12. Ruhende Flüssigkeiten und Gase
(Hydrostatik und Aerostatik)

1) Druck in ruhenden Flüssigkeiten (ohne Gravitation)

Flüssigkeiten: • nehmen jede beliebige Form an;

• keine Scherkräfte in ruhenden Fl.

Flüssigkeit übt auf Wände Druck p aus.

$$\boxed{p := \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{F}{A}}$$

(Pascal)

$$[p] = 1\,\frac{N}{m^2} = 1\,Pa$$

$$1\,atm = 1{,}013 \cdot 10^5\,Pa$$

(1 Atmosphäre ≈ 1 bar)

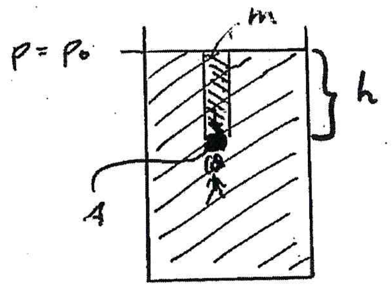
Pascalsches Prinzip: (für ruhende Flüssigkeiten)

Druck in geschlossenem Gefäß ist ohne Gravitation an jedem Ort innerhalb der Flüssigkeit gleich, in alle Richtungen gleich.

Bemerkungen: 1) p ist kein Vektor!

2) keine Scherkräfte $\Rightarrow$ p bewirkt $\vec{F} \perp$ Oberfläche der Wand: $\boxed{\vec{F} = p\vec{A}}$

2) Gravitation bei Flüssigkeiten: der Schweredruck



* Druck auf die Oberfläche der Fl.: p_0
(z.B. der Luftdruck von 1 atm ≈ 10^5 Pa)

* Horizontale Fläche A in der Tiefe h:
  - auf A wirkt p_0
  - auf A wirkt zusätzlich Gewichtskraft der darüberliegenden Fl.-säule ////

$$F = p_0 \cdot A + m \cdot g$$

$$= p_0 \cdot A + \rho_{Fl} \cdot V \, g \quad ; \ \rho_{Fl}: \text{Dichte der Fl.}$$

$$V = A \cdot h$$

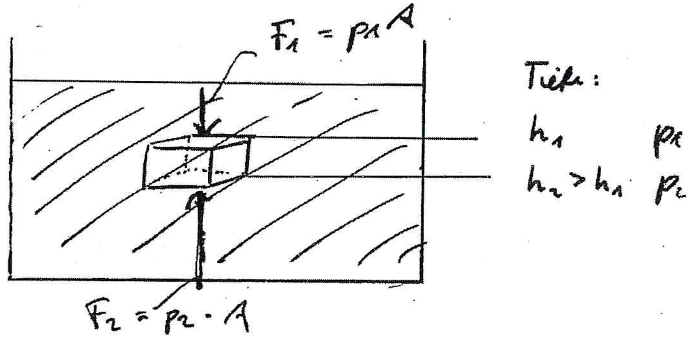
$$F = p_0 \cdot A + \rho_{Fl} \cdot h \cdot g \cdot A$$

$$\boxed{p(h) = \frac{F}{A} = p_0 + \underbrace{\rho_{Fl} \cdot h \cdot g}_{\text{Schweredruck in der Tiefe } h}}$$

Bsp.: H_2O: $p = 1$ bar für $h = 10$ m

3) Auftrieb; Prinzip von Archimedes

Körper in einer Flüssigkeit (oder einem Gas) erfährt durch den Schweredruck eine nach oben gerichtete Kraft, den sog. Auftrieb:



• Kraft von unten (nach oben gerichtet):

$$F_2 = (p_0 + \rho_{Fl} h_2 g)\, A$$

• Kraft von oben (nach unten gerichtet):

$$F_1 = (p_0 + \rho_{Fl} h_1 g)\, A$$

$h_2 > h_1 \Rightarrow |F_2| > |F_1|$

$$F_2 - F_1 = \rho_{Fl} \underbrace{(h_2 - h_1)\, A}_{V} \cdot g = \underbrace{\rho_{Fl} \cdot V}_{} \cdot g = m_{Fl} \cdot g$$

Masse des vom Quader verdrängten Fl.

$$\boxed{F_A = m_{Fl} \cdot g}$$

Prinzip von Archimedes

$\Rightarrow$ Auftriebskraft auf einen Körper ist entgegengesetzt gleich der Gewichtskraft auf die von ihm verdrängte Flüssigkeit. (oder Gas)

Gilt für beliebig geformte Körper (→ in winzige Quader zerlegbar)

Kraft auf Körper in Flüssigkeit:

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_G}$$

$\vec{F}_A$: nach oben; $\vec{F}_G$: nach unten

$$F = \underbrace{\rho_{Fl} \cdot V \cdot g}_{m_{Fl}} - \underbrace{\rho_K \cdot V}_{\text{Masse des Körpers}} \cdot g$$

$$\boxed{F = (\rho_{Fl} - \rho_K) \cdot V \cdot g}$$ Gesamtkraft

Fälle:

a) $\rho_K < \rho_{Fl} \Rightarrow |F_A| > |F_G| \Rightarrow$ Körper steigt auf, schwimmt

b) $\rho_K = \rho_{Fl} \Rightarrow |F_A| = |F_G| \Rightarrow$ Körper schwebt

c) $\rho_K > \rho_{Fl} \Rightarrow |F_A| < |F_G| \Rightarrow$ Körper sinkt

5

4) p(h) bei Gasen: die barometrische Höhenformel

Gase: Dichte ρ hängt vom Druck ab:

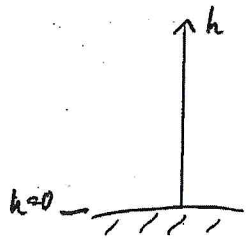
$$\rho \sim p, \quad \text{d.h.} \quad \boxed{\frac{\rho}{p} = \frac{\rho_0}{p_0} = \text{const}}$$

für T = const
(T: Temperatur)

ρ_0: Dichte auf der Erdoberfl.

p_0: Druck " " "

Druckänderung dp in dh:



$$dp = -\rho \cdot g \cdot dh$$

$$\rho = p \cdot \frac{\rho_0}{p_0}$$

$$dp = -p\,\frac{\rho_0}{p_0}\, g \cdot dh$$

$$\int_{p_0}^{p(h)} \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \int_0^h dh$$

Formel: $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \ln x_2 - \ln x_1 = \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$

$$\ln p - \ln p_0 = \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \cdot h \quad \exp$$

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left[-\frac{\rho_0}{p_0} g h\right] = e^{-\left(\frac{\rho_0}{p_0} g \cdot h\right)}$$

$$\boxed{p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} h\right)}$$

Barometrische Höhenformel

6

13. Oberflächenspannung und Kapillarität

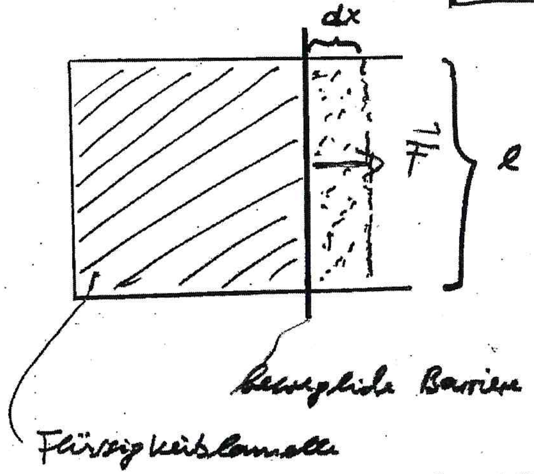
anziehende Kraft zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit

$\Rightarrow$ um Oberfläche um dA zu vergrößern, benötigt man Energie dE:

$$\boxed{dE = \sigma \cdot dA}$$

σ: Oberflächenspannung

$$\boxed{\sigma := \frac{dE}{dA}}$$



Filmwaage

$$dE = \overbrace{2}^{\text{2 Oberflächen!}} \cdot \sigma \cdot l \cdot dx$$

$$dE = F \cdot dx$$

$$\boxed{F = 2\sigma l}$$

Rückstellkraft unabhängig von A!

Anwendungen:

a) Druck in Flüssigkeitskugel:

Oberflächenenergie: $W = \underbrace{4\pi r^2}_{A} \cdot \sigma$

$$\frac{dW}{dr} = 4\pi \cdot 2r \cdot \sigma$$

$$dW = 8\pi r \sigma \cdot dr \qquad (1)$$

andererseits: $dW = F \, dr$

$$dW = p \cdot 4\pi r^2 \cdot dr \qquad (2)$$

(1) = (2): $p \cdot 4\pi r^{\cancel{2}} \cancel{dr} = 2 \cdot 4\pi \cdot \cancel{r} \cdot \sigma \cancel{dr}$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{2\sigma}{r}}$$

Folgen: Tröpfchenbildung

Vereinigung von Tröpfchen

Regen

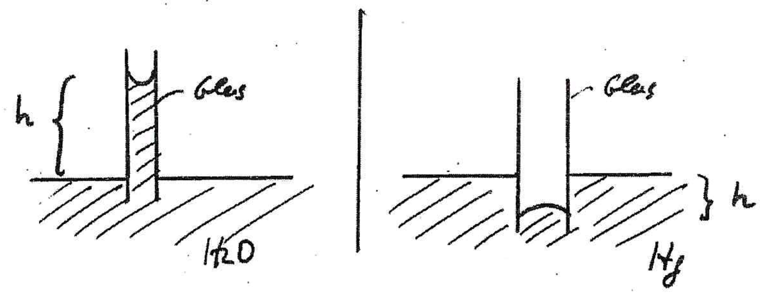
Härte von kleinen Hg-Tröpfchen (großes σ)

⋮

b) Druck in einer Seifenblase:

$p = \frac{4\sigma}{r}$, da 2 Oberflächen

c) Kapillarität und Grenzflächenspannung



Erzeugung von zusätzlicher Grenzfläche

setzt Energie frei (benetzend)	erfordert Energie (nicht benetzend)

Gleichgewicht:

$$\boxed{\underbrace{\frac{2\sigma}{r}}_{\text{Kapillardruck}} = \underbrace{\rho h g}_{\text{Schweredruck}}}$$

Anwendung:
- Verbleib von H_2O zwischen den Körnern im Erdreich trotz Schwerkraft
- Kapillaren in Pflanzen

σ: Grenzflächenspannung