

Konstanten und Einheiten

Konstanten

Avogadro-Konstante	N_A	=	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Bohr'scher Radius	a_{Bohr}	=	$5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
Boltzmann-Konstante	k_B	=	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0	=	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$
Elementarladung	e	=	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
Erdbeschleunigung	g_E	=	$9,81 \text{ m/s}^2$
Gravitationskonstante	γ	=	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	=	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$
Plank'sches Wirkungsquantum	h	=	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	=	$1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Ruhemasse des Elektrons	m_e	=	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Ruhemasse des Protons	m_p	=	$1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Ruhemasse des Neutrons	m_n	=	$1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Universelle Gaskonstante	R	=	$8,315 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$
Vakuumlichtgeschwindigkeit	c_0	=	$3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Schallgeschwindigkeit (Luft)	c_S	=	$343,2 \text{ m/s}$
Dichte Wasser	ϱ	=	1000 kg/m^3

Einheiten

SI-Einheiten :

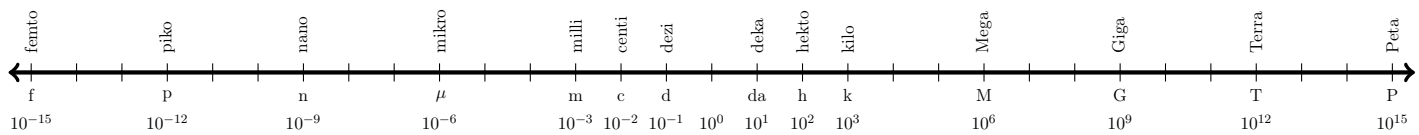
Zeit (t)	$[t]$	=	$1 \cdot \text{s}$	Sekunde
Länge, Strecke (l, s)	$[s]$	=	$1 \cdot \text{m}$	Meter
Masse (m)	$[m]$	=	$1 \cdot \text{kg}$	Kilogramm
Temperatur (T, ϑ)	$[T]$	=	$1 \cdot \text{K}$	Kelvin
Stoffmenge (n)	$[n]$	=	$1 \cdot \text{mol}$	Mol
Stromstärke (I)	$[I]$	=	$1 \cdot \text{A}$	Ampère
Lichtstärke (I_v)	$[I_v]$	=	$1 \cdot \text{cd}$	Candela (lat.: Kerze)

Einige abgeleitete Einheiten:

$$\text{Kraft } (F) \quad [F] = 1 \cdot \text{N} = 1 \cdot \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad \text{Newton}$$

Energie, Arbeit (E)	$[E]$	$= 1 \cdot \text{J}$	$= 1 \cdot \text{N} \cdot \text{m} = 1 \cdot \text{W} \cdot \text{s} = 1 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$	Joule
Leistung (P)	$[P]$	$= 1 \cdot \text{W}$	$= 1 \cdot \text{J}/\text{s} = \text{V} \cdot \text{A} = 1 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$	Watt
Frequenz (ν, f)	$[f]$	$= 1 \cdot \text{Hz}$	$= 1 \cdot 1/\text{s}$	Hertz
Spannung (V)	$[V]$	$= 1 \cdot \text{V}$	$= 1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}/(\text{s}^3 \cdot \text{A})$	Volt
el. Ladung (Q)	$[Q]$	$= 1 \cdot \text{C}$	$= 1 \cdot \text{A} \cdot \text{s}$	Coulomb
el. Widerstand (R)	$[R]$	$= 1 \cdot \Omega$	$= 1 \cdot \text{V}/\text{A} = 1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}/(\text{s}^3 \cdot \text{A}^2)$	Ohm
el. Kapazität (C)	$[C]$	$= 1 \cdot \text{F}$	$= 1 \cdot \text{C}/\text{V} = 1 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2/(\text{m}^2 \cdot \text{kg})$	Farad
mag. Fluss (Φ)	$[\Phi]$	$= 1 \cdot \text{Wb}$	$= 1 \cdot \text{V} \cdot \text{s} = 1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}/(\text{s}^2 \cdot \text{A})$	Weber
mag. Flussdichte (B)	$[B]$	$= 1 \cdot \text{T}$	$= 1 \cdot \text{Wb}/\text{m}^2 = 1 \cdot \text{kg}/(\text{s}^2 \cdot \text{A})$	Tesla

