Prof. Dr. Th. Schimmel
Dr. F. Wertz

Lösungen zum 14. Übungsblatt

1. a) Die Wasserstoff-Moleküle haben drei Freiheitsgrade der Translation und tragen somit die kinetische Energie $(3/2)kT$. Dies nutzen wir aus, um ihre mittlere Geschwindigkeit v_{rms} zu berechnen:

$$\frac{m}{2}v_{\text{rms}}^2 = \frac{3}{2}kT \quad |\cdot N_A$$

Für ein Mol Wasserstoff bedeutet das:

$$\frac{N_A \cdot m}{2}v_{\text{rms}}^2 = \frac{M_{\text{H}_2}}{2}v_{\text{rms}}^2 = \frac{3}{2}N_A kT = \frac{3}{2}RT \quad \Rightarrow$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{H}_2}}} \underline{\underline{= 1,9 \cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 6,8 \cdot 10^3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$$

b) Aus der Masse können wir die Anzahl der Moleküle mithilfe der Molmasse und der Avogadro-Zahl berechnen:

$$n = \frac{m}{M_{\text{H}_2}} \quad N = nN_A = \frac{m}{M_{\text{H}_2}}N_A \underline{\underline{= 9,0 \cdot 10^{23}}}$$

Die gespeicherte Wärmeenergie ergibt sich aus der kinetischen Energie der Translation und der der Rotation:

$$U = E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} = N\left(\frac{3}{2}kT + kT\right) = N \cdot \frac{f}{2}kT \quad (f = 5)$$

$$U = N \cdot \frac{5}{2}kT = n \cdot \frac{5}{2}RT = \frac{m}{M_{\text{H}_2}} \cdot \frac{5}{2}RT \underline{\underline{= 9,0\,\text{kJ}}} \quad \text{Hinweis:} \quad \frac{5}{2}R = c_V$$

c) Der Druck ergibt sich aus der idealen Gasgleichung:

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{nRT}{V} = \frac{m}{M_{\text{H}_2}}\frac{RT}{V} \underline{\underline{= 1,2 \cdot 10^6\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}}} \quad (12\,\text{bar})$$

Alternative mit abgeleiteter Formel:

$$p = \frac{\rho}{3}v_{\text{rms}}^2 = \frac{m}{3V}\frac{3RT}{M_{\text{H}_2}}$$

2. a) Vor dem Eintauchen haben Metall und Kalorimeterwasser verschiedene Temperaturen, nach dem Eintauchen haben beide T_E. Die Summe der Wärmeenergieen vorher und nachher bleibt erhalten.

$$c_M m_M T_M + c_W m_W T_A = c_M m_M T_E + c_W m_W T_E$$

$$c_M = \frac{c_W m_W (T_E - T_A)}{m_M (T_M - T_E)} \underline{\underline{= 0,38\,\frac{\text{J}}{\text{gK}}}}$$

b) Drei Freiheitsgrade der Vibration (jeweils mit pot. und kin. Energie) tragen jeweils R zur spezifischen Wärme bei.

$$c_{\text{mol,M}} = c_M M_M = N_A \cdot 3k = 3R \quad \Rightarrow \quad M_M = \frac{3R}{c_M} \underline{\underline{= 65 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}} \quad \Rightarrow \quad \text{Zn}$$

3. a) Die Teilchenzahl ist eine Funktion der Zeit, da durch die Ritzen Luft entweicht. Die Gesamtwärmeenergie integrieren wir während der Erwärmung:

$$\begin{aligned} dQ &= n(T)c_p dT = n(T)\left(\frac{f}{2}+1\right)RdT = \frac{pV}{RT}\left(\frac{f}{2}+1\right)RdT \\ Q &= \int_{T_1}^{T_2} dQ = pV\left(\frac{f}{2}+1\right)\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = P\Delta t \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\Delta t = \frac{pV}{P}\left(\frac{f}{2}+1\right)\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}} \end{aligned}$$

Luft: zweiatomige Moleküle $\Rightarrow f = 5$ (3 Translation, 2 Rotation) $\Rightarrow \underline{\underline{\Delta t = 23,5\text{s}}}$

b) Die Gesamtenergie des Systems ist:

$$\underline{\underline{U = n(T)c_V T = \frac{pV}{RT} \cdot \frac{f}{2}RT = pV\frac{f}{2}}} \quad \Rightarrow \quad U = \text{const.}$$

