

9/7) Gleichgewicht am starren Körper

Statik: "Was muß ich tun, damit ein Körper im Zustand der Ruhe verbleibt?"

Beispiele: Hochhaus
Brücke
Gartenleiter
Spannsaile

- 1) Vermeidung von Translation des SP
- 2) Vermeidung von Rotation um den SP

$$1) \Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = 0$$

$$2) \Rightarrow \sum_i \vec{M}_i = 0$$

Zur statischen Gleichgewicht ist sowohl die Summe aller an einem Körper anpreisenden Kräfte als auch die Summe der auf ihn wirkenden Drehmomente null.

Arten von Gleichgewicht:

1) stabiles Gleichgewicht:

Exp.: Wenn ein Körper leicht bei kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage selbstständig in diese zurück.

Bsp.:



2) indifferentes Gleichgewicht:

Körper verbleibt bei kleiner ("infinites") Auslenkung am neuen Ort.

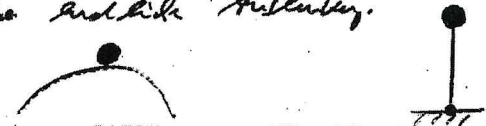
Bsp.: Kugel auf hor. Ebene



3) instabiles Gleichgewicht:

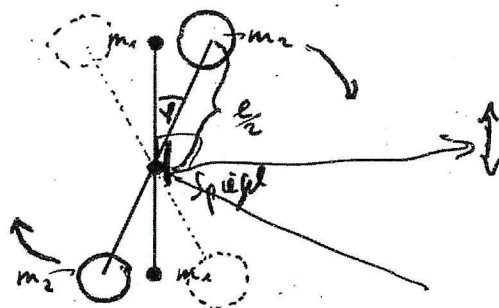
Bei infinitesimaler Auslenkung verläßt der Körper seine Position und entfernt sich um eine endliche Auslenkung.

Bsp.:



10/3) Bestimmung der Gravitationskonstanten γ

Gravitationschwaige nach Cavendish (1798)



- Kleine Kugeln am (nahem) masselosen Stab um Torsionsfaden drehbar
 m_1, m_2 bekannt, Abstand ebenfalls bekannt

Umlagerung des Massen m_2

- $\Rightarrow$ Kraft von m_2 auf m_1 wechselt Vorzeichen $\Rightarrow$ Beschleunigung von m_1
- $\Rightarrow$ Drehmoment auf Torsionsfaden wechselt Vorzeichen

$$D_\varphi \cdot \Delta\alpha = \Delta M = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vorzeichen}}}{2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 2 \text{ Kugelpaare}}}{2} \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\varphi$$

Spiegelablenkung $\nearrow$

10/4) Planetenbahnen und Keplersche Gesetze

Von Johannes Kepler aufgrund empirischer Daten zur Planetenbewegung gefunden:

1. Keplersches Gesetz:

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in denen einen Brennpunkt die Sonne stellt.

2. Keplersches Gesetz (sog. Flächenrate):

Der Radiusvektor Sonne $\rightarrow$ Planet überstreift in gleichen Zeiten gleiche Flächen

$\hookrightarrow$ Drehimpulserhaltung: $m \cdot v \cdot r = \text{const}$

3. Keplersches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.
 $L = \text{mittlere Abstände}$

Γ Erläuterung:

$\hookrightarrow$ 1) 3) Gravitationsgesetz

2) Drehimpulserhaltung:
 $m \cdot v \cdot r = \text{const}$

10. Gravitation und Keplersche Gesetze

1) Das Newtonsche Gravitationsgesetz

Zwischen zwei Massen m_1 und m_2 wirkt eine anziehende Kraft, die in m_1 und m_2 direkt und zum Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional ist.

$$\vec{F}_G = -\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \quad \text{Gravitationskonstante}$$

Richtung von $\vec{F}$: antiparallel zu $\vec{r}$,
d.h. anziehende Kraft.