Größenordnungen



Mechanik I

Gegenüberstellung: Translation $\leftrightarrow$ Rotation

Translation		Rotation	
Bewegungsgleichungen (Konstante Beschleunigung):			
Weg	$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2$	$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$	überstrichener Winkel
Geschwindigkeit	$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}(t)}{dt} = \dot{\vec{s}}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$	$\omega(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} = \dot{\alpha}(t) = \omega_0 + \alpha \cdot t$	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{s}}(t)$	$\alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t)$	Winkelbeschleunigung
Sonstiges:			
Kraft	$\vec{F}$	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	Drehmoment
Masse	m	$J, \Theta = \sum m_i \cdot r_i = \int r^2 dm$	Trägheitsmoment
kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \omega^2$	
Leistung	$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}_s \cdot \vec{v}_s$	$P = \frac{dW}{dt} = M \cdot \omega$	
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega} = m (\vec{r} \times \vec{v})$	Drehimpuls
Impulsänderung	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	Drehimpulsänderung
2. Newtonsches Gesetz	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	$\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\alpha}$	2. Newtonsche Gesetz der Drehbewegung

Kräfte

2. Newtonsches Axiom $\rightarrow$ Beschleunigung	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
verallgemeinertes 2. Newtonsches Axiom	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \cdot \vec{a} + \dot{m} \cdot \vec{v}$
Normalkraft an schiefer Ebene	$F_N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$
Haftreibungskraft bei Normalkraft F_N	$F_H = \mu_H \cdot F_N$
Gleitreibungskraft	$F_{Gl} = \mu_{Gl} \cdot F_N$
Hangabtriebskraft an schiefer Ebene	$F_{HA} = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$
Gravitationskraft	$\vec{F}_g = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{e}_r$
Rückstellkraft einer Feder	$\vec{F} = -D \cdot \vec{s}$
Zentripetalkraft (d.h. Richtung Mittelpunkt)	$F_{ZP} = m \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$

Energie

Arbeit (Kraft mal Weg)	$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$
Arbeit bei wegababhängiger Kraft	$W = \int \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$
potentielle Energie (Hubarbeit)	$\Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot h$
Spannenergie (Feder aus Nulllage)	$E_{Sp} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$
kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

gesamte kinetische Energie mit Rotation	$E = E_{\text{kin,Sp}} + E_{\text{rot, Sp}}$
Reibungsarbeit	$W_R = \vec{F}_{\text{Gl}} \cdot \vec{s}$
Energieerhaltungssatz (abgeschlossenes System)	$\sum E = \text{const.}$

Leistung

Leistung ist Arbeit pro Zeit $P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$

Impuls und Stöße

Impuls und Kraftstoß	$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \Delta t$
Impulserhaltungssatz (abgeschlossenes System)	$\sum p = \text{const.}$
Geschwindigkeit nach zentralem unelastischem Stoß	$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$
Geschwindigkeit von m_1 nach zentralem elastischem Stoß	$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}$
Geschwindigkeit von m_2 nach zentralem elastischem Stoß	$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$

Kreisbewegung

Winkel im Bogenmaß, (s Bogenlänge)	$\varphi = \frac{s}{r}$
Radialbeschleunigung, d.h. Richtung Mittelpunkt	$ a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$
Winkel in Abhängigkeit von Zeit	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$
Winkelgeschwindigkeit in 1/s	$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r}$
Winkelgeschwindigkeit, Umlaufzeit (T), Frequenz (f)	$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$
Winkelgeschwindigkeit pro Zeit bei Winkelbeschleunigung	$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$
Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Trägheitsmoment Punktmasse ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	$\Theta = m \cdot r^2$
Trägheitsmoment ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	$\Theta = \int r^2 dm$
Steinerscher Satz	$\Theta = \Theta_S + h^2 \cdot m$
Drehimpuls ($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$)	$L = \Theta \cdot \omega$
Drehimpulserhaltungssatz (abgeschlossenes System)	$\sum L = \text{const.}$
Drehmoment ist Kraft mal Hebelarm senkrecht aufeinander	$M = F \cdot r = \Theta \cdot \dot{\omega} = \dot{L}$
Rotationsenergie	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2 = \frac{L^2}{2\Theta}$
Leistung bei Rotation	$P = \frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = M \cdot \omega$
Zentripetalkraft (d.h. Richtung Mittelpunkt)	$F_{\text{ZP}} = m \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$

einige Trägheitsmomente

Zylindermantel (Symmetrie Achse, Radius r) $\Theta \approx mr^2$

Vollzylinder (Symmetrie Achse, Radius r)	$\Theta = \frac{1}{2}mr^2$
Vollzylinder (zweizählige Symmetrie Achse, Radius r , Länge l)	$\Theta = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$
Hohlzylinder (Symmetrie Achse, Radius r_1, r_2)	$\Theta = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$
Kugel (Radius r)	$\Theta = \frac{2}{5}mr^2$
Stab (zweizählige Symmetrie Achse, Länge l)	$\Theta = \frac{1}{12}ml^2$
Stab (Ende, Länge l)	$\Theta = \frac{1}{3}ml^2$