4. a) isochor bedeutet $V = \text{const.}$ und somit $\underline{\underline{\Delta W = 0}}$

$$\begin{aligned} \text{1. Hauptsatz:} \quad \Delta U &= \Delta W + \Delta Q \quad \Rightarrow \quad \Delta Q = \Delta U \\ \Delta Q &= \Delta U = nc_V\Delta T = n \cdot \frac{f}{2}R \cdot \Delta t = n \cdot \frac{5}{2}R \cdot \Delta T \underline{\underline{= 12,5\,\text{kJ}}} \end{aligned}$$

b) isobar bedeutet $p = \text{const.}$

$$\begin{aligned} \Delta U &= nc_V\Delta T \underline{\underline{= 12,5\,\text{kJ}}} \quad \text{s.o.} \\ \Delta Q &= nc_p\Delta T = n \cdot (c_V + R) \cdot \Delta T = n \cdot \left(\frac{f}{2}+1\right)R \cdot \Delta T = n \cdot \frac{7}{2}R \cdot \Delta T \underline{\underline{= 17,5\,\text{kJ}}} \\ \text{1. Hauptsatz:} \quad \Delta W &= \Delta U - \Delta Q = -nR\Delta T \underline{\underline{= -5,0\,\text{kJ}}} \end{aligned}$$

Mechanische Arbeit wird vom System verrichtet.

c) Die isobare Wärmekapazität ist größer als die isochore Wärmekapazität, da bei der isobaren Erwärmung das Gas expandiert und zusätzlich zur Erhöhung der inneren Energie (Temperaturerhöhung) die *für die Expansion des Gases erforderliche Arbeit* in Form von Wärme aufzubringen ist.

Es ist: $\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p\Delta V = nR\Delta T$

5. a) Adiabatisch bedeutet, dass $dQ = 0$, also dass kein Wärmeaustausch stattfindet.

b) Wir betrachten diesen Prozess also als adiabatisch und verwenden also die Adiabatengleichung:

$$\begin{aligned} pV^\kappa &= \text{const.} \quad \text{bzw. mit} \quad p = \frac{nRT}{V} \quad T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.} \\ &\Rightarrow \quad T' = T_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V'}\right)^{\kappa-1} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{f}{2}+1}{\frac{f}{2}} = \frac{f+2}{f} = \frac{7}{5} \\ &\Rightarrow \quad \Delta T = T' - T_0 = T_0 \cdot \left(\left(\frac{V_0}{V'}\right)^{\kappa-1} - 1\right) \underline{\underline{= 162\,\text{K}}} \end{aligned}$$

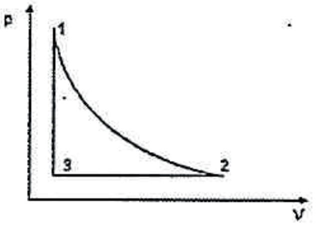
Da der Prozess adiabatisch ist, gilt $\Delta Q = 0$ und somit

$$\Delta W = \Delta U = nc_V \Delta T = \frac{p_0 V_0}{RT_0} \cdot \frac{5}{2} R \cdot T_0 \cdot \left(\left(\frac{V_0}{V'} \right)^{\kappa-1} - 1 \right) = \frac{5}{2} p_0 V_0 \cdot \left(\left(\frac{V_0}{V'} \right)^{\kappa-1} - 1 \right) \underline{\underline{= 27,6\,\mathrm{J}}}$$

c) Wir haben zwar nicht den Druckanstieg, jedoch sind Temperatur- und Volumenänderung bekannt:

$$p \cdot V^{\alpha} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad T \cdot V^{\alpha-1} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \frac{T'}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V'} \right)^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \quad \ln \frac{T'}{T_0} = (\alpha - 1) \ln \frac{V_0}{V'} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 + \frac{\ln \frac{T'}{T_0}}{\ln \frac{V_0}{V'}} = 1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)}{\ln \frac{V_0}{V'}} \underline{\underline{= 1,20}}$$



6. a) Skizze im p-V-Diagramm:

b) Es gilt: $\underline{\underline{T_2 = T_1}}$ da der Prozess $1 \to 2$ (also Schritt 1) isotherm ist.

