

Klausur A Herbst 2018

Aufgabe 1 (Straßenbahn, Prüfung ExPh A H2018A1 und A/B H2018A1)

Eine Straßenbahn der Masse m wird auf gerader, ebener Strecke mit konstanter Leistung P vom Stand aus beschleunigt. Die Reibung soll vernachlässigt werden.

- a) Wie ändern sich die kinetische Energie $E_{\text{kin}}(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ mit der Zeit t .

Lösung:

gegeben: $P = 380 \text{ kW} = \text{const}$ gesucht: $E_{\text{kin}}(t) = ?$
 $m = 3,0 \cdot 10^4 \text{ kg}$ $v(t) = ?$
gerade Strecke
ebene Strecke
aus der Ruhe

aus der Leistung:

$$P = \frac{dE(t)}{dt} \stackrel{!}{=} \text{const}$$

$$\Rightarrow dE_{\text{kin}} = P dt \quad \Bigg| \int$$

$$E_{\text{kin}}(t) = P \cdot t + E_0$$

mit der Bedingung aus der Ruhe

$$E_{\text{kin}}(t=0) \stackrel{!}{=} 0$$

$$E_{\text{kin}}(0) = E_0 = 0$$

$$\Rightarrow E_{\text{kin}}(t) = P \cdot t = 380 \text{ kW} \cdot t$$

aus der kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} m v^2(t) = P \cdot t$$

$$\Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot P \cdot t}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 380 \text{ kW} \cdot t}{3,0 \cdot 10^4 \text{ kg}}} = 5,03 \frac{\text{m}}{\text{s}^{\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt{t}$$

- b) Wie groß ist die beschleunigende Kraft $F(t)$ als Funktion der Zeit t ?

Lösung:

$$F(t) = m \cdot a(t)$$

$$= m \cdot \dot{v}$$

$$= m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot P}{m}} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m \cdot P}{2 \cdot t}} = 7,55 \cdot 10^4 \text{ N} \sqrt{\text{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{P}{v(t)}$$

Alternativ

für $\vec{F} \parallel \vec{v}$ gilt:

$$P = F(t) \cdot v(t) \\ \Rightarrow F(t) = \frac{P}{v(t)}$$

c) Berechnen Sie den Weg $s(t)$ als Funktion der Zeit t .

Lösung:

$$v(t) = \dot{s} \quad \Bigg| \int \\ s(t) = \int v(t) dt \\ s(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot P}{m}} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} + s_0$$

o.B.d.A. $s(0) = 0$ (freie Wahl des Ursprungs)

$$\Rightarrow s(t) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2 \cdot P}{m}} \cdot t^{\frac{3}{2}} = 3,36 \frac{\text{m}}{\text{s}^{\frac{3}{2}}} \cdot t^{\frac{3}{2}}$$

d) Mit welcher maximalen Geschwindigkeit $v_{\max, 6}$ kann die Straßenbahn mit der Leistung P bei einer Steigung von 6% fahren?

Lösung:

gegeben: $P = 380 \text{ kW} = \text{const}$ gesucht: $v_{\max, 6} = ?$
 $m = 3,0 \cdot 10^4 \text{ kg}$
6% Steigung

Wenn die Hangabtriebskraft gerade der beschleunigenden Kraft entspricht, wird die Bahn nicht mehr weiter beschleunigt. Es kommt zu einer konstanten Geschwindigkeit.

$$F_H = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = \frac{P}{v_{\max}} \\ v_{\max, 6} = \frac{P}{m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}$$

Bestimme Winkel aus Steigung:

$$6\% = \frac{6}{100} = \tan \alpha \\ \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{6}{100}\right) \approx 3,43^\circ$$

Damit erhält man:

$$v_{\max, 6} = \frac{380 \text{ kW}}{3,0 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin(3,43^\circ)} \\ = 21,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 77,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Zahlenwerte: $m = 3,0 \cdot 10^4 \text{ kg}$; $P = 380 \text{ kW}$

Quelle: Prüfungsaufgaben zur Experimentalphysik A und A/B

Aufgabe 2 (Mathematisches Pendel in der Eisenbahn; Prüfung ExPh A H2018A2 und A/B H2018A2)

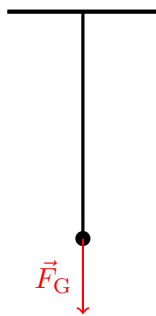
In einem Eisenbahnwagen ist eine Bleikugel der Masse m an einem masselosen Faden der Länge ℓ aufgehängt. Unter welchem Winkel α zur Vertikalen stellt sich der Faden in der Gleichgewichtslage des Pendels in den folgenden, in a) bis c) beschriebenen Bewegungszuständen ein? Zeichnen Sie hierzu jeweils in einer Skizze die wirkenden Kräfte ein und berechnen Sie α

- a) Der Wagen fährt auf gerader Strecke mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 .