Kreisel

Nutation	$\vec{L} = \text{const.}, \vec{M} = 0$
Präzession	$\vec{M} \neq 0$

Gravitation

Gravitationsformel	$F_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ mit $\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$
Arbeit im Gravitationsfeld	$dE_{\text{pot}} = F \cdot dr = +\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr$
potentielle Energie im Gravitationsfeld	$E_{\text{pot}} = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \gamma m_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr$
potentielle Energie $r_1 \rightarrow r_2$ im Gravitationsfeld	$E_{\text{pot}} = -\gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$
potentielle Energie für $r_1 \rightarrow \infty$	$E_{\text{pot}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$

Kepler Gesetze

- Planeten bewegen sich auf Ellipsen mit Sonne in einem Brennpunkt.
- Radiusvektor Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie Kuben der großen Bahnachsen:
 $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M_z}$ mit der Masse M_z des Zentralkörpers, d.h. $M_z = m_S$ (Sonnenmasse) bei Planetenbahnen oder $M_z = m_P$ (Planetenmasse) bei den Umlaufbahnen von Monden.

Mechanik II

Zug-, Druckspannungen

Definition rel. Längenänderung	$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$
Zugspannung = Kraft pro Querschnittsfläche	$\sigma = \frac{F}{A}$
Spannung prop. Dehnung $\rightarrow$ Hook, E = Elastizitätsmodul	$\sigma = E \cdot \varepsilon$
Poissonzahl für Querkontraktion, d = Dicke	$\mu = -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\varepsilon} = \frac{E}{2G}$
Relative Volumenänderung	$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon + 2\frac{\Delta d}{d}$
eines quadratischen Stabs bei Zug	$= \varepsilon(1 - 2\mu)$
rel. Volumenänderung Medium unter Druck	$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{K} = -p \cdot \kappa$
K : Kompressionsmodul, κ : Kompressibilität	$K = \frac{1}{\kappa} = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}$

Scherung, Torsion

Scherspannung tangential Fläche A	$\tau = \frac{F_t}{A}$
Torsions-/Schermodul mal Scherwinkel	$= G \cdot \alpha$
Verhältnis G zu E	$G \approx \frac{E}{2 \dots 3}$
Torsionskonstante dünnes Rohr	$D_\varphi = \frac{2\pi r^3 d}{l} G$
Torsionskonstante Stab	$D_\varphi = \frac{\pi r^4}{2l} G$

Elastizitätsmodule für einige Materialien

Material	Elastizitätsmodul E (Pa)	Schubmodul G (Pa)	Kompressionsmodul K (Pa)
Aluminium	$70 \cdot 10^9$	$25 \cdot 10^9$	$70 \cdot 10^9$
Beton	$20 \cdot 10^9$		
Gusseisen	$200 \cdot 10^9$	$40 \cdot 10^9$	$90 \cdot 10^9$
Knochen	$15 \cdot 10^9$	$80 \cdot 10^9$	
Messing	$100 \cdot 10^9$	$35 \cdot 10^9$	$80 \cdot 10^9$
Stahl	$200 \cdot 10^9$	$80 \cdot 10^9$	$140 \cdot 10^9$
Quecksilber			$2,5 \cdot 10^9$
Wasser			$2,0 \cdot 10^9$
Luft, H ₂ , He, CO ₂			$1,0 \cdot 10^5$ (isotherm)