Weiter gilt

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = V_1 \frac{p_1}{p_2} = V_1 \frac{p_1}{0,1 \cdot p_1} \underline{\underline{= 10\,V_1}}$$

Der Prozess $2 \to 3$ (Schritt 2) ist isobar, somit gilt

$$p_3 = p_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \quad \Rightarrow \quad T_3 = T_2 \frac{V_3}{V_2}$$

wobei $V_3 = V_1$ (da $3 \to 1$ (Schritt) isochor ist). Mit $T_2 = T_1$ und $V_2 = 10\,V_1$ (aus Isotherme, s.o.) und somit gilt $\underline{\underline{T_3 = \frac{T_1}{10}}}$

c)

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} p \mathrm{d}V = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V} \mathrm{d}V = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = -nRT_1 \ln 10 \underline{\underline{= -p_1 V_1 \ln 10}}$$

Dieser Wert ist kleiner als Null, denn das Gas verrichtet Arbeit W.

$$W_{23} = -\int_{V_2}^{V_3} p \mathrm{d}V = -p_2(V_3 - V_2) = -\frac{p}{10}(V_1 - 10V_1) \underline{\underline{= \frac{9}{10} p_1 V_1}}$$

Dieser Wert ist größer als Null, die Umgebung verrichtet Arbeit W.

$$W_{31} = -\int_{V_3}^{V_1} p \mathrm{d}V = 0 \quad \text{da} \quad V_1 = V_3$$

d) Insgesamt wird Arbeit verrichtet. Das ist bereits aus dem Umlaufsinn des Diagramms zu erkennen: Die Fläche unter der Kurve im pv-Diagramm bedeutet die verrichtete Arbeit. Es handelt sich also um eine Wärme-Kraftmaschine. Der Wirkungsgrad ist definiert als Quotient:

$$\eta_{\mathrm{WKM}} = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{|W_{\mathrm{ges}}|}{Q_{\mathrm{zugeführt}}}$$

i. Wir berechnen die verrichtete Arbeit (nach c):

$$W_{\mathrm{ges}} = -p_1 V_1 \left(\ln 10 - \frac{9}{10} \right)$$

ii. Jetzt berechnen wir die zugeführte Wärme:

$$\Delta U_{12} = 0 \Rightarrow \Delta Q_{12} = -\Delta W_{12} = p_1 V_1 \ln 10$$

Dieser Wert ist größer Null, es wird Wärme zugeführt.

$$\Delta Q_{23} = nc_p(T_3 - T_2) = n \cdot \frac{7}{2} R(T_3 - T_1) = \frac{7}{2} nRT_1(0,1-1) = ...$$

Dieser Wert ist kleiner Null, es wird Wärme abgegeben. Dabei verliert das Gas trotz zugeführter Arbeit Energie, denn bei einer isobaren Kompression kühlt das Gas ab.

$$\Delta Q_{31} = nc_V(T_1 - T_3) = n\frac{5}{2} RT_1(1-0,1) = \frac{9}{4} p_1 V_1$$

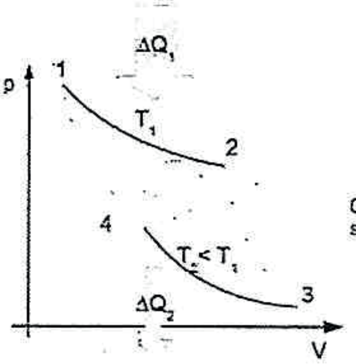
Dieser Wert ist größer Null, es wird Wärme zugeführt.

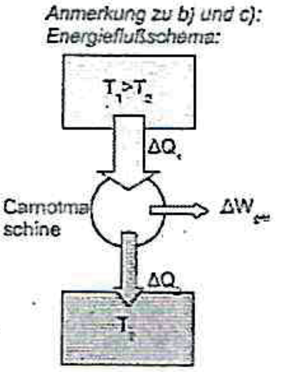
$$Q_{\text{zugeführt}} = \Delta Q_{12} + \Delta Q_{31} = p_1 V_1 \left(\ln 10 + \frac{9}{4}\right)$$

iii. Im dritten Schritt bilden wir den Quotient.

$$\eta = \frac{W_{\text{ges}}}{Q_{\text{zugeführt}}} = \frac{\ln 10 - \frac{9}{10}}{\ln 10 + \frac{9}{4}} = \underline{\underline{0,31}}$$

7. a) Der Carnot-Prozess ist ein Kreisprozess aus zwei Isothermen und zwei Adiabaten:
$1 \to 2$: isotherme Expansion: $T = T_1 =$ const. Daher ist auch $pV =$const. und somit ist $p \sim V^{-1}$ eine Hyperbel. Es gilt $\Delta Q_1 = -\Delta W_{12} > 0$
$2 \to 3$: adiabatische Expansion: $\Delta Q = 0$. Somit gilt $pV^\kappa =$const. Diese Kurve ist steiler als eine Hyperbel. Es gilt $\Delta W_{23} < 0$, Abkühlung.
$3 \to 4$: isotherme Kompression: $T = T_2 < T_1$ ist const. Da die Temperatur kleiner ist, ist auch $pV = nRT_2$ kleiner als nRT_1. Es gilt $\Delta Q_2 = -\Delta W_{34} < 0$
$4 \to 1$: adiabatische Kompression: $\Delta Q = 0$. Es gilt $\Delta W_{41} > 0$, und man hat eine Erwärmung von T_2 auf T_1.





b) Der ideale Wirkungsgrad einer Wärme-Kraftmaschine ist allgemein definiert als:

$$\eta_{\text{WKM}} = \frac{\text{pro Zyklus verrichtete Arbeit}}{\text{pro Zyklus zugeführte Wärme}} = \frac{|W_{\text{ges}}|}{Q_{\text{zugeführt}}}$$

c) Wir berechnen den Wirkungsgrad, indem wir ausnutzen, dass die verrichtete Arbeit in bei der isothermen Expansion und Kompression gleich der zugeführten Wärme ist, weil es sich um isotherme Prozesse handelt:

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{|W_{\text{ges}}|}{Q_1} = \frac{\Delta Q_{\text{ges}}}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q_1 - |\Delta Q_2|}{\Delta Q_1} = \underline{\underline{\frac{T_1 - T_2}{T_1}}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} < 1$$

Hinweis zur Herleitung:

i. Auf der Adiabate gilt: $\Delta Q = 0$:

$$\Delta W_{23} = \Delta U_{23} = nR(T_2 - T_1) \quad \rightarrow \quad \Delta W_{41} = -\Delta W_{23} \quad \Rightarrow \quad \Delta W_{\sum,\text{Adiabate}} = 0$$

ii. Isotherme:

$$\Delta Q_1 = -\Delta W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} \quad \text{bzw.} \quad \Delta Q_2 = -\Delta W_{34} = \int_{V_3}^{V_4} p\mathrm{d}V = nRT_2 \ln\frac{V_4}{V_3}$$

Die Volumina lassen sich mithilfe der Adiabaten berechnen:

$$\begin{aligned} TV^{\kappa-1} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad T_1 V_1^{\kappa-1} &= T_2 V_4^{\kappa-1} \quad \text{und andererseits} \\ T_1 V_2^{\kappa-1} &= T_2 V_3^{\kappa-1} \quad \text{somit} \\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{V_4}{V_3} &= -\ln\frac{V_2}{V_1} \end{aligned}$$

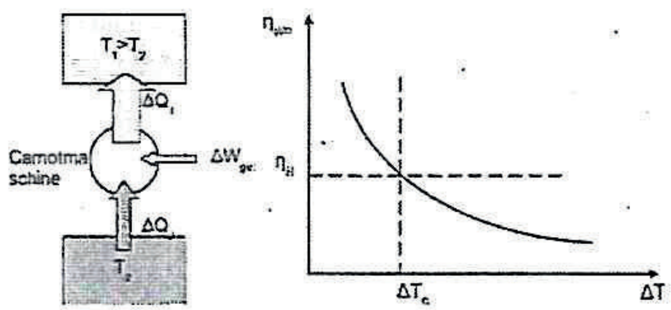
d) Wir erhalten jetzt eine Wärmepumpe

$$\eta_{\text{WP}} = \frac{E_{\text{Nutz}}}{E_{\text{Aufwand}}} = \frac{Q_1}{\Delta W_{\text{ges}}} = \frac{1}{\eta_{\text{Carnot}}} = \underline{\underline{\frac{T_1}{T_1 - T_2}}} > 1$$

oder eine Kältemaschine (also eine Klimaanlage oder ein Kühlschrank)

$$\eta_{\text{KM}} = \frac{Q_2}{\Delta W_{\text{ges}}} = \underline{\underline{\frac{T_2}{T_1 - T_2}}}$$

8. a) Wir skizzieren den Energiefluss und die Temperaturabhängigkeit des Wirkungsgrades einer Wärmepumpe:



$$\eta_{\text{WP}} = \frac{E_{\text{Nutz}}}{E_{\text{Aufwand}}} = \frac{|Q_1|}{\Delta W_{\text{ges}}} = \frac{|Q_1|}{|Q_1| - Q_2} = \frac{1}{\eta_{\text{Carnot}}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{T_1}{\Delta T} > 1$$

b)

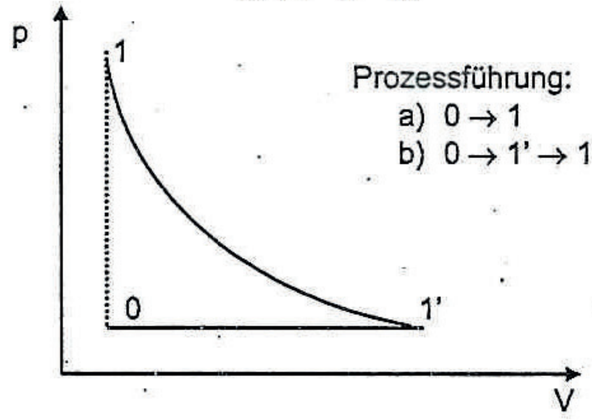
$$\eta_R = \frac{\eta_{WP}}{10} = \frac{T_1}{10\Delta T} \overset{!}{>} \eta_H = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta T \overset{!}{<} \frac{T_1}{10} \underline{\underline{= 29,8\,\text{K} = \Delta T_0}}$$

c)

$$\Delta W = W_H - W_{WP} = W_H - \frac{Q_1}{\eta_{WP}} = P_H t\left(1 - \frac{1}{\eta_{WP}}\right) = P_H t\left(1 - \frac{10\Delta T}{T_1}\right) \underline{\underline{= 957\,\text{kWh}}}$$

9. a) $\Delta S=\int_{S_0}^{S_1} dS=\int_{Q_0}^{Q_1}\frac{dQ}{T}=\int_{T_0}^{T_1}\frac{n\,c_V\,dT}{T}=\frac{p_0V_0}{RT_0}\cdot\frac{f}{2}R\cdot\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)=\frac{p_0V_0}{T_0}\cdot\frac{5}{2}\cdot\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)=0{,}83\frac{J}{K}$

b) Endzustand wie in a) (n, V_0, T_1);



Prozessführung:
a) $0\rightarrow 1$
b) $0\rightarrow 1'\rightarrow 1$

S ist Zustandsgröße: mit a) $\Rightarrow \Delta S=\frac{p_0V_0}{T_0}\cdot\frac{5}{2}\cdot\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)=0{,}83\frac{J}{K}$

Rechnen wir zur Übung mal lieber nach:

$$\Delta S_{isobar}=\int_{S_0}^{S_1'} dS=\int_{Q_0}^{Q_1'}\frac{dQ}{T}=\int_{T_0}^{T_1}\frac{n\,c_p\,dT}{T}=\frac{p_0V_0}{RT_0}\cdot\frac{f+2}{2}R\cdot\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)=\frac{p_0V_0}{T_0}\cdot\frac{7}{2}\cdot\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$\Delta S_{isotherm}=\int_{S_1'}^{S_1} dS=\int_{Q_1'}^{Q_1}\frac{dQ}{T}=\frac{1}{T_1}\int_{V_1'}^{V_0}p\,dV=\frac{1}{T_1}\int_{V_1'}^{V_0}\frac{nRT_1\,dV}{V}=-nR\cdot\ln\left(\frac{V_1'}{V_0}\right)$$

Mit Isobare: $\frac{V}{T}=\text{const.}\Rightarrow\frac{V_1'}{V_0}=\frac{T_1}{T_0}\qquad\Rightarrow$

$$\Delta S_{isotherm}=-\frac{p_0V_0}{RT_0}R\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)=-\frac{p_0V_0}{T_0}\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$$

$\Rightarrow\Delta S=\Delta S_{isobar}+\Delta S_{isotherm}=\frac{p_0V_0}{T_0}\cdot\frac{5}{2}\cdot\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$ *(vgl. mit oben: Ergebnis stimmt!)*