Lösung:

gegeben: $v_0 = 22 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{const.}$ gesucht: $\alpha = ?$
gerade (ebene) Strecke

Skizze:



gerade (ebene) Bewegung und $v_0 = \text{const.}$
 $\Rightarrow$ gleichförmige Bewegung, d.h. $a = 0$

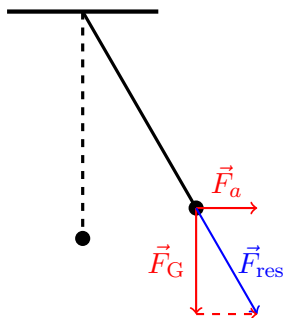
Es wirkt nur die Gewichtskraft $\vec{F}_G$
 $\Rightarrow$ keine Auslenkung, d.h. $\alpha = 0^\circ$

- b) Der Wagen fährt auf gerade Strecke mit konstanter Beschleunigung a .

Lösung:

gegeben: $a = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{const.}$ gesucht: $\alpha = ?$
gerade (ebene) Strecke

Skizze:



gerade (ebene) Bewegung und $a = \text{const.}$
 $\Rightarrow$ gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$\tan \alpha = \frac{F_a}{F_G} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{a}{g}$$
$$\Rightarrow \alpha = 9,26^\circ$$

- c) Der Wagen fährt mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 durch eine Kurve mit dem Radius R .

Lösung:

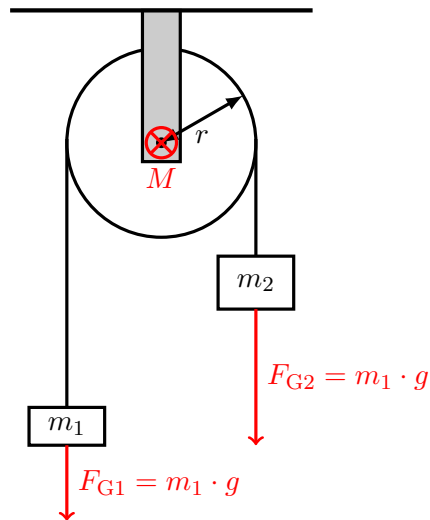
gegeben: $a = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{const.}$ gesucht: $\alpha = ?$
gerade (ebene) Strecke

Skizze:

Lösung:

Wichtig: Das Seil muss auf der Rolle haften sonst würde diese nicht mit drehen.

gegeben: $m_U = 2,5 \text{ kg}$ gesucht: $|\vec{M}| = M = ?$
 $m_1 = 0,10 \text{ kg}$
 $m_2 = 0,12 \text{ kg}$
 $r = \frac{d}{2} = 0,1 \text{ m}$



Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Rolle dreht sich nicht

Wir bestimmen das Moment das die Rolle aufbringen muss damit sie nicht dreht (positive Drehachse zeigt in die Ebene hinein).

$$\begin{aligned} M &= M_2 - M_1 = m_2 \cdot g \cdot r - m_1 \cdot g \cdot r = \Delta m \cdot g \cdot r \\ &= (0,12 \text{ kg} - 0,1 \text{ kg}) \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,1 \text{ m} = 0,0196 \text{ Nm} \end{aligned}$$

- Rolle dreht sich

Wir bestimmen das Moment das die Rolle beschleunigt.

Die Kraft $\vec{F}_U$ auf die Rolle greift immer senkrecht mit dem Hebelarm r an. Das Drehmoment ist damit gegeben durch:

$$M = r \cdot F_U = \theta \cdot \alpha$$

Hier ist α die Winkelbeschleunigung. Weiter gilt mit der Tangentialbeschleunigung a_t :

$$\alpha = \frac{a_t}{r}$$

Damit ergibt sich:

$$M = \theta \cdot \frac{a_t}{r} = \frac{m_U \cdot r^2 \cdot a_t}{r} = m_U \cdot r \cdot a_t (= r \cdot F_U)$$

und damit:

$$F_U = m_U \cdot a_t$$

Aus dem Kräftebilanz lässt sich nun die Beschleunigung a bestimmen. Diese ist für alle Massen gleich (mit Seil verbunden) und entspricht auch der Tangentialbeschleunigung a_t .

$$\begin{aligned} m_2 \cdot g - m_1 \cdot g &= (m_1 + m_2) \cdot a + F_U \\ m_2 \cdot g - m_1 \cdot g &= (m_1 + m_2) \cdot a + m_U \cdot a \\ (m_2 - m_1) \cdot g &= (m_1 + m_2) \cdot a + m_U \cdot a \\ (m_2 - m_1) \cdot g &= (m_1 + m_2 + m_U) \cdot a \\ \Rightarrow a &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m_U} \cdot g \\ &= \frac{\frac{12}{100} - \frac{10}{100}}{\frac{10}{100} + \frac{12}{100} + \frac{250}{100}} \cdot g \\ &= \frac{1}{136} \cdot g = 0,072 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Damit kann nun M bestimmt werden:

$$\begin{aligned} M &= m_U \cdot r \cdot a_t \\ &= \frac{1}{136} \cdot m_U \cdot r \cdot g = 0,0180 \text{ Nm} \end{aligned}$$

- b) Wie groß ist das Trägheitsmoment der Umlenkrolle bezogen auf die Achse, um die sich die Rolle dreht?

Lösung:

gegeben: $m_U = 2,5 \text{ kg}$
 $r = 0,1 \text{ m}$
 dünnwandiger Hohlzylinder

gesucht: $\theta = ?$

$$\theta = m_{\text{U}} \cdot r^2 = 0,025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- c) Mit welcher Beschleunigung a setzten sich die Gewichte in Bewegung? Erläutern Sie Ihre Überlegung.

Lösung:

Ist ein Zwischenergebnis bei a). Wir hier der Vollständigkeit halber noch einmal gerechnet. Ein Verweis würde aber ausreichen.

gegeben: $m_U = 2,5 \text{ kg}$ gesucht: $a = ?$
 $m_1 = 0,10 \text{ kg}$
 $m_2 = 0,12 \text{ kg}$
 $r = \frac{d}{2} = 0,1 \text{ m}$

Wir bestimmen das Moment das die Rolle beschleunigt.

Die Kraft $\vec{F}_U$ auf die Rolle greift immer senkrecht mit dem Hebelarm r an. Das Drehmoment ist damit gegeben durch:

$$M = r \cdot F_{\text{II}} = \theta \cdot \alpha$$

Hier ist α die Winkelbeschleunigung. Weiter gilt mit der Tangentialbeschleunigung a_t :

$$\alpha = \frac{a_t}{r}$$

Damit ergibt sich:

$$M = \theta \cdot \frac{a_t}{r} = \frac{m_U \cdot r^2 \cdot a_t}{r} = m_U \cdot r \cdot a_t (= r \cdot F_U)$$

und damit:

$$F_U = m_U \cdot a_t$$

Aus dem Kräftebilanz lässt sich nun die Beschleunigung a bestimmen. Diese ist für alle Massen gleich (mit Seil verbunden) und entspricht auch der Tangentialbeschleunigung a_t .

$$\begin{aligned} m_2 \cdot g - m_1 \cdot g &= (m_1 + m_2) \cdot a + F_U \\ m_2 \cdot g - m_1 \cdot g &= (m_1 + m_2) \cdot a + m_U \cdot a_t \\ (m_2 - m_1) \cdot g &= (m_1 + m_2) \cdot a + m_U \cdot a \\ (m_2 - m_1) \cdot g &= (m_1 + m_2 + m_U) \cdot a \\ \Rightarrow a &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m_U} \cdot g \\ &= \frac{\frac{12}{100} - \frac{10}{100}}{\frac{10}{100} + \frac{12}{100} + \frac{250}{100}} \cdot g \\ &= \frac{1}{136} \cdot g = 0,072 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

- d) Berechnen Sie die Rotationsenergie der Rolle und die gesamte kinetische Energie aller drei Massen zwei Sekunden nach dem Loslassen aus der Ruhelage. Welcher Bruchteil der gesamten Bewegungsenergie entfällt auf die Rotationsenergie der Umlenkrolle?

Lösung:

$$\begin{array}{ll} \text{gegeben: } m_U = 2,5 \text{ kg} & \text{gesucht: } \frac{E_{\text{rot}}(t_0)}{E_{\text{kin, ges}}(t_0)} = ? \\ m_1 = 0,10 \text{ kg} & \\ m_2 = 0,12 \text{ kg} & \\ r = \frac{d}{2} = 0,1 \text{ m} & \\ t_0 = 2 \text{ s} & \end{array}$$

Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Da die Massen mit einem Seil verbunden sind gilt, dass die Geschwindigkeiten $v_1(t)$ von m_1 und $v_2(t)$ von m_2 gleich sind. Zusätzlich gilt, dass dies auch der Tangentialgeschwindigkeit $v_t(t)$ der Rolle entspricht.

$$\begin{aligned} v(t) &= a \cdot t \\ v(t_0 = 2 \text{ s}) &= v_0 \end{aligned}$$

Außerdem gilt der Zusammenhang zwischen Winkel- und Tangentialgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v_t &= r \cdot \omega \\ \Rightarrow \omega &= \frac{v_t}{r} \end{aligned}$$

Die Energie der Rotation der Umlenkrolle ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}}(t) &= \frac{1}{2} \cdot \theta \omega^2(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot m_U r^2 \cdot \omega^2(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot m_U r^2 \cdot \left(\frac{v_t(t)}{r} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot m_U \cdot v_t^2(t) \end{aligned}$$

Die gesamte kinetische Energie lässt sich damit bestimmen zu:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin, ges}}(t) &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2(t) + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v^2(t) + \frac{1}{2} \cdot \theta \omega^2(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2(t) + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v^2(t) + \frac{1}{2} \cdot m_U v^2(t) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den relativen Anteil nach der Zeit t :

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{rot}}(t)}{E_{\text{kin, ges}}(t)} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot m_U \cdot v^2(t)}{\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2(t) + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v^2(t) + \frac{1}{2} \cdot m_U v^2(t)} \\ &= \frac{m_U}{m_1 + m_2 + m_U} = \frac{125}{136} \approx 91,9\% \end{aligned}$$

Das ist unabhängig von t und gilt somit auch für $t = t_0$.

Zahlenwerte: $d = 20 \text{ cm}$; $m_U = 2,5 \text{ kg}$; $m_1 = 0,10 \text{ kg}$; $m_2 = 0,12 \text{ kg}$

Quelle: Prüfungsaufgaben zur Experimentalphysik A und A/B

Aufgabe 4 (Ruhende Flüssigkeiten, Prüfung ExPh A H2018A4)

- a) Was versteht man unter der Auftriebskraft in Flüssigkeiten? Erklären Sie diese anhand einer Skizze.

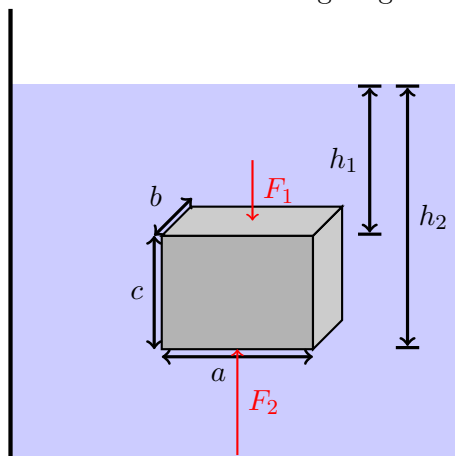
Lösung:

Die Auftriebskraft ist eine der Erdanziehungskraft entgegen gerichtete Kraft, die auf alle Körper wirkt, die in einer Flüssigkeit oder einem Gas teilweise oder vollständig eingetaucht sind. Physikalischer Ursprung: Der Druck in einer Flüssigkeit wird mit zunehmender Tiefe größer. Daher ist der hydrostatische Druck auf die Unterseite eines getauchten Körpers größer als auf seine Oberseite, da sich die Unterseite tiefer in der Flüssigkeit befindet. Die resultierende Kraft wirkt also nach oben. Skizze siehe Teil b).

- b) Begründen Sie das Zustandekommen der Auftriebskraft quantitativ anhand der Kräfte, die auf einen waagrecht liegenden Quader der Kantenlänge a , b und c unter Wasser wirkten. Leiten Sie die entsprechende Formel für die Auftriebskraft her und benennen Sie alle darin auftretenden Größen.

Lösung:

Hinweis: Wir gehen von einem vollständig eingetauchten Körper aus.



Für den hydrostatischen Druck bei der Eintauchtiefe h gilt:

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

Für den Druck gilt:

$$p = \frac{F}{A} \Rightarrow F = p \cdot A$$

Damit lässt sich die Kraft F_1 aufgrund des hydrostatischen Drucks auf die Oberseite ($A = a \cdot b$) bestimmen zu:

$$F_1 = \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot A$$

Ebenso die Kraft F_2 auf die Unterseite ($A = a \cdot b$) aufgrund des hydrostatischen Drucks.

$$F_2 = \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot A$$

Die Kräfte auf die Seitenflächen heben sich paarweise auf. Somit ergibt sich für die Auftriebskraft:

$$F_A = \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot A - \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot A = \rho \cdot g \cdot \Delta h \cdot A$$

Δh entspricht gerade der Kantenlänge c des Quaders. Damit ergibt sich:

$$F_A = \rho \cdot g \cdot c \cdot A = \rho \cdot g \cdot V$$

Mit V dem Volumen des Körpers, ρ der Dichte der Flüssigkeit und g der Erdbeschleunigung.

c) Was besagt das Prinzip von Archimedes?

Lösung:

Das Prinzip von Archimedes besagt, dass der Betrag der Auftriebskraft die ein Körper erfährt gleich dem Betrag der Gewichtskraft der vom Körper verdrängten Flüssigkeits- oder Gasmenge ist.

d) Ein Kunststoffkugelchen vom Radius r und der Dichte ρ_k wird in einer Flüssigkeit der Viskosität η und der Dichte $\rho_{fl} > \rho_k$ aus dem Zustand der Ruhe losgelassen und steigt dann auf. Wie groß ist der Betrag der Kraft auf das Kugelchen unmittelbar vor dem Loslassen?

Lösung:

gegeben: ρ_k gesucht: $F = ?$
 ρ_{fl}
 r
Kugel

Unmittelbar vor dem Loslassen wirken zwei Kräfte auf das Kugelchen: Die Gewichtskraft und die ihr entgegengesetzte Auftriebskraft.

$$\begin{aligned} F &\stackrel{!}{=} |F_A - F_G| \\ &= |\rho_{fl} \cdot g \cdot V_k - m_k \cdot g| \\ &= \left| \rho_{fl} \cdot g \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 - \rho_k \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g \right| \\ &= \left| (\rho_{fl} - \rho_k) \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g \right| \\ &= (\rho_{fl} - \rho_k) \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g \end{aligned}$$

- e) Skizzieren Sie die Geschwindigkeit des Kügelchens in Abhängigkeit von der Zeit nach dem Loslassen.

Lösung:

Stokes'sche Reibung tritt auf bei der laminaren Umströmung einer Kugel von einer Flüssigkeit, bzw. wenn sich eine Kugel gleichförmig durch einen Flüssigkeit bewegt.

Es gilt:

$$F_R = 6 \pi \eta r v$$

mit:

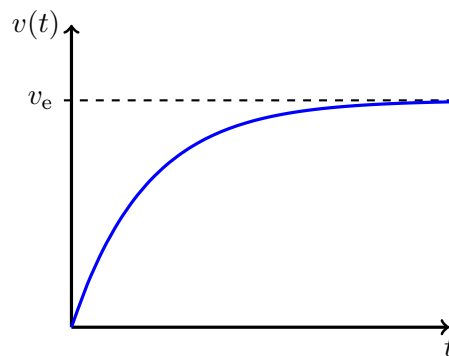
F_R : Reibungskraft

η : Viskosität der Flüssigkeit

r : Radius der Kugel

v : Geschwindigkeit der Strömung oder der Kugel

Daraus folgt, dass das Kügelchen zunächst beschleunigt wird. Die steigende Geschwindigkeit führt zu einer größeren Reibung. Letztlich stellt sich für $t \rightarrow \infty$ ein Kräftegleichgewicht und somit eine konstante Endgeschwindigkeit v_e ein. $v(t)$ nähert sich asymptotisch dem Wert v_e . Skizze:



- f) Welche Endgeschwindigkeit v_e erreicht das Kügelchen? Geben Sie hierfür eine auch die Beziehung für das Kräftegleichgewicht an und begründen Sie kurz Ihre Überlegung.

Lösung:

gegeben: ρ_k

ρ_f

η

r

gleichförmige Bewegung

gesucht: $v_e = ?$

Gleichförmige Bewegung (konstante Geschwindigkeit), wenn die Reibungskraft gerade die beschleunigende Kraft kompensiert.

$$F_R = F_A - F_G$$

$$6 \pi \eta r v_e = (\rho_f - \rho_k) \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot g$$

$$v_e = \frac{2}{9 \cdot \eta} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot g \cdot (\rho_f - \rho_k)$$

- g) Berechnen Sie die mechanische Leistung P , die das aufsteigende Kügelchen abgibt, wenn es die Endgeschwindigkeit erreicht hat.

Lösung:

gegeben: ρ_k gesucht: $P = ?$
 ρ_{fl}
 η
 r
 v_e

Es gilt $P = F \cdot v$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} P_e &= F \cdot v_e = (\rho_{fl} - \rho_k) \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot g \cdot \frac{2}{9} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot g \cdot (\rho_{fl} - \rho_k) \\ &= \frac{8}{27} \cdot \pi \cdot \frac{r^5 \cdot g^2}{\eta} \cdot (\rho_{fl} - \rho_k)^2 \end{aligned}$$

- h) Wie ist die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit definiert? Geben Sie die entsprechende Formel an und benennen Sie die darin auftretenden Größen.

Lösung:

Aufgrund von anziehenden Kräften zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit benötigt man die Energie, um eine Oberfläche um zu vergrößern. Die Ableitung dieser Energie E nach der Oberfläche ist die Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{dE}{dA}$$

dE : verrichtete Arbeit
 σ : Oberflächenspannung, Dimension: [Energie/Fläche], Einheit: Joule/m²
 dA : gewonnene Fläche

- i) Berechnen Sie den Überdruck in einer Seifenblase mit Radius $r = 20$ mm. Die Oberflächenspannung des Seifenwassers betrage $24,25 \cdot 10^{-3}$ N/m.

Lösung:

gegeben: $\sigma = 24,25 \cdot 10^{-3} \frac{N}{m}$ gesucht: $\Delta p = ?$
 $r = 0,02$ m
 Seifenblase, d.h. Hohlkugel

Der Überdruck in einem Flüssigkeitstropfen (oder Blase in einer Flüssigkeit) aufgrund der Oberflächenspannung ist gegeben durch $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$. Bei einer Seifenblase müssen jedoch zwei Oberflächen berücksichtigt werden. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \Delta p &= 2 \cdot \frac{2\sigma}{r} = \frac{4\sigma}{r} \\ &= \frac{4 \cdot 24,25 \cdot 10^{-3} \frac{N}{m}}{0,02 \text{ m}} = 4,85 \text{ Pa} \end{aligned}$$

- j) Was geschieht, wenn man zwei Seifenblasen unterschiedlichen Durchmessers mit einer Kanüle verbindet? Begründen Sie kurz Ihre Aussage.

Lösung:

Der Druck in der kleineren Blase ist höher als der Druck in der größeren (der Druck ist umgekehrt proportional zum Radius), somit strömt die Luft von der kleineren zur größeren Blase, bis erstere verschwindet.

Quelle: Prüfungsaufgaben zur Experimentalphysik A

Aufgabe 5 (Druckflasche; Prüfung ExPh A H2018A5 und A/B H2018A4)

In einer Druckflasche mit dem Volumen V ist bei der Temperatur T Helium (He) der Masse m eingeschlossen.

a) Welche mittlere Geschwindigkeit v_{rms} haben die Moleküle?

Lösung:

gegeben: $M_{\text{molar, He}} = 4,0 \text{ g/mol}$ gesucht: $v_{\text{rms}} = ?$
 $T = 290 \text{ K}$
einatomiges Gas

Ein einatomiges Gas hat nur die drei Freiheitsgrade der Translation.

$$\begin{aligned}\frac{m_{\text{He-Atom}}}{2} v_{\text{rms}}^2 &= \frac{3}{2} kT \\ \frac{M_{\text{molar, He}}}{2} v_{\text{rms}}^2 &= \frac{3}{2} RT \\ v_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{molar, He}}}} = 1,34 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

b) Wie groß ist die Stoffmenge des eingeschlossenen Heliums?

Lösung:

gegeben: $M_{\text{molar, He}} = 4,0 \text{ g/mol}$ gesucht: $n = ?$
 $m = 3,0 \text{ g}$

$$\begin{aligned}n &= \frac{m}{M_{\text{molar, He}}} = \frac{3,0 \text{ g}}{4,0 \text{ g/mol}} \\ &= 0,75 \cdot 10^3 \frac{\text{mol}}{\text{mol}}\end{aligned}$$

c) Wie viele He-Atome sind in der Flasche und wie groß ist die im Gas gespeicherte Wärmeenergie?

Lösung:

gegeben: $M_{\text{molar, Helium}} = 4,0 \text{ g/mol}$ gesucht: $N = ?$
 $T = 290 \text{ K}$ $U = ?$
 $m = 3,0 \text{ g}$
einatomiges Gas

$$\begin{aligned}n &= \frac{m}{M_{\text{molar, Helium}}} \\ N &= n \cdot N_A = \frac{m}{M_{\text{molar, Helium}}} \cdot N_A = 4,5 \cdot 10^{23} \text{ Moleküle} \\ \Rightarrow U &= N \cdot \frac{f}{2} kT = n \frac{3}{2} RT = \frac{m}{M_{\text{molar, Helium}}} \frac{3}{2} RT = 2,7 \cdot 10^3 \text{ J}\end{aligned}$$

d) Welcher Druck p wirkt auf die Flaschenwand?

Lösung:

gegeben: $M_{\text{molar, Helium}} = 4,0 \text{ g/mol}$ gesucht: $p = ?$
 $T = 290 \text{ K}$
 $m = 3,0 \text{ g}$
 $V = 3,0 \text{ l}$

$$\begin{aligned}p \cdot V &= nRT \\ p &= \frac{nRT}{V} = \frac{m}{M_{\text{molar, Helium}}} \cdot \frac{RT}{V} = 6,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}\end{aligned}$$

Zahlenwerte: $V = 3,0\text{ l}$; $T = 290\text{ K}$; $m = 3,0\text{ g}$; Molmasse von Helium: $M_{\text{molar, He}} = 4,0\text{ g/mol}$.

Quelle: Prüfungsaufgaben zur Experimentalphysik A und A/B

Aufgabe 6 (Ideales Gas; Prüfung ExPh A H2018A6 und A/B H2018A5)

Ein Mol Stickstoff (ideales, zweiatomiges Gas) werden unter verschiedenen Bedingungen von $T_1 = 300\text{ K}$ auf $T_2 = 900\text{ K}$ erwärmt.

- a) Berechnen Sie die Zunahme der inneren Energie, die verrichtete Arbeit und die zugeführte Wärmemenge, wenn das Volumen konstant gehalten wird.

Lösung:

gegeben:	$n = 1\text{ mol}$	gesucht:	$\Delta U = ?$
	$T_1 = 300\text{ K}$		$\Delta W = ?$
	$T_2 = 900\text{ K}$		$\Delta Q = ?$
	ideales zweiatomiges Gas		
	$V = \text{const.}$		

Es handelt sich um eine isochore Zustandsänderung, d.h. $\Delta V = 0$. Dabei wird keine (mechanische) Arbeit verrichtet, d.h. $\Delta W = 0$.

Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik folgt:

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q$$
$$\Delta Q = \Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T = n \cdot \frac{f}{2} \cdot R \cdot \Delta T$$

Mit $f = 5$ für ein zweiatomiges Gas und den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

$$\Delta Q = \Delta U = 1\text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (900\text{ K} - 300\text{ K})$$
$$= 12,5\text{ kJ}$$

- b) Berechnen Sie dieselben Größen wie in Fall a), wenn die Erwärmung bei konstanten Druck stattfindet.

Lösung:

gegeben:	$n = 1\text{ mol}$	gesucht:	$\Delta U = ?$
	$T_1 = 300\text{ K}$		$\Delta W = ?$
	$T_2 = 900\text{ K}$		$\Delta Q = ?$
	ideales zweiatomiges Gas		
	$p = \text{const.}$		

Es handelt sich hier um eine isobare Zustandsänderung, d.h. $\Delta p = 0$.

Für die Änderung der inneren Energie ΔU gilt wie im Teil a).

$$\Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 1\text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (900\text{ K} - 300\text{ K}) = 12,5\text{ kJ}$$

Die Änderung der Wärmemenge wird mit Hilfe der isobare Wärmekapazität $c_p = c_V + R$ bestimmt.

$$\Delta Q = n \cdot c_p \cdot \Delta T = n \cdot \left(\frac{f}{2} + 1 \right) \cdot R \cdot \Delta T$$
$$= 1\text{ mol} \cdot \left(\frac{5}{2} + 1 \right) \cdot 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (900\text{ K} - 300\text{ K}) = 17,5\text{ kJ}$$

Die (mechanische) Arbeit wird dann wieder über den ersten Hauptsatz bestimmt.

$$\Delta W = \Delta U - \Delta Q = -n \cdot R \cdot \Delta T = -5,0\text{ kJ}$$

Das Minuszeichen zeigt an, dass das System Arbeit an der Umgebung bei der Expansion verrichtet.

- c) Begründen Sie, warum die isobare Wärmekapazität c_p größer ist als die isochore Wärmekapazität c_V .

Lösung:

Bei einer isobaren Erwärmung dehnt sich das Gas aus und verrichtet an der Umgebung mechanische Arbeit. Dies bedeutet, dass die zugeführte Wärmemenge neben der Erhöhung der inneren Energie auch die für die Expansion nötige Energie (siehe Teil b)) bereit stellen muss. Daher ist die isobare Wärmekapazität c_p größer als die isochore Wärmekapazität c_V .

- d) Wie ändern sich die Ergebnisse in a) und b), wenn statt Stickstoff das einatomige Gas Helium verwendet wird?

Lösung:

Die Zahl der Freiheitsgrade beträgt in diesem Fall $f = 3$. Die Rechnungen bleiben ansonsten unverändert.

- a) isochor

gegeben:	$n = 1 \text{ mol}$	gesucht:	$\Delta U = ?$
	$T_1 = 300 \text{ K}$		$\Delta W = ?$
	$T_2 = 900 \text{ K}$		$\Delta Q = ?$
	ideales einatomiges Gas		
	$V = \text{const.}$		

Es handelt sich um eine isochore Zustandsänderung, d.h. $\Delta V = 0$. Dabei wird keine (mechanische) Arbeit verrichtet, d.h. $\Delta W = 0$.

Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik folgt:

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q$$

$$\Delta Q = \Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T = n \cdot \frac{f}{2} \cdot R \cdot \Delta T$$

Mit $f = 3$ für ein einatomiges Gas und den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

$$\Delta Q = \Delta U = 1 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (900 \text{ K} - 300 \text{ K})$$

$$= 7,5 \text{ kJ}$$

- b) isobar

gegeben:	$n = 1 \text{ mol}$	gesucht:	$\Delta U = ?$
	$T_1 = 300 \text{ K}$		$\Delta W = ?$
	$T_2 = 900 \text{ K}$		$\Delta Q = ?$
	ideales einatomiges Gas		
	$p = \text{const.}$		

Es handelt sich hier um eine isobare Zustandsänderung, d.h. $\Delta p = 0$.

Für die Änderung der inneren Energie ΔU gilt wie im der isochoren Prozessführung.

$$\Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 1 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (900 \text{ K} - 300 \text{ K}) = 7,5 \text{ kJ}$$

Die Änderung der Wärmemenge wird mit Hilfe der isobare Wärmekapazität $c_p = c_V + R$ bestimmt.

$$\Delta Q = n \cdot c_p \cdot \Delta T = n \cdot \left(\frac{f}{2} + 1 \right) \cdot R \cdot \Delta T$$

$$= 1 \text{ mol} \cdot \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \cdot 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (900 \text{ K} - 300 \text{ K}) = 12,5 \text{ kJ}$$

Die (mechanische) Arbeit wird dann wieder über den ersten Hauptsatz bestimmt.

$$\Delta W = \Delta U - \Delta Q = -n \cdot R \cdot \Delta T = -5,0 \text{ kJ}$$

Das Minuszeichen zeigt an, dass das System Arbeit an der Umgebung bei der Expansion verrichtet.

Quelle: Prüfungsaufgaben zur Experimentalphysik A und A/B