Hydro-/Aerostatik

Auftriebskraft Körper in Flüssigkeit	$F_A = (\varrho_{\text{Fl}} - \varrho_{\text{K}}) \cdot V \cdot g$
Gasdichte prop. Druck	$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p}{p_0}$
Kräfte auf Gasvolumen der Höhe dh	$0 = -(p + dp) A + p A - g \varrho A dh$
Differentialgl. f Druck	$dp = -g \varrho dh = -g p \frac{\varrho_0}{p_0} dh$
Barometrische Höhenformel	$p(h) = p_0 \cdot \exp \left[-\frac{g \varrho_0}{p_0} h \right]$
Energ. z. Vergrößerung um Oberfläche dA	$dE = \sigma dA$
Energ. Flüssigk.-Lamelle, 2 Oberfl.	$dE = 2\sigma l dx$
Oberflächenenergie Flüssigkeitskugel	$W = A \cdot \sigma = 4\pi r^2 \sigma$
Zunahme Oberflächenen. Kugel	$dW_{\text{Oberfl}} = \sigma \cdot dA = \sigma(4\pi(r + dr)^2 - 4\pi r^2)$ $\approx 8\pi \sigma r dr$
Zunahme Energ. Flüssigkeitskugel dr	$dW_{\text{Auf}} = F dr = p \cdot A \cdot dr = 4\pi r^2 \cdot p \cdot dr$
Druck in Flüssigkeitskugel	$p_{\text{Fl}} = \frac{2\sigma}{r}$
Druck in Seifenblase, 2 Oberfl.	$p_{\text{SB}} = \frac{4\sigma}{r}$

Strömungen

Kontinuitätsgleichung an Verengungen	$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$
Bernoulli-Gl.: Druck etc. in bew. Strömung	$p + \varrho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \varrho \cdot v^2 = p_0 = \text{const.}$
Newton-Reibungsgesetz: bewegte Platten, η = Viskosität Flüssigkeit zw Platten	$F = \eta \cdot A \frac{dv}{dx}$
Strömungsgschw. in Rohr $D=2R$, abh. von r	$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$
Massenstrom durch Rohr $D=R$ abh von Δp	$\dot{M} = \frac{\varrho \pi}{8\eta l} R^4$
Druckabfall in Rohr, Hagen-Poiseuille	$\Delta p = \frac{8\eta l}{\pi R^4} A \cdot v$
Stokesches Gesetz für Reibung v. Kugel	$F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$
konst. Geschw. v Kugel in Flüssigkeit → Viskosität η bestimmen	$m \cdot g - F_A = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$
Reynoldszahl, Umschlag ab v in turbulente Strömung, L =charakt. Länge des Systems	$Re = \frac{\varrho \cdot L \cdot v}{\eta}$
Luftwiderstand geht mit v hoch 2	$F = c_w \frac{\varrho}{2} v^2 \cdot A$
Leistung geht mit v hoch 3	$P = F \cdot v = c_w \frac{\varrho}{2} v^3 \cdot A$

Schwingungen und Wellen

Harmonische Schwingungen

Federkraft auf Masse	$F_F = -D \cdot x$
Trägheitskraft	$F_T = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$
Gleichsetzen der Kräfte	$m\ddot{x} = -Dx$
Bewegungsgleichung $\rightarrow$ DGL 2.O.	$m\ddot{x} + Dx = 0$
Ansatz zur Lösung der DGL	$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$
mit Kreisfrequenz der Schwingung	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$
Lösung $\rightarrow$ harm. Oszillator ohne Fg	$x(t) = x(0) \cos \omega_0 t + \frac{v(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t$
harm. Oszillator mit Fg	$y(t) = y_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{mg}{D}$

Drehschwingungen

Hooksches G. der Torsion	$M_R = -D_\Phi \cdot \Phi$
Trägheitsmoment $\rightarrow$ Beschl.	$M_T = \Theta \cdot \ddot{\Phi}(t)$
Gleichsetzen der Momente	$-D_\Phi \cdot \Phi(t) = \Theta \cdot \ddot{\Phi}(t)$
DGL	$\Theta \cdot \ddot{\Phi} + D_\Phi \cdot \Phi = 0$
Lösung der DGL	$\Phi(t) = \Phi(0) \cos \omega_0 t + \frac{\omega(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t$
mit Kreisfrequenz der Schwingung	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D_\Phi}{\Theta}}$
math. Pendel	$ml\ddot{\varphi} + mg\varphi = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
phys. Pendel,	$\Theta\ddot{\varphi} + mgS\varphi = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgS}{\Theta}}$
S = Abstand Schwer- Drehp.	

