14. 2) Die Bewegungsgleichung

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

oder in einer Dimension (z.B. in x-Richtung):

$$m \cdot a = \sum F_i \quad \text{(2. Newtonsches Gesetz)}$$

Beispiel Hookesche Feder (ohne Gravitation):

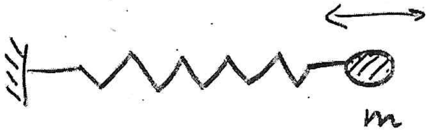
$$m \cdot \ddot{x} = -Dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + Dx = 0}$$

- Diese Schreibweise von "F = m·a" heißt Bewegungsgleichung der Masse m an einer Hookeschen Feder;

  beschreibt das physikalische Verhalten der Masse an einer Hookeschen Feder vollständig.

- Es handelt sich dabei um eine Differentialgleichung.



3) Differentialgleichungen (Dgln.)

Dgln: Gleichungen, die neben einer Funktion auch deren Ableitung(en) enthalten.

allg. Lösung einer Dgl. = Menge aller Lösungen dieser Dgl.

> Jede Funktion, die man in eine Dgl. einsetzen kann und die diese erfüllt, heißt eine (spezielle) Lösung dieser Dgl.

Sucht man eine Lösung, macht man einen Ansatz.

Beweis, daß ein Ansatz Lösung der Dgl. ist: durch Einsetzen des Ansatzes in die Dgl.

Unser Ziel: Lösung weniger, physikalisch wichtiger Dgln.

4) Beispiel: die Hookesche Federschwingung

(*) $$\boxed{m\ddot{x} + Dx = 0}$$ Bewegungsgleichung (Dgl.)

Ansatz:

(**) $$\boxed{x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t}$$

$\Rightarrow \ddot{x}(t) = \ldots$

Ansatz (**) eingesetzt in Dgl. (*)

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

d.h. falls $\omega = \sqrt{D/m}$,
erfüllt der Ansatz die Dgl. (d.h. es ist Lsg. der Dgl.)
für alle Werte von t,
egal wie c_1, c_2 gewählt werden: allg. Lsg.

↳ Jedes Wertepaar c_1, c_2 liefert eine spezielle Lösung.

Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert c_1, c_2:

$$\left.\begin{array}{l} x(t=0) = \ldots \\ \dot{x}(t=0) = \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = x(t=0) \\ c_2\omega = \dot{x}(t=0) \end{array}$$

5) Gegenüberstellung versch. harmonischer Schwingungen

a) Hookesche Feder:

$$\boxed{m\ddot{x} + Dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}}$$

b) Drehschwingung:

$$\boxed{\Theta\ddot{\varphi} + D_\varphi \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D_\varphi}{\Theta}}}$$

c) mathemat. Pendel (Näherung: kleine Auslenkungen):

$$\boxed{m l \ddot{\varphi} + m g \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

d) physikal. Pendel (Näherung: kleine Auslenkungen):

$$\boxed{\Theta\ddot{\varphi} + m g s \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{m g s}{\Theta}}}$$

s: Abstand SP – Drehpunkt

allg.: Linearbewegung:

Fälle a), c) $$\boxed{m \cdot a + (\text{Betrag der Rückstellkraft}) = 0}$$

Drehbewegung:

Fälle b), d) $$\boxed{\Theta\ddot{\varphi} + (\text{Betrag des rückstellenden Drehmoments}) = 0}$$

14.6. Fortsetzung

1

Abkürzung: $\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$ allg.: ω_0: Kreisfreq. des ungedämpften Oszillators

Gedämpfte Schwingung: $\delta := \frac{\beta}{2m}$

mit (δ) $\Rightarrow$ $$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \qquad (*)$$

Lösung der Dgl. (Ansatz machen, einsetzen, ergibt):

$$\boxed{x(t) = \underbrace{x_0\, e^{-\delta t}}_{\text{exponentiell mit der Zeit abklingende Amplitude}} \cdot \underbrace{\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t + \varphi_0\right)}_{\text{Schwingung mit der Kreisfrequenz } \sqrt{(\omega_0^2-\delta^2)}}}$$

allg. Lösung von (*).

[vgl.: ω_0 beim ungedämpften Oszillator]

x_0 : Amplitude bei $t=0$

φ_0 : Phase bei $t=0$

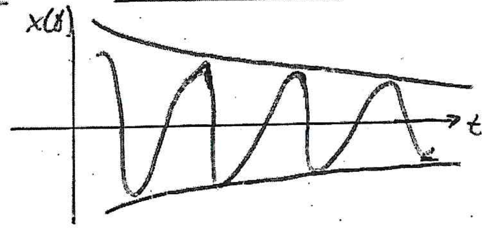
} ergeben sich aus Anfangsbed.

2

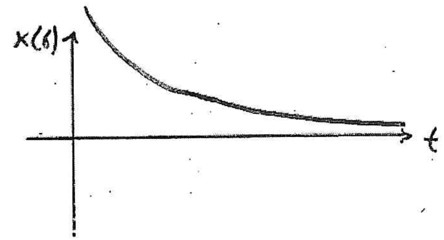
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

3 Fälle:

a) $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$ Schwingfall

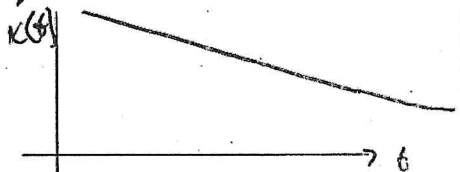


b) $\omega_0^2 - \delta^2 = 0$ aperiodischer Grenzfall



c) $\omega_0^2 - \delta^2 < 0$ Kriechfall

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ imaginär



Gleichgewichtslage wird am schnellsten erreicht im Fall b) (aperiod. Grenzfall) → wichtig für Zeiger von Meßgeräten, Waagen etc.

3

Bewegungsgleichung: erzwungene Schwingung

$$\boxed{m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Dx = D\alpha_0 \sin\omega t}$$

inhomogene Dgl.

(homogen wäre: ... = 0)

Mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$, $\delta = \frac{\beta}{2m}$ folgt:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2(x - \alpha_0 \sin\omega t) = 0} \quad (*)$$

Experiment: Schwingung von m mit der Erregerfrequenz ω, jedoch phasenverschoben ggü. Erreger

Ansatz zur Lösung von (*):

$$\boxed{x = x_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)}$$

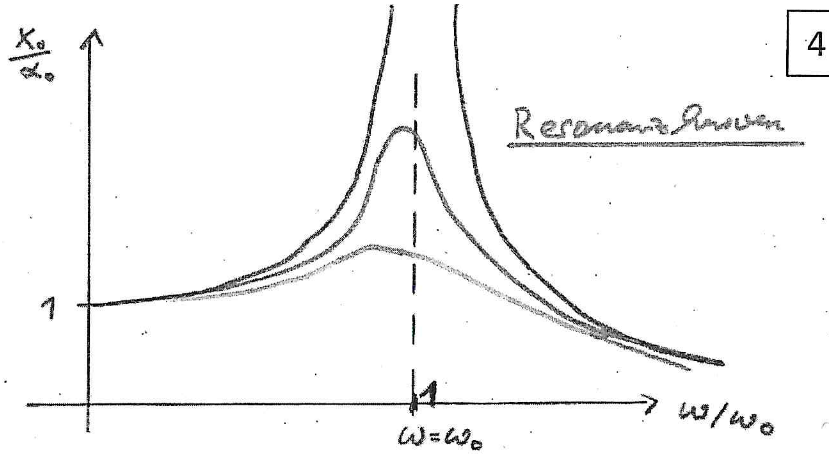
eingesetzt in (*): ist Lösung der Dgl.

längeres Umrechnen liefert:

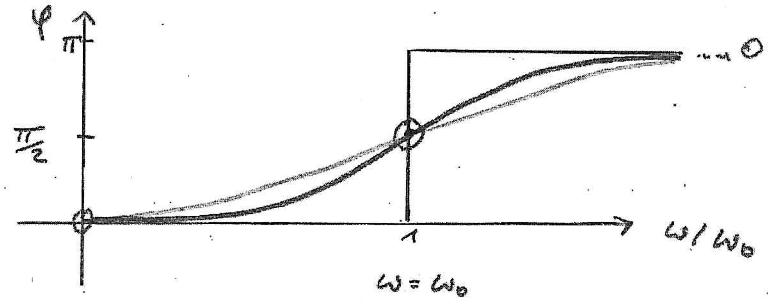
$$\boxed{\frac{x_0}{\alpha_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}}$$

$$\boxed{\tan\varphi = 2\delta\omega/(\omega_0^2-\omega^2)}$$

4



$$0 \simeq \delta_S < \delta_B < \delta_G$$



$\omega \to 0$: $x_0 = \alpha_0$, $\varphi = 0$ } Amplitude und Phase wie Erreger

$\omega = \omega_0$: $x_0 = \alpha_0 \cdot \frac{\omega_0^2}{2\delta\omega}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\omega \to \infty$: $x_0 \to 0$, $\varphi \to \pi$ } gegenphasig zum Erreger, Ampl. $\to 0$