Kraft auf Probemasse m_p im Einfluss der Masse M (z.B. Erde):

$$\vec{F}_G = \left(-\gamma \frac{M}{r^2} \right) \cdot m_p$$

$$\frac{\vec{F}_G}{m_p} = \vec{g} = -\gamma \frac{M}{r^2} \quad \text{Grav.-Feldstärke}$$

An der Erdoberfläche: $|\vec{g}| = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

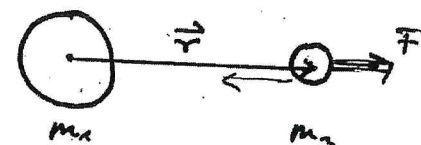
2) ¹Kraft, ²Feldstärke, ³Potential und ⁴pot. Energie im Gravitationsfeld

Gravitationskraft: konservative Kraft
 $\Rightarrow$ invertierte Arbeit bewirkt ΔE_{pot} .

$$\Delta W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = +\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot dr$$

↑
sei $\vec{F} \parallel d\vec{r}$

Bewegung von m_2 im Feld von m_1
 $\parallel$ zu $\vec{r}$.



$$W = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \gamma m_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr$$

$$W = -\gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \stackrel{!}{=} \Delta E_{\text{pot}}$$

Voraussetzungen: $r_2 > r_1$

$$\frac{1}{r_2} < \frac{1}{r_1}$$

$$\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) < 0$$

$$-(\dots) > 0$$

größere Abstand $\hat{=}$ Zunahme an E_{pot}

Kons. Kraft $\Rightarrow \Delta E_{\text{pot}}$ ist unabhängig vom Weg von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$.

7

E_{pot} maximal für $r \rightarrow \infty$

Setze $E_{\text{pot}} = 0$ für $r \rightarrow \infty$ (Bezugspunkt)

Dann ist:

$$E_{\text{pot}} = - \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

"Bindungsenergie" Energie, mit der die Massen m_1 und m_2 aneinander gebunden sind.

Definiere Gravitationspotential φ :

$$\varphi = - \gamma \frac{m_1}{r}$$

Potential im Gravitationsfeld der Masse m_1 .

① Kraft:

$$\vec{F}_G = - \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

② Feldstärke = Kraft / Masse

$$g = - \gamma \frac{m_1}{r^2}$$

③ Potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = - \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$$

④ Potential = pot. Energie / Masse

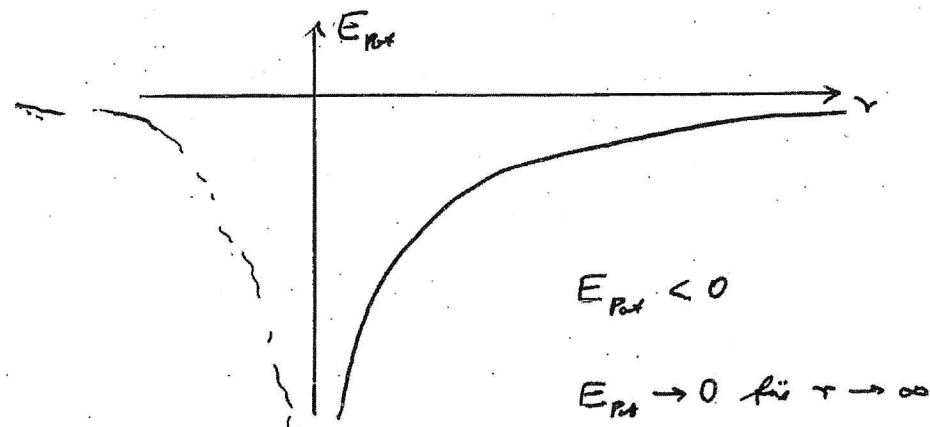
$$\varphi = - \gamma \frac{m_1}{r}$$

3

8

6. Gebundene und ungebundene Zustände

$$E_{\text{pot}} = - \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$



Gesamtenergie E_{ges}

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

$$E_{\text{ges}} = \frac{m_2}{2} v^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

$E_{\text{ges}} > 0$: m_2 kann sich von m_1 beliebig weit entfernen:
ungebundener Zustand

$E_{\text{ges}} < 0$: m_2 kann sich nicht beliebig von m_1 entfernen
→ gebundener Zustand.

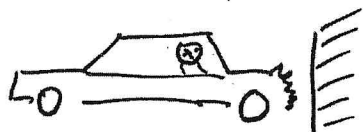
11. Deformation fester Körper

1) Arten der Deformation

a) elastische Deformation: reversibel



b) plastische Deformation: irreversibel



2) Spannung, Dehnung, Hookesches Gesetz

- Dehnung eines Fadens unter dem Einfluss einer Zugkraft
- Δl nur im Bereich der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes:

$\Rightarrow$

$$\Delta l \sim F$$

$$\Delta l = \left(\frac{1}{E} \right) \frac{l}{A} \cdot F \quad (*)$$

l : Fadenlänge

A : Querschnittsfläche

F : Zugkraft

E : Der prop. E-Modul oder Elastizitätsmodul
(hängt vom Material ab)

Definition:

$$\epsilon := \frac{\Delta l}{l}$$

rel. Längenänderung oder Dehnung

$$\sigma := \frac{F}{A}$$

Kraft pro Querschnittsfläche oder Zugspannung
(bzw. bei Druckbelastung: Druckspannung)

Umformung von (*):

$$\underbrace{\frac{\Delta l}{l}}_{\epsilon} = \frac{1}{E} \cdot \underbrace{\frac{F}{A}}_{\sigma} \Rightarrow \epsilon = \frac{1}{E} \sigma$$

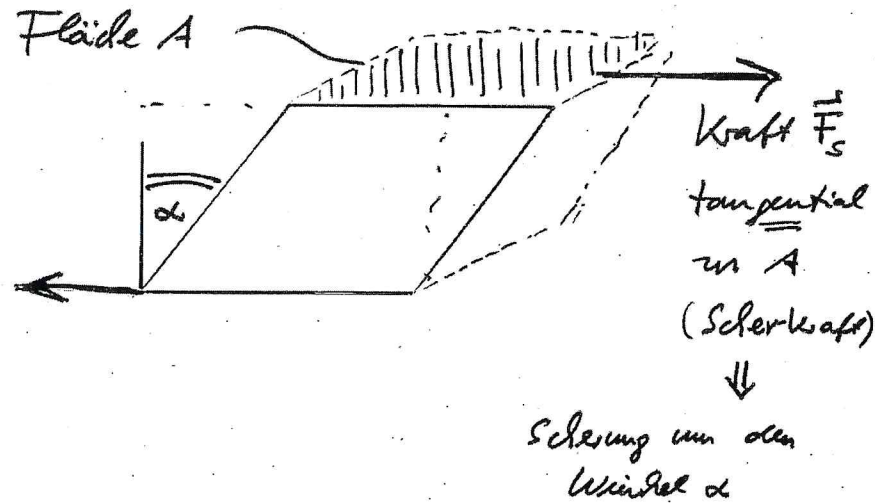
Die Spannung ist proportional zur Dehnung.

$$\Rightarrow \sigma = E \cdot \epsilon$$

Hookesches Gesetz (verallgemeinert)

3) Scherung und Torsion

Scherung



Scherspannung τ :

$$\tau := \frac{F_s}{A}$$

Es gilt:

$$\tau = G \cdot \alpha$$

G : Torsions- oder
Schubmodul.

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

4) Hooke'sches Gesetz der Torsion, Drehbewegung

- Torsion eines Drahtes
oder dünnen Stabes:
- nächststellendes Drehmoment prop.
Verdrehungswinkel φ

$$M = -D_\varphi \cdot \varphi$$

Hooke'sches Gesetz
der Torsion
(im Gültigkeitsbereich)

D_φ : Torsionsfederkonstante
($\approx$ Drehkonstante)

Schwingung eines Torsionsfeders

Hooke'sches Gesetz $\rightarrow$ elast. Moment
 $\rightarrow$ harmon. Schwingung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin \omega t$$

$$\dot{\varphi}(t) = \varphi_0 \omega \cos \omega t$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \varphi_0 \sin \omega t = -\omega^2 \varphi(t)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad M = \Theta \cdot \ddot{\varphi}(t) = -\Theta \omega^2 \varphi(t) \\ (2) \quad M = -D_\varphi \cdot \varphi(t) \end{array} \right\}$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow \Theta \omega^2 = D_\varphi \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D_\varphi}{\Theta}}$$

(vgl.: lin. Feder: $\omega = \sqrt{D/m}$)