Gedämpfte Schwingungen

DGL gedämpfte Schwingung	$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + Dy = 0$
Eigenfreq. und Dämpfung	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}; \delta = \frac{\beta}{2m}$
DGL ged. Schwingung	$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$
Lösung ged. DGL	$y(t) = y_0 \exp[-\delta t] \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t + \varphi_0\right)$
$\Rightarrow$ period./aperiod./Kriechfall	
Q-(Güte)faktor	$Q = \frac{2\pi \cdot E_{\text{ges}}}{\Delta E_{\text{pro Periode}}} = \frac{\omega}{2\delta}$

Erzwungene Schwingungen

Anregung L_0 m. ω	$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Dx = D \cdot L_0 \sin(\omega t)$
Eigenfreq. und Dämpfung	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}; \delta = \frac{\beta}{2m}$
DGL	$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2(x - L_0 \sin(\omega t)) = 0$
Erzw. Schwingung mit x_0	$\frac{x_0}{L_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$
Phase erzw. Schwingung	$\tan(\varphi) = 2\delta \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Überlagerung von Schwingungen

Überlagerung zweier Schwingungen	$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi)$
wenn: $\omega_1 = \omega_2$	$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi_{\text{ges}})$
Amplitude	$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi}$
Phase	$\varphi_{\text{ges}} = \arctan\left(\frac{A_2 \sin \varphi}{A_1 + A_2 \cos \varphi}\right)$
$A_1 = A_2; \omega_1 \approx \omega_2$	$A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos(\omega t)$

Wellen

Wellengleichung in x -Richtung	$y(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx)$
partielle DGL f. Welle	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$
Wellengleichung allgemein, k in Ausbreitung	$u(\vec{r}, t) = u_0 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})$

- Longitudinal Wellen (Schall)
- Transversale Wellen (Licht, Funk)
- Ebene Wellen, Kugelwellen (Hertzscher Dipol)
- Stehende Wellen (Schw.knoten oder Schw.bauch)
- Kohärenz: feste Phasenbeziehung zw. Wellen $\rightarrow$
- Interferenz: überlagerung additiv oder destruktiv.

Schallwelle in Stab	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$
Schallgeschwindigkeit im Stab	$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
Lösung Wellengl. Stab	$u(x, t) = u_0 \sin(\omega t - kx)$
Geschw. Teilchen im Stab	$\dot{u}(x, t) = v = \omega u_0 \cos(\omega t - kx)$
kin. Energie Vol-element	$dE_{\text{kin}} = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \frac{1}{2} dm \cdot \omega^2 u_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$
mittl.kin. Energie Vol-element	$\overline{dE_{\text{kin}}} = \frac{1}{4} dm \omega^2 u_0^2 = \frac{1}{4} \rho dV \omega^2 u_0^2$
Dopplereff. v_Q : Quelle; v_E : Empfänger	$f_E = \frac{c \pm v_E}{c \pm v_Q} \cdot f_Q$

Thermodynamik

Thermodynamik

- 0. Hauptsatz: Körper im thermische Gleichgewicht haben dieselbe Temperatur.
- absoluter Nullpunkt der Temperatur: $-273,15^\circ\text{C}$

Längenausdehnung mit Temp.	$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \Delta T$
Volumenausdehnung Festkörper	$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \cdot \Delta T = 3\alpha \cdot \Delta T$
Wärmemenge für Temp.erhöhung	$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$
molare Wärmekapazität von Feststoffen	$C_n = 3 R \approx 24,9 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
Gesetz von Dulong-Petit	
Avogadrokonst.	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ Teilchen/mol}$
Mol-Volumen ideale Gase bei 1 atm, 0°C	$V_{\text{mol}} = 22,414 \text{ l}$
N = Teilchenzahl f. n mol	$N = n \cdot N_A$
univ. Gaskonstante f. ideale Gase	$R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
Boltzmannkonst.	$k = \frac{R}{N_A} = 1,3807 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$
ideale Gasgleichung f. n mol	$p \cdot V = n \cdot R \cdot T = N \cdot k \cdot T$

Kinetische Gastheorie

Impuls eines Gasteilchens in x, d.h. auf eine Wand	$p_x = m \cdot v_x$
Impulsänderung bei Stoß mit Wand	$\Delta p_x = 2m \cdot v_x$
Zeit zwischen zwei Stößen	$\Delta t = \frac{2 \cdot l}{v_x}$
Kraftstoß bei 1 Molekül	$F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2l/v_x} = \frac{m \cdot v_x^2}{l}$
Kraft bei N Molekülen	$F_{\text{ges,x}} = \frac{m}{l} \cdot (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x1}^2 + \dots + v_{xN}^2)$
quadratisch gemittelte Geschw.	$\overline{v_x^2} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x1}^2 + \dots + v_{xN}^2}{N}$
ergo Kraft bei N Molekülen	$F_{\text{ges,x}} = \frac{m}{l} \cdot N \cdot \overline{v_x^2}$
mittlere Geschw. in 3D	$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$
mittlere Geschw. in 3D	$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$
Mittelw. in allen Richtungen gleich	$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$
Kraft auf Gefäßwand	$F_{\text{ges,x}} = \frac{m}{l} \cdot N \cdot \frac{\overline{v^2}}{3}$
Druck auf Gefäßwand	$p = \frac{F_{\text{ges,x}}}{A} = \frac{1}{3} \frac{N \cdot m \cdot \overline{v^2}}{A \cdot l} = \frac{1}{3} \frac{N \cdot m \cdot \overline{v^2}}{V}$
vergl. Gasgesetz	$p \cdot V = \frac{1}{3} \cdot N \cdot m \cdot \overline{v^2} = \frac{2}{3} N \left(\frac{1}{2} m \cdot \overline{v^2} \right) = N \cdot k \cdot T$
kin. Energie eines Gasmoleküls	$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{3}{2} k \cdot T = \frac{1}{2} m_M \cdot \overline{v^2}$
m. 3 Freiheitsgr.	
mittl. Geschwindigkeit	$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_M}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

v_m oder v_{rms} quadratisch gemittelte

Geschwindigkeit eines Gasmoleküls

kin. Energie eines Gasmoleküls m. f Freiheitsgr. $\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{f}{2} k \cdot T$

z.B. für O_2 $f = 5$

Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten $f(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m_M}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \exp\left[-\frac{m_M v^2}{2kT}\right] dv$

wahrscheinlichste Geschw.

$$v_w = \sqrt{2/3} \cdot v_m$$

durchschn. Geschw., arithm. Mittel

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \cdot v_m$$

Partial-, Dampfdruck

Molekülaustausch über Flüssigkeit im Gleichgewicht $n_{\text{Molek.}} \sim \sqrt{v^2} \sim T$

rel. Luftfeuchtigkeit $F_{\text{rel}} = \frac{\text{Partialdruck } H_2O}{\text{Dampfdruck } H_2O} \cdot 100\%$

Reale Gase, van der Waalsche Zustandsgl.

ideales Gas

$$p \cdot V = nRT$$

reales Gas: Waalsche Zustandsgl.

$$\left(p + \frac{a \cdot n^2}{V^2}\right) \cdot (V - b \cdot n) = nRT$$

Binnendruck (a=gasspez. Materialkonst.) $\frac{a \cdot n^2}{V^2}$

Kovolumen (b=gasspez. Materialkonst.) $b \cdot n$

Der Binnendruck resultiert aus den Anziehungskräften zwischen den Molekülen (van der Waalskräfte) und erhöht den Druck.

Das Kovolumen berücksichtigt das Wechselwirkungsvolumen der Molekülkräfte und ist 4x das Eigenvolumen des Moleküls, es reduziert das verfügbare Gesamtvolumen.

Oberhalb der kritischen Temperatur T_k kann ein Gas durch Druckerhöhung und/oder Volumenverkleinerung nicht mehr verflüssigt werden.

Kritischer Punkt im p-V-Diagramm mit p_k und V_k :

Bestimmung gasspez. Konstante b $b = \frac{R \cdot T_k}{8 \cdot p_k}$

Bestimmung gasspez. Konstante a $a = 27 \cdot b^2 \cdot p_k$

Inversionstemperatur f. Joule-Thomson-Effekt $T_i \approx 6,75 T_k$

Ein ideales Gas ändert bei adiabatischer Druck-/Volumenänderung nicht seine Temperatur ($p \cdot V = \text{const.}$). Ein reales Gas kühlt sich unterhalb seiner Inversionstemperatur ab (Arbeit gegen zwischenmolekulare Anziehung), darüber erwärmt es sich.

Daher kann man unterhalb der Inversionstemp. durch Druckerniedrigung (Entspannung) ein reales Gas abkühlen bis zur Verflüssigung → Joule-Thomson-Effekt.

Hauptsätze

Innere Energie: die in einem System gespeicherte Energie (v.a. thermische Energie)

Die Summe der einem System von außen zugeführten Wärmeenergie ΔQ und der zugeführten (z.B. mechanischen Arbeit ΔW ist gleich der Zunahme $\Delta U = n \cdot f/2 \cdot R \cdot \Delta T$ seiner inneren Energie :

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \quad (\text{innere Energie dU})$$

Erster Hauptsatz der Thermodynamik (entsprechend dem Energieerhaltungssatz):

„Es ist unmöglