

Klausur A Frühjahr 2016

Aufgabe 1 (Geostationärer Satellit)

- a) Geostationäre Satelliten befinden sich immer über dem gleichen Ort des Äquators. Berechnen Sie den Abstand eines solchen Satelliten zum Erdmittelpunkt mit Hilfe der Erdbeschleunigung g , des Erdradius $r_E = 6378 \text{ km}$ und der Rotationsperiode T der Erde um ihre eigene Achse.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 F_{ZF} &= \omega^2 R \cdot m_s \\
 F_g &= \gamma \frac{m_E \cdot m_s}{R^2}; \text{ mit } g = \gamma \cdot \frac{m_E}{R_E^2} \rightarrow m_E = \frac{g}{\gamma} R_E^2 \\
 F_g &= \frac{g \cdot R_E^2}{R^2} \cdot m_s \\
 \omega^2 \cdot R \cdot m_s &= g \cdot \left(\frac{R_E}{R} \right)^2 \cdot m_s \\
 \omega &= \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{ s}} = 72,7 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{s}} \\
 R^3 &= \frac{g \cdot R_E^2}{\omega^2} \\
 R &= \sqrt[3]{\frac{g \cdot R_E^2}{\omega^2}} = 42257 \text{ km}
 \end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit v_F , mit der ein Körper der Masse m von der Erdoberfläche mindestens abgeschossen werden muss, um das Schwerfeld der Erde verlassen zu können (sog. Fluchtgeschwindigkeit). Luftreibung und Erdrotation bleibe unberücksichtigt.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{\text{pot}} &= \int_{R_E}^{\infty} \frac{\gamma \cdot m_E \cdot m}{r^2} \text{ d}r = - \underbrace{\gamma \cdot m_E \cdot m}_{g \cdot R_E^2 \cdot m} \cdot \left[\frac{1}{r} \right]_{R_E}^{\infty} \\
 &= +g \cdot R_E^2 \cdot m \cdot \frac{1}{R_E} = g \cdot m \cdot R_E \\
 E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} m v^2 \stackrel{!}{=} \Delta E_{\text{pot}} = g \cdot m \cdot R_E \\
 v_F &= \sqrt{2g \cdot R_E} = 11,186 \text{ km/s}
 \end{aligned}$$

Quelle: Prüfungsaufgaben zur Experimentalphysik A und A/B

Aufgabe 2 (Wasserstrahl; Prüfung ExPh A F2016A2 und A/B F2016A2)

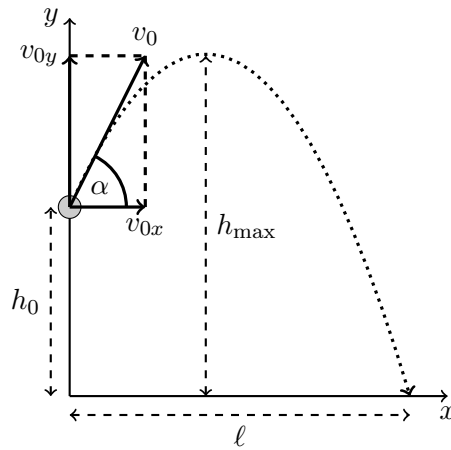
Ein Wasserstrahl verlässt ein Rohr in einer Anfangshöhe $h_0 = 2 \text{ m}$ über dem Boden mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 km/h unter einem Winkel von 60° gegen die Horizontale schräg nach oben.

- a) Welche Art von Kurve beschreibt der Wasserstrahl in der Luft? Skizzieren Sie die Bahn des Wassers in der Luft qualitativ.

Parabelbahn

Lösung:

Der Wasserstrahl beschreibt eine Parabelbahn.



b) Wie groß ist die maximale Höhe über dem Boden, die das Wasser erreicht?

