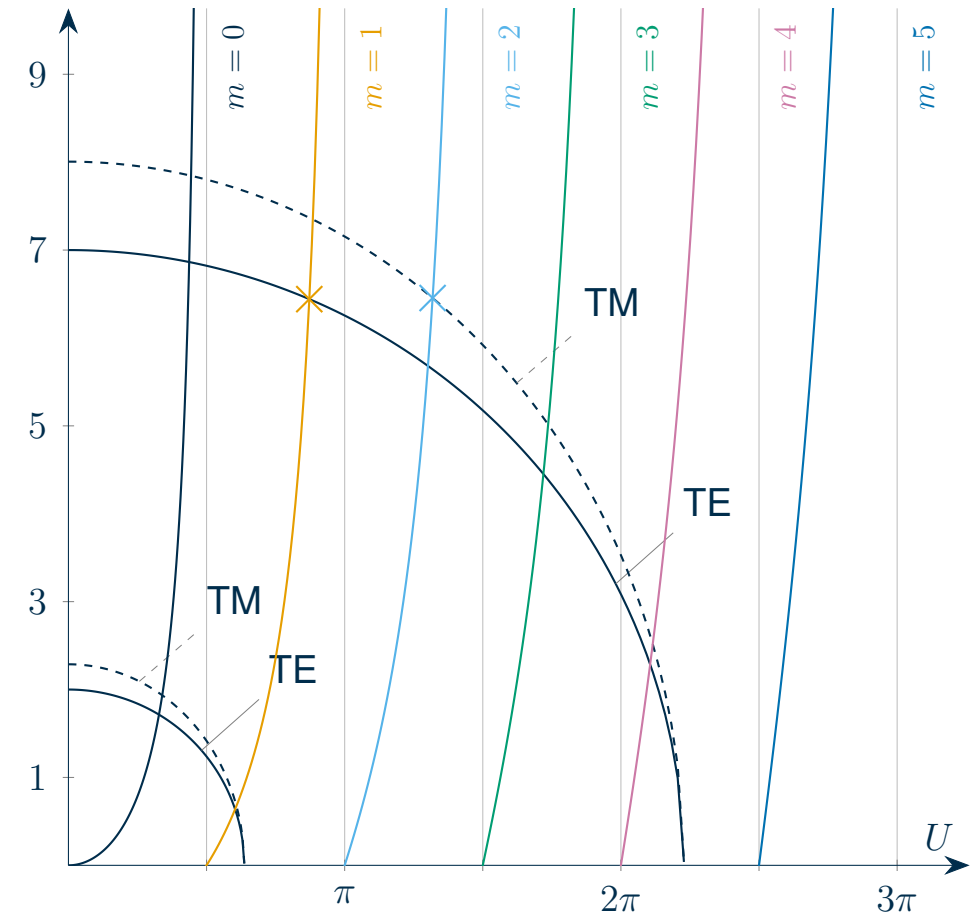
$$\sqrt{V^2 - U^2} = U \tan\left(U - m \frac{\pi}{2}\right).$$

- Für die parallele Polarisation ergibt sich entsprechend

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} \sqrt{V^2 - U^2} = U \tan\left(U - m \frac{\pi}{2}\right).$$

# Graphische Lösung der Eigenwertgleichungen

- Die Abbildung erlaubt die graphische Lösung der Eigenwertgleichungen für gegebene Werte von  $V$ .
- Die rechte Seite der beiden Eigenwertgleichungen ist für  $m = 0, 1, 2, \dots$  durch die farbigen Linien dargestellt.
- Für senkrechte Polarisation (TE) entspricht die linke Seite der Eigenwertgleichung einem Viertelkreis mit dem Radius  $V$  und ist beispielhaft für  $V = 7$  sowie  $V = 2$  dargestellt.
- Bei paralleler Polarisation (TM) erhalten wir hingegen eine Vierteilellipse, die für  $\frac{n_1}{n_2} = 1,07$  durch entsprechende gestrichelte Linien dargestellt ist.
- Abhängig von  $V$  ergeben sich die Lösungen der Eigenwertgleichung für diejenigen  $U$ , bei denen sich die Viertelkreise und -ellipsen mit den farbigen Kurven schneiden - z. B. bei  $\times$  oder  $\times$ .

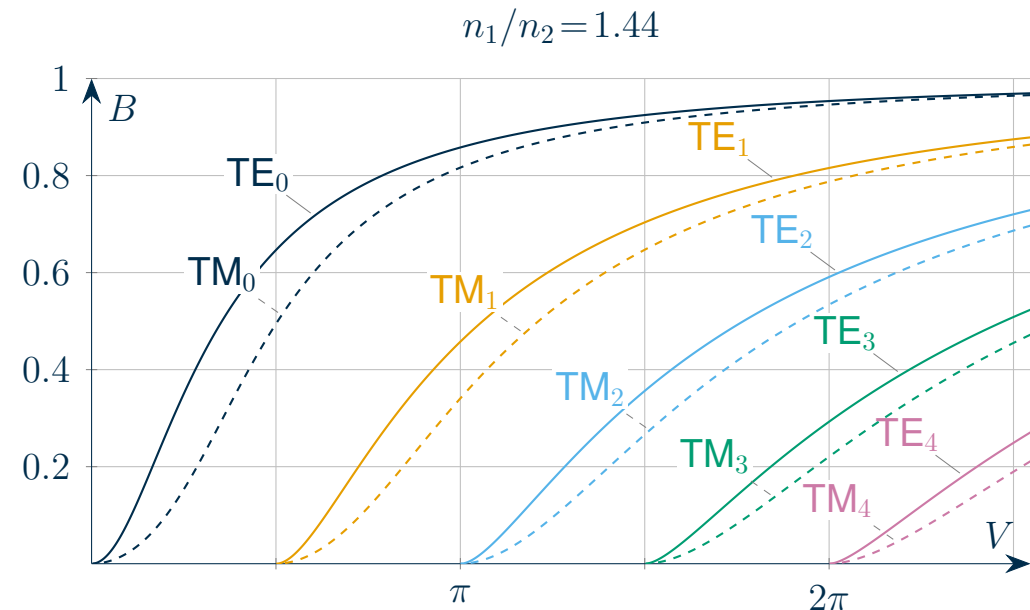
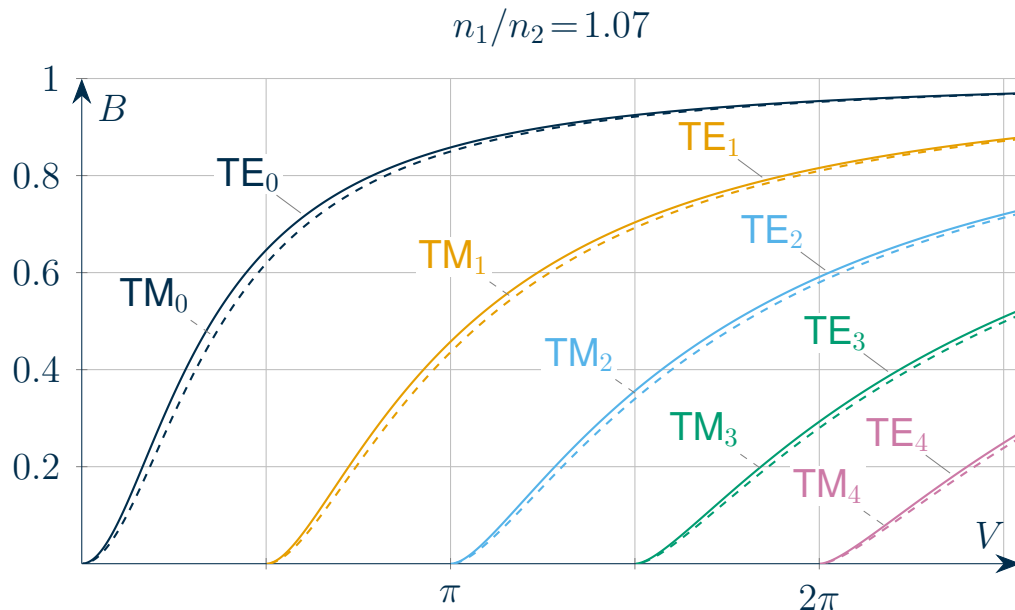


# Numerische Lösung der Eigenwertgleichungen

- Die Werte von  $U$ , für welche sich bei gegebenem  $V$  Schnittpunkte ergeben, lassen sich als Einfallswinkel  $\alpha_1$  bzw. als normierte Ausbreitungskonstante ausdrücken gemäß

$$B = 1 - \frac{U^2}{V^2} = \frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} = \frac{k_1^2 \sin^2(\alpha_1) - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2} = \frac{k_z^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2}.$$

- Die durchgezogenen Linien stellen die normierte Ausbreitungskonstante  $B$  für die TE-, die gestrichelten Linien für die TM-Moden dar.



# Vorlesungsinhalte

1. Dielektrischer Schichtwellenleiter

2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter

3. Eigenwertgleichung des dielektrischen Schichtwellenleiters

**4. Was Sie gelernt haben sollten**

5. Anhang

Brechungsgesetz für komplexwertige Wellenzahlen

Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion

Alternative Herleitung der Ausbreitungsbedingung

# Was Sie gelernt haben sollten

- Welche Bedingungen für die Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter erfüllt sein müssen.
- Wie sich die Totalreflexion an einer Grenzfläche auf elektromagnetische Wellen auswirkt.
- Wieso nur für diskrete Winkel gegenüber der Grenzflächen Wellenausbreitung möglich ist.
- Wie die Eigenwertgleichung für senkrechte bzw. parallele Polarisation graphisch gelöst werden und wie daraus auf die Anzahl ausbreitungsfähiger Moden geschlossen werden kann.
- Welche Parameter des Wellenleiters bzw. der Welle die Zahl der ausbreitungsfähigen Moden bestimmen.
- Dass die Ausbreitungskonstanten bei paralleler Polarisation i.A. kleiner sind als bei senkrechter Polarisation.
- Wie sich elektromagnetische Wellen an der Grenzfläche zweier Dielektrika verhalten.
- Welchen Einfluss das Brechzahlprofil auf die Feldbilder der Wellenleitermoden hat.

# Vorlesungsinhalte

1. Dielektrischer Schichtwellenleiter

2. Wellenausbreitung im dielektrischen Schichtwellenleiter

3. Eigenwertgleichung des dielektrischen Schichtwellenleiters

4. Was Sie gelernt haben sollten

## 5. Anhang

Brechungsgesetz für komplexwertige Wellenzahlen

Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion

Alternative Herleitung der Ausbreitungsbedingung

# Vorlesungsinhalte: Anhang

## 5. Anhang

Brechungsgesetz für komplexwertige Wellenzahlen

Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion

Alternative Herleitung der Ausbreitungsbedingung

# Brechungsgesetz für komplexwertige Wellenzahlen

- Betrachten wir noch einmal die allgemeine Form des Snelliusschen Brechungsgesetzes

$$\underline{k}_1 \sin(\alpha_1) = \underline{k}_2 \sin(\alpha_2).$$

- Sofern  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  reellwertige Winkel aus dem Intervall  $[0, \pi/2]$  sind, lässt sich das Brechungsgesetz nur anwenden, wenn das Verhältnis  $\underline{k}_2/\underline{k}_1$  reellwertig ist.
- Ferner muss in diesem Fall gelten, dass

$$\sin(\alpha_1) = \frac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1} \sin(\alpha_2) \in [-1, 1] \quad \text{und} \quad \sin(\alpha_2) = \frac{\underline{k}_1}{\underline{k}_2} \sin(\alpha_1) \in [-1, 1]$$

- Im Übrigen kann die Sinusfunktion auch für komplexwertige Argumente  $\underline{\gamma} = \gamma_{\text{re}} + j \gamma_{\text{im}}$  definiert werden

$$\sin(\underline{\gamma}) = \frac{1}{j2} \left( \exp(j\underline{\gamma}) - \exp(-j\underline{\gamma}) \right) = \sin(\gamma_{\text{re}}) \cosh(\gamma_{\text{im}}) + j \cos(\gamma_{\text{re}}) \sinh(\gamma_{\text{im}}).$$

- Mit dieser Definition können wir das Brechungsgesetz auch für beliebige (komplexe) Wellenzahlen  $\underline{k}_1$  und  $\underline{k}_2$  anwenden.

# Vorlesungsinhalte: Anhang

## 5. Anhang

Brechungsgesetz für komplexwertige Wellenzahlen  
Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion  
Alternative Herleitung der Ausbreitungsbedingung

# Fresnelsche Beziehungen und Totalreflexion (I)

- Die Fresnelschen Beziehungen hatten wir zuvor hergeleitet als

$$\underline{r}_s = \frac{n_1 \cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)}$$
$$\underline{t}_s = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)}$$

$$\underline{r}_p = \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - n_1 \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)}$$
$$\underline{t}_p = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)}$$

- Im Fall  $n_1 \leq n_2$  gilt für alle Einfallswinkel  $\alpha_1 \in [0, \pi/2]$  gemäß dem Brechungsgesetz  $\sin(\alpha_2) = \frac{n_1}{n_2} \sin(\alpha_1) \leq 1$  und somit  $\cos(\alpha_2) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha_2)} \leq 1$ .
- Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sind dann stets reellwertig, also gilt

$$\arg(\underline{r}) \in \{0, \pi\} \quad \text{und} \quad \arg(\underline{t}) = 0 .$$

- Letzteres gilt auch im Fall  $n_1 > n_2$  für Einfallswinkel kleiner dem Grenzwinkel der Totalreflexion  $\alpha_1 \leq \alpha_{1,G} = \arcsin(n_2/n_1)$ .

# Fresnelsche Beziehungen und Totalreflexion (II)

- Für den Fall  $n_1 > n_2$  und  $\alpha_1 > \alpha_{1,G}$  kommt es zur Totalreflexion und wir erhalten aus dem Brechungsgesetz  $\sin(\alpha_2) > 1$ .
- Demzufolge wird der folgende Ausdruck rein imaginär:

$$n_2 \cos(\alpha_2) = n_2 \sqrt{1 - \sin^2(\alpha_2)} = j \sqrt{\sin^2(\alpha_2) - 1} = j \sqrt{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}.$$

- Mit  $a = n_1 \cos(\alpha_1)$  und  $b = -j n_2 \cos(\alpha_2)$  erhalten wir für senkrechte Polarisation

$$\underline{r}_s = \frac{n_1 \cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} = \frac{a - j b}{a + j b} \quad \text{und} \quad \underline{t}_s = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)} = \frac{2a}{a + j b}$$

und somit nach kurzer Nebenrechnung  $\arg(\underline{t}_s) = \frac{1}{2} \arg(\underline{r}_s)$  und

$$\arg(\underline{r}_s) = -2 \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -2 \arctan\left(\sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_1^2 \cos^2(\alpha_1)}}\right)$$

# Fresnelsche Beziehungen und Totalreflexion (III)

- Führen wir  $c = n_2 \cos(\alpha_1)$  und  $d = -j n_1 \cos(\alpha_2)$  ein, erhalten wir analog für parallele Polarisation

$$\underline{r}_p = \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - n_1 \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)} = \frac{c - j d}{c + j d} \quad \text{und} \quad \underline{t}_p = \frac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)} = \frac{2a}{c + j d}$$

und somit nach kurzer Nebenrechnung  $\arg(\underline{t}_p) = \frac{1}{2} \arg(\underline{r}_p)$  und

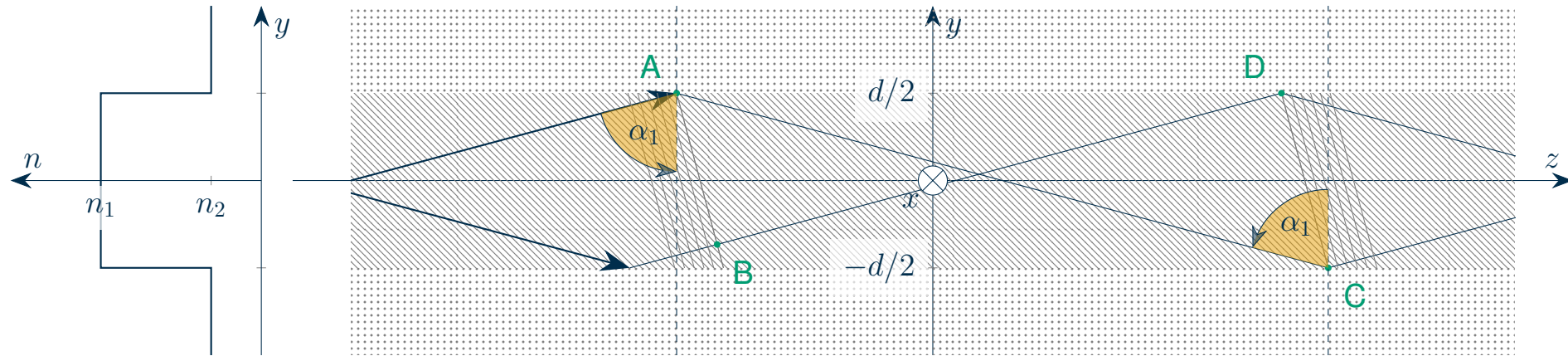
$$\arg(\underline{r}_p) = -2 \arctan\left(\frac{d}{c}\right) = -2 \arctan\left(\frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2(\alpha_1) - n_2^2}{n_2^2 \cos^2(\alpha_1)}}\right)$$

# Vorlesungsinhalte: Anhang

## 5. Anhang

Brechungsgesetz für komplexwertige Wellenzahlen  
Fresnelsche Beziehungen bei Totalreflexion  
Alternative Herleitung der Ausbreitungsbedingung

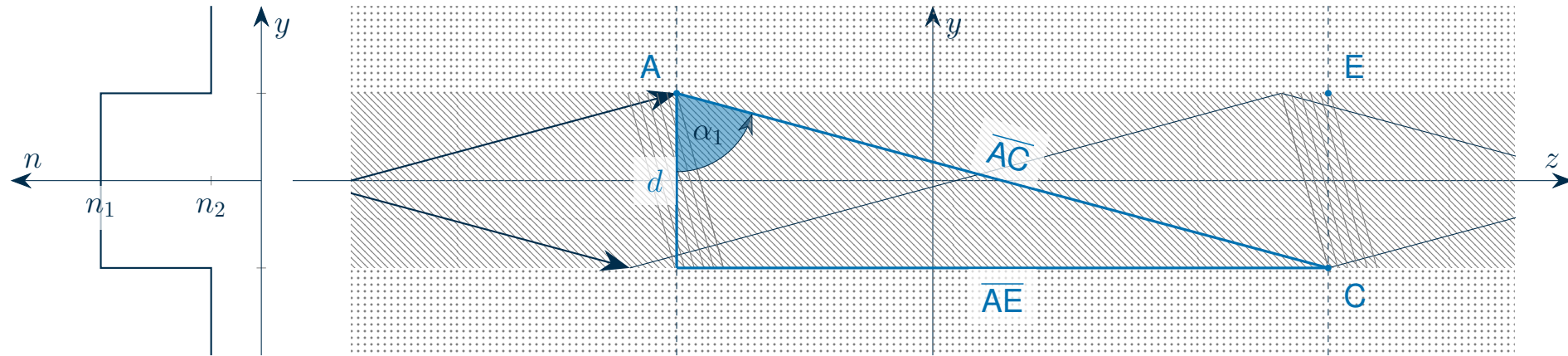
# Ausbreitungsbedingung anhand reflektierter Wellen