3,18 m

Lösung:

Die Bewegung kann zerlegt werden in eine gleichförmige Bewegung in x -Richtung und eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung in y -Richtung. Wir betrachten nun zunächst die Bewegung in y -Richtung. Es gilt allgemein:

$$y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0$$

$$v_y(t) = a_y t + v_{0y}$$

$$a_y(t) = \text{const.}$$

Es gelten folgende Anfangsbedingungen:

$$y(t=0) = h_0$$

$$v_y(t=0) = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$

$$a_y = -g$$

Für die Höhe $h(t)$ gilt damit:

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + h_0$$

Bestimmen des Maximums $h(t_{\max})$ durch $v_y(t_{\max}) = h'(t_{\max}) \stackrel{!}{=} 0$ und $h''(t_{\max}) = -g < 0$

$$h'(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow t_{\max} = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(t_{\max}) &= -\frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \cdot \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} + h_0 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(v_0 \sin(\alpha))^2}{g} + h_0 = \frac{1}{2} \frac{\left(5,56 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sin(60^\circ) \right)^2}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} + 2 \text{ m} \\ &= 3,18 \text{ m} \end{aligned}$$

c) Wie lange ist das Wasser ab seinem Austritt aus dem Rohr bis zum Auftreffen auf den Boden in der Luft?

1,30 s

Lösung:

Die Zeit die das Wasser in der Luft ist lässt sich bestimmen aus der Aufprallzeit t_a . Es gilt:

$$\begin{aligned}
 h(t_a) &\stackrel{!}{=} 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + h_0 \\
 0 &= t^2 - 2 \cdot \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} - \frac{2h_0}{g} \\
 t_{a1,2} &= \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \stackrel{(\pm)}{=} \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}} \\
 t_{a1} &= \frac{5,56 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sin(60^\circ)}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} + \sqrt{\left(\frac{5,56 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sin(60^\circ)}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\right)^2 + \frac{2 \cdot 2 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \\
 &= 1,30 \text{ s}
 \end{aligned}$$

d) Wie groß ist die horizontale Reichweite des Wasserstrahls, bis er auf den Boden trifft?

3,6 m

Lösung:

Die Reichweite ergibt sich aus der Bewegung in x -Richtung. Es gilt allgemein:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= v_{0x}t + x_0 \\
 v_x(t) &= \text{const.}
 \end{aligned}$$

Es gelten folgende Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
 x(t=0) &= 0 \\
 v_x(t=0) &= v_0 \cdot \cos(\alpha)
 \end{aligned}$$

Damit gilt dann für die Weite $\ell(t)$:

$$\ell(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$$

Die Reichweite $\ell_{\max}$ ergibt sich dann zum Aufprallzeitpunkt als $\ell_{\max} = \ell(t_{a1})$

$$\begin{aligned}
 \ell_{\max} &= v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t_{a1} \\
 &= 5,56 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cos(60^\circ) \cdot 1,30 \text{ s} \\
 &= 3,6 \text{ m}
 \end{aligned}$$

e) Mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel trifft das Wasser auf dem Boden auf?
8,41 m/s; 70,7°

Lösung:

Wir bestimmen die Geschwindigkeit in x - und y -Richtung zum Zeitpunkt des Aufpralls

$$\begin{aligned}
 v_x(t_{a1}) &= v_0 \cdot \cos(\alpha) \\
 v_y(t_{a1}) &= h'(t_{a1}) = -g \cdot t_{a1} + v_0 \cdot \sin(\alpha)
 \end{aligned}$$

Damit lässt sich Betrag v_a und Richtung β_a von $\vec{v}_a$ bestimmen.

$$\begin{aligned}
 v_a &= \sqrt{v_x^2(t_{a1}) + v_y^2(t_{a1})} = \sqrt{(v_0 \cdot \cos(\alpha))^2 + (-g \cdot t_{a1} + v_0 \cdot \sin(\alpha))^2} \\
 &= \sqrt{\left(5,56 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cos(60^\circ)\right)^2 + \left(-9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,30 \text{ s} + 5,56 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sin(60^\circ)\right)^2} \\
 &= 8,41 \text{ m/s} \\
 -\tan(\beta_a) &= \frac{v_y(t_{a1})}{v_x(t_{a1})} \\
 \Rightarrow \beta_a &= -\arctan\left(\frac{-g \cdot t_{a1} + v_0 \cdot \sin(\alpha)}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}\right) \\
 &= -\arctan\left(\frac{-9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,30 \text{ s} + 5,56 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sin(60^\circ)}{5,56 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cos(60^\circ)}\right) \\
 &= 70,7^\circ
 \end{aligned}$$

- f) Welche Pumpleistung ist mindestens erforderlich, wenn pro Sekunde 10 Liter Wasser aus dem Rohr austreten? 154,56 W

Lösung:

Die Pumpleistung P ergibt sich aus der Energie die man pro Sekunde in das Wasser stecken muss um es auf die Anfangsgeschwindigkeit v_0 zu bekommen.

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} m v_0^2}{t} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V \cdot v_0^2}{t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 \frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 10 \text{ l} \cdot 5,56^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{1 \text{ s}} \\
 &= 154,56 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Quelle: Prüfungsaufgaben zur Experimentalphysik A und A/B

Aufgabe 3 (Walzenrennen an der schiefen Ebene, Prüfung ExPh A F2016A3)

Zwei zylinderförmige Walzen von jeweils der Masse $M = 1,0 \text{ kg}$ und dem Radius $r = 10 \text{ cm}$, nämlich eine homogene Vollwalze und eine Walze in Form eines dünnwandigen Hohlzylinders, rollen nebeneinander eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30^\circ$ und dem Gesamt-Höhenunterschied $H = 1,2 \text{ m}$ hinab. Die Startgeschwindigkeit in der Starthöhe H sei jeweils null. Rollreibung werde vernachlässigt.

- a) Welche der beiden Walzen ist schneller am Ziel und warum? Vollwalze, $\theta_{VZ} < \theta_{HZ}$

Lösung:

Der Vollzylinder ist schneller am Ziel. Der Hohlzylinder hat seine Masse im Schnitt weiter von der Drehachse entfernt. Dies führt zu einem größeren Trägheitsmoment. Und damit wird mehr Energie in die Rotation als in die Translation umgesetzt.

Trägheitsmoment Vollzylinder (Trägheitsmoment um Schwerpunkt)

$$\theta_{VZ} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2$$

Herleitung:

$$\begin{aligned}\Theta_{VZ} &= \int_0^r r'^2 \, dm \text{ mit } dm = \underbrace{\frac{M}{\pi r^2}}_{M/A} \cdot dr' \cdot \underbrace{2\pi r'}_{\substack{\text{Umfang bei } r \\ \text{Flächenelement}}} \\ &= \frac{2m}{r^2} \int_0^r r'^3 \, dr' = \frac{1}{2} M r^2\end{aligned}$$

Trägheitsmoment Hohlzylinder

$$\theta_{HZ} = M \cdot r^2$$

- b) Wie groß sind die Winkelbeschleunigung und Beschleunigung der Hohlwalze? $24,525 \text{ rad/s}^2$; $2,4525 \text{ m/s}^2$

Lösung:

Achtung: Leider wurden in der Aufgabenstellung ungünstige Buchstaben als Bezeichner verwendet. Bitte nicht Masse mit Drehmoment und Anstellwinkel mit Winkelbeschleunigung verwechseln. Wir diskutieren gleich beide Fälle da die Lösung später noch gebraucht wird.

eine Möglichkeit:

Abrollen um den Auflagepunkt

$$F_{HA} = m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (\text{beschleunigende Kraft})$$

$$|\vec{M}| = \Theta' \frac{d\omega}{dt}$$

Mit dem Steinerschen Satz

Vollzylinder:

$$\Theta'_{VZ} = \Theta_{VZ} + M r^2 = \frac{1}{2} M r^2 + M r^2 = \frac{3}{2} M r^2$$

$$\alpha_{VZ} = \frac{d\omega_V}{dt} = \frac{|\vec{M}|}{\Theta'_{VZ}} = \frac{F_{HA} \cdot r}{\Theta'_{VZ}} = \frac{M g \cdot \sin \alpha \cdot r}{\frac{3}{2} M r^2} = \frac{2 g \cdot \sin \alpha}{3 r} = 32,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Hohlwalze:

$$\Theta'_{HZ} = \Theta_{HZ} + M r^2 = M r^2 + M r^2 = 2 M r^2$$

$$\alpha_{HZ} = \frac{d\omega_H}{dt} = \frac{|\vec{M}|}{\Theta'_{HZ}} = \frac{g \cdot \sin \varphi}{2 r} = 24,525 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

andere Lösungsmöglichkeit:

Überlagerung einer linearen und einer Rotationsbewegung

lineare Bewegung:

$$M \cdot a = F_{HA} - F_R \quad (F_R : \text{Reibkraft})$$

$$\text{mit Rollbedingung } a = \alpha \cdot r \quad \text{und} \quad F_{HA} = M \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow M \cdot \alpha \cdot r = M \cdot g \cdot \sin \alpha - F_R$$

Rotationsbewegung:

$$|\vec{M}| = r \cdot F_R = \Theta \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad F_R = \frac{\Theta \cdot \alpha}{r}$$

eingesetzt:

$$\begin{aligned} M\alpha r &= Mg \sin \varphi - \frac{\Theta \alpha}{r} \\ \alpha \left(Mr + \frac{\Theta}{r} \right) &= Mg \sin \alpha \\ \alpha &= \frac{Mg \sin \alpha}{Mr + \Theta/r} \end{aligned}$$

Vollwalze:

$$\alpha_{VZ} = \frac{Mg \sin \alpha}{Mr + \frac{1}{2}M\frac{r^2}{r}} = \frac{2g \sin \alpha}{3r} = 32,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Hohlwalze:

$$\alpha_{HZ} = \frac{Mg \sin \varphi}{Mr + M\frac{r^2}{r}} = \frac{g \sin \alpha}{2r} = 24,525 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Die Beschleunigung erhält man in beiden Fällen aus der Rollbedingung:

$$\begin{aligned} a &= \alpha \cdot r \\ a_{VZ} &= \alpha_{VZ} \cdot r = 3,27 \text{ m/s}^2 \\ a_{HZ} &= \alpha_{HZ} \cdot r = 2,4525 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

- c) Welche Winkelgeschwindigkeit und welche Geschwindigkeit erreicht die Hohlwalze nach Durchlaufen des Höhenunterschiedes H ? 34,31 rad/s; 3,43 m/s

Lösung:

Die Rollstrecke s kann bestimmt werden durch:

$$s = \frac{H}{\sin \alpha}$$

Die Geschwindigkeit kann aus den Gleichungen für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung gewonnen werden.

$$v_{HZ} = \sqrt{2 \cdot a_{HZ} \cdot s} = \sqrt{2 \cdot \frac{g \sin \alpha}{2} \cdot \frac{H}{\sin \alpha}} = \sqrt{gH} = 3,43 \text{ m/s}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist dann

$$\omega_{HZ} = \frac{v_{HZ}}{r} = 34,31 \text{ rad/s}$$

- d) Wie groß sind bei der Hohlwalze (i) Impuls, (ii) Drehimpuls, (iii) kinetische Energie der Translation, (iv) kinetische Energie der Rotation und (v) gesamte kinetische Energie nach Durchlaufen des Höhenunterschiedes H ? 3,43 $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$; 0,343 $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$; 5,886 J; 5,886 J; 11,772 J;

Lösung:

- (i) $p_{HZ} = M \cdot v_{HZ} = 3,43 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$
(ii) $L_{HZ} = \Theta \cdot \omega_{HZ} = 0,343 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$
(iii) $E_{\text{kin},HZ} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_{HZ}^2 = 5,886 \text{ J}$
(iv) $E_{\text{rot},HZ} = \frac{1}{2} \cdot \Theta_{HZ} \cdot \omega_{HZ}^2$

$$(v) \quad E_{\text{ges}} = E_{\text{kin,HZ}} + E_{\text{rot,HZ}} = M \cdot g \cdot H = 11,772 \text{ J}$$

- e) Wie groß sind Winkelbeschleunigung und Beschleunigung der Vollwalze? Welche Endgeschwindigkeit erreicht die Vollwalze nach Durchlaufen des Höhenunterschiedes H ?

Hinweis: Das Trägheitsmoment der Vollwalze ist halb so groß wie das der Hohlwalze

$$32,7 \text{ rad/s}^2; 3,27 \text{ m/s}^2; 3,96 \text{ m/s}$$

Lösung:

Achtung: gleiche Lösung wie oben nur hier der Vollzylinder alleine den Fall es wurde überlesen.

eine Möglichkeit:

Abrollen um den Auflagepunkt

$$F_{\text{HA}} = m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (\text{beschleunigende Kraft})$$

$$|\vec{M}| = \Theta' \frac{d\omega}{dt}$$

Mit dem Steinerschen Satz

$$\Theta'_{\text{VZ}} = \Theta_{\text{VZ}} + Mr^2 = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2$$

$$\alpha_{\text{VZ}} = \frac{d\omega_V}{dt} = \frac{|\vec{M}|}{\Theta'_{\text{VZ}}} = \frac{F_{\text{HA}} \cdot r}{\Theta'_{\text{VZ}}} = \frac{M \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot r}{\frac{3}{2} M r^2} = \frac{2g \cdot \sin \alpha}{3r} = 32,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

andere Lösungsmöglichkeit:

Überlagerung einer linearen und einer Rotationsbewegung

lineare Bewegung:

$$M \cdot a = F_{\text{HA}} - F_{\text{R}} \quad (F_{\text{R}} : \text{Reibkraft})$$

$$\text{mit Rollbedingung} \quad a = \alpha \cdot r \quad \text{und} \quad F_{\text{HA}} = M \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \quad M \cdot \alpha \cdot r = M \cdot g \cdot \sin \alpha - F_{\text{R}}$$

Rotationsbewegung:

$$|\vec{M}| = r \cdot F_{\text{R}} = \Theta \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad F_{\text{R}} = \frac{\Theta \cdot \alpha}{r}$$

eingesetzt:

$$M\alpha r = Mg \sin \alpha - \frac{\Theta \alpha}{r}$$

$$\alpha \left(Mr + \frac{\Theta}{r} \right) = Mg \sin \alpha$$

$$\alpha = \frac{Mg \sin \alpha}{Mr + \Theta/r}$$

$$\alpha_{\text{VZ}} = \frac{Mg \sin \alpha}{Mr + \frac{1}{2}Mr^2/r} = \frac{2g \sin \alpha}{3r} = 32,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Die Beschleunigung erhält man in beiden Fällen aus der Rollbedingung:

$$a = \alpha \cdot r$$

$$a_{\text{VZ}} = \alpha_{\text{VZ}} \cdot r = 3,27 \text{ m/s}^2$$

Die Rollstrecke s kann bestimmt werden durch:

$$s = \frac{H}{\sin \alpha}$$

Die Geschwindigkeit kann aus den Gleichungen für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung gewonnen werden.

$$v_{VZ} = \sqrt{2 \cdot a_{VZ} \cdot s} = \sqrt{2 \cdot \frac{2g \sin \alpha}{3} \cdot \frac{H}{\sin \alpha}} = \sqrt{\frac{4}{3} g H} = 3,96 \text{ m/s}$$

- f) Welche Endgeschwindigkeit erreicht ein kleiner Würfel gleicher Masse, der reibungslos die gleiche schiefe Ebene hinabgleitet, ach Durchlaufen des entsprechenden Höhenunterschiedes H ? Wie groß ist dabei seine Momentanbeschleunigung (i) direkt nach dem Start und (ii) auf halber Höhe des Hanges? Welche kinetische Energie hat er nach dem Durchlaufen des Höhenunterschiedes H ?

4,85 m/s; 4,9 m/s²; 4,9 m/s²; 11,772 J

Lösung:

Es gilt Energieerhaltung:

$$M \cdot g \cdot H = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2$$

$$E_{\text{kin}} = M \cdot g \cdot H = 11,772 \text{ J}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} = 4,85 \text{ m/s}$$

Die beschleunigende Kraft ist die Hangabtriebskraft, diese ist unabhängig vom Ort auf der Bahn, daher ist die Beschleunigung immer gleich. Es gilt:

$$a = \frac{F_H}{M} = \frac{M \cdot g \cdot \sin \alpha}{M} = g \sin \alpha = 4,9 \text{ m/s}^2$$

- g) Wie ändern sich die Ergebnisse aus f), wenn der Körper jetzt nicht mehr reibungslos gleitet, sondern mit einem Gleitreibungskoeffizienten von $\mu_{gl} = 0,1$? 4,41 m/s; 4,06 m/s²; 4,06 m/s²; 9,73 J

Lösung:

Die beschleunigende Kraft ist die Vektorsumme aus Hangabtriebskraft und der Reibungskraft, diese ist unabhängig vom Ort auf der Bahn, daher ist die Beschleunigung auch hier immer gleich. Es gilt:

$$a = \frac{F_H - F_R}{M} = \frac{M \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu_{gl} \cdot M \cdot g \cos \alpha}{M} = g(\sin \alpha - \mu_{gl} \cdot \cos \alpha) = 4,06 \text{ m/s}^2$$

Die Geschwindigkeit kann man wieder aus der gleichförmig beschleunigten Bewegung erhalten.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2 \cdot a \cdot s} = \sqrt{2 \cdot g(\sin \alpha - \mu_{gl} \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{H}{\sin \alpha}} \\ &= \sqrt{2 \cdot g \cdot H \left(1 - \mu_{gl} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)} = 4,41 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Und damit die kinetische Energie

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 = M \cdot g \cdot H \left(1 - \mu_{gl} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) \\ &= 9,73 \text{ J} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Stimmgabel; Prüfung ExPh A F2016A4 und A/B F2016A3)

Ein halbseitig offenes Glasrohr der Länge $\ell = 1\text{ m}$ lässt sich auf beliebige Höhe h mit Wasser füllen. Eine Stimmgabel der Frequenz $\nu = 680\text{ Hz}$ werde über das offene Rohrende gehalten. Es gilt: $c_{\text{Schall,Luft}} = 340\text{ m/s}$.

- a) Wie groß ist die Wellenlänge der von der Stimmgabel erzeugten Schallwelle? 0,5 m

Lösung:

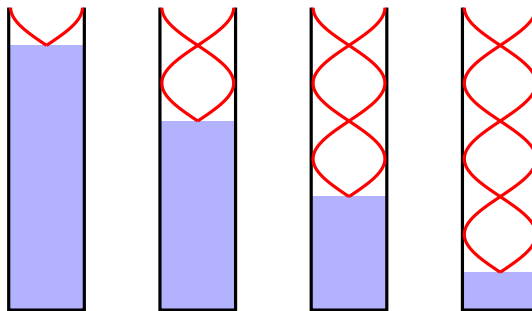
$$c = \lambda \cdot \nu$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 0,5\text{ m}$$