- Alternativ können wir die Ausbreitungsbedingung auch anhand der reflektierten Welle herleiten.
- Die Punkte A und B liegen offenbar auf derselben Phasenfront.
- Um eine in  $z$ -Richtung geführte, konstante Wellenform zu erhalten, müssen auch die Punkte C und D auf einer Phasenfront liegen.
- Also muss auch die akkumulierte Phasendrehung auf den Pfad  $\overline{AC}$  sowie  $\overline{BD}_2$  bis auf ein ganzzahliges Vielfaches  $m$  von  $2\pi$  identisch sein:

$$\arg\{\underline{r}\} + \overline{AC}k_1 + \arg\{\underline{r}\} = \overline{BD}k_1 + m 2\pi .$$

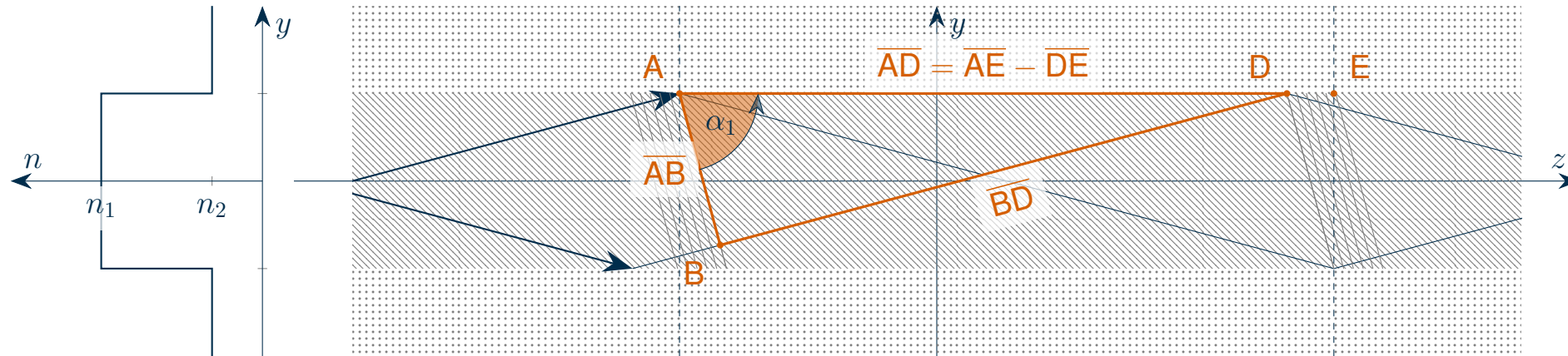
# Geom. Betrachtung Ausbreitungsbedingung (I)



- Aus den trigonometrischen Beziehungen erhalten wir mit dem Hilfspunkt E

$$\overline{AC} = \frac{d}{\cos(\alpha_1)}, \quad \overline{AE} = d \tan(\alpha_1), \quad \overline{BD} = (\overline{AE} - \overline{DE}) \sin(\alpha_1) \quad \text{und} \quad \overline{DE} = \frac{d}{\tan(\alpha_1)}.$$

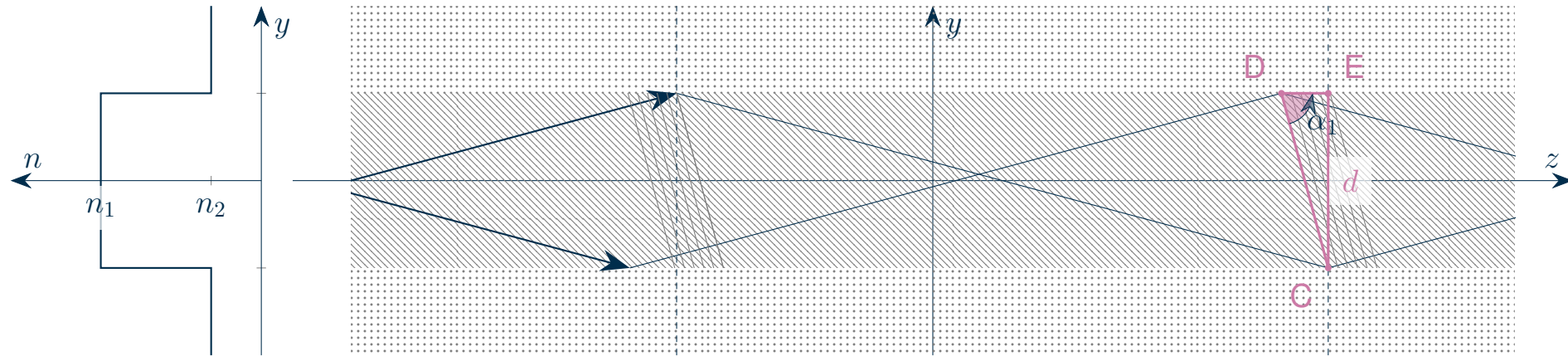
# Geom. Betrachtung Ausbreitungsbedingung (I)



- Aus den trigonometrischen Beziehungen erhalten wir mit dem Hilfspunkt E

$$\overline{AC} = \frac{d}{\cos(\alpha_1)}, \quad \overline{AE} = d \tan(\alpha_1), \quad \overline{BD} = (\overline{AE} - \overline{DE}) \sin(\alpha_1) \quad \text{und} \quad \overline{DE} = \frac{d}{\tan(\alpha_1)}.$$

# Geom. Betrachtung Ausbreitungsbedingung (I)



- Aus den trigonometrischen Beziehungen erhalten wir mit dem Hilfspunkt E

$$\overline{AC} = \frac{d}{\cos(\alpha_1)}, \quad \overline{AE} = d \tan(\alpha_1), \quad \overline{BD} = (\overline{AE} - \overline{DE}) \sin(\alpha_1) \quad \text{und} \quad \overline{DE} = \frac{d}{\tan(\alpha_1)}.$$

# Geometrische Betrachtung Ausbreitungsbedingung (II)

- Somit ergibt sich

$$\overline{\text{BD}} = d \left( \frac{\sin^2(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} - \cos(\alpha_1) \right) = d \left( \frac{1 - \cos^2(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} - \cos(\alpha_1) \right) = \frac{d}{\cos(\alpha_1)} - 2d \cos(\alpha_1) .$$

- Damit können wir die Bedingung für die Wellenführung (Ausbreitungsbedingung) vereinfachen zu

$$\arg\{\underline{r}\} + k_1 \frac{d}{2 \cos(\alpha_1)} = k_1 \frac{d}{2 \cos(\alpha_1)} - k_1 d \cos(\alpha_1) + m \pi$$
$$\arg\{\underline{r}\} = -d k_1 \cos(\alpha_1) + m \pi .$$

- Offenbar führen beide Ansätze zur Herleitung der Ausbreitungsbedingung auf dasselbe Ergebnis.
- Die Herleitung über die Reflexion ist allerdings rechnerisch aufwändiger als die Variante, welche auf der transmittierten Welle basiert.
- Allerdings ist die Betrachtung der transmittierten Welle bei Totalreflexion weniger intuitiv, weshalb der soeben präsentierte Ansatz basierend auf der Reflexion in der Literatur weiter verbreitet ist.