- b) Bei welchen Füllhöhen tritt Resonanz auf? Zeichnen Sie zunächst maßstabsgetreu die Knoten und Bäuche der Schwingungsamplituden für diese Fälle. 0,875 m; 0,625 m; 0,375 m; 0,125 m

Lösung:

Offenes Ende des Rohrs = Bewegungsbauch, geschl. Ende = Knoten



$$l - h_n = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad \text{mit } n \in 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$h_n = l - (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$$

$$\Rightarrow h_0 = 0,875\text{ m}$$

$$h_1 = 0,625\text{ m}$$

$$h_2 = 0,375\text{ m}$$

$$h_3 = 0,125\text{ m}$$

$$h_4 = -0,125\text{ m} \quad (\text{nicht möglich})$$

Aufgabe 5 (Zimmerluft; Prüfung ExPh A F2016A5 und A/B F2016A4)

Zimmerluft (ideales, zweiatomiges Gas) vom Volumen V und der Temperatur T werde durch eine elektrische Heizung der Leistung P um ΔT erwärmt. Dabei entweiche durch Ritzen Luft aus dem Zimmer, so dass der Druck p konstant bleibt. Der Wärmeübergang auf die Zimmerwände bleibe unberücksichtigt.

- a) Welche Aufheizzeit wird zum Erreichen der Temperaturdifferenz ΔT gebraucht?

15,65 s

Lösung:

Die benötigte Aufheizzeit Δt kann aus der Leistung P und der Änderung der Wärmemenge ΔQ bestimmt werden. Es gilt:

$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{P}$$

Wir wollen nun die Änderung der Wärmemenge ΔQ berechnen. Es handelt sich um eine isobare Zustandsänderung ($p = \text{const.}$). Es ist zu beachten, dass Luft entweichen kann und somit die Teilchenzahl n von der Temperatur T abhängt.

$$\begin{aligned} dQ &= n(T) \cdot c_p \cdot dT \\ \Rightarrow \Delta Q &= \int_{Q_1}^{Q_2} dQ = \int_T^{T+\Delta T} n(T) \cdot c_p \cdot dT \end{aligned}$$

$n(t)$ kann aus der idealen Gasgleichung berechnet werden, die spezifische Wärme bei konstantem Druck c_p kann aus den Freiheitsgraden f bestimmt werden.

$$\begin{aligned} n(T) &= \frac{pV}{RT} \\ c_v &= \frac{f}{2} R \\ c_p &= c_v + R = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) R \end{aligned}$$

Damit kann man nun durch Integration die Änderung der Wärmemenge ΔQ berechnen.

$$\begin{aligned} dQ &= n(T) \cdot c_p \cdot dT = n(T) \left(\frac{f}{2} + 1 \right) R dT = \frac{pV}{RT} \left(\frac{f}{2} + 1 \right) R \cdot dT \\ \Delta Q &= \int_T^{T+\Delta T} n(T) \cdot c_p \cdot dT = pV \left(\frac{f}{2} + 1 \right) \ln \frac{T + \Delta T}{T} \end{aligned}$$

Mit $f = 5$ für ein zweiatomiges Gas und den Angaben in SI-Einheiten kann nun die Zeit bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta Q}{P} = \frac{pV}{P} \left(\frac{f}{2} + 1 \right) \ln \frac{T + \Delta T}{T} = \frac{pV}{P} \left(\frac{f}{2} + 1 \right) \ln \frac{T + \Delta T}{T} \\ \Delta t &= \frac{1 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 100 \text{ m}^3}{750 \text{ W}} \left(\frac{5}{2} + 1 \right) \ln \frac{298,15 \text{ K} + 0,1 \text{ K}}{298,15 \text{ K}} = 15,65 \text{ s} \end{aligned}$$

- b) Man zeige, dass die innere Energie der im Zimmer verbleibenden Luft während des Aufheizprozesses konstant bleibt, man also tatsächlich „zum Fenster hinaus“ heizt.

Lösung:

Die innere Energie zu einem beliebigen Zeitpunkt mit beliebiger Temperatur T ist gegeben als:

$$U = n(T) \cdot c_v \cdot T = \frac{pV}{RT} \frac{f}{2} RT = pV \frac{f}{2} = \text{const.}$$

Dies ist unabhängig von der Temperatur und hier auch konstant, da p, V und f konstant sind.

Zahlenwerte: $p = 1 \text{ bar}$; $V = 100 \text{ m}^3$; $P = 750 \text{ W}$; $T = 25^\circ\text{C}$; $\Delta T = 0,1^\circ\text{C}$.

Quelle: Prüfungsaufgaben zur Experimentalphysik A und A/B

Aufgabe 6 (Ideales Gas; Prüfung ExPh A F2016A5 und A/B F2016A6)

Zwei Mol Stickstoff (ideales, zweiatomiges Gas) werden unter verschiedenen Bedingungen von $T_1 = 300 \text{ K}$ auf $T_2 = 600 \text{ K}$ erwärmt.

- a) Berechnen Sie die Zunahme der inneren Energie, die verrichtete Arbeit und die zugeführte Wärmemenge, wenn das Volumen konstant gehalten wird. 12,5 kJ; 12,5 kJ; 0

Lösung:

Es handelt sich um eine isochore Zustandsänderung, d.h. $\Delta V = 0$. Dabei wird keine (mechanische) Arbeit verrichtet, d.h. $\Delta W = 0$.

Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik folgt:

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q$$

$$\Delta Q = \Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T = n \cdot \frac{f}{2} \cdot R \cdot \Delta T$$

Mit $f = 5$ für ein zweiatomiges Gas und den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Delta Q = \Delta U &= 2 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (600 \text{ K} - 300 \text{ K}) \\ &= 12,5 \text{ kJ}\end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie dieselben Größen, wenn die Erwärmung bei konstanten Druck stattfindet. 12,5 kJ; 17,4 kJ; -5,0 kJ

Lösung:

Es handelt sich hier um eine isobare Zustandsänderung, d.h. $\Delta p = 0$.

Für die Änderung der inneren Energie ΔU gilt wie im Teil a).

$$\Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T = 2 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (600 \text{ K} - 300 \text{ K}) = 12,5 \text{ kJ}$$

Die Änderung der Wärmemenge wird mit Hilfe der isobare Wärmekapazität $c_p = c_V + R$ bestimmt.

$$\begin{aligned}\Delta Q &= n \cdot c_p \cdot \Delta T = n \cdot \left(\frac{f}{2} + 1 \right) \cdot R \cdot \Delta T \\ &= 2 \text{ mol} \cdot \left(\frac{5}{2} + 1 \right) \cdot 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (600 \text{ K} - 300 \text{ K}) = 17,4 \text{ kJ}\end{aligned}$$

Die (mechanische) Arbeit wird dann wieder über den ersten Hauptsatz bestimmt.

$$\Delta W = \Delta U - \Delta Q = -n \cdot R \cdot \Delta T = -5,0 \text{ kJ}$$

Das Minuszeichen zeigt an, dass das System Arbeit an der Umgebung bei der Expansion verrichtet.

- c) Begründen Sie, warum die isobare Wärmekapazität c_p größer ist als die isochore Wärmekapazität c_V . zusätzliche Wärme für Expansion

Lösung:

Bei einer isobaren Erwärmung dehnt sich das Gas aus und verrichtet an der Umgebung mechanische Arbeit. Dies bedeutet, dass die zugeführte Wärmemenge neben der Erhöhung der inneren Energie auch die für die Expansion nötige Energie (siehe Teil b)) bereit stellen muss. Daher ist die isobare Wärmekapazität c_p größer als die isochore Wärmekapazität c_V .

Quelle: Prüfungsaufgaben zur Experimentalphysik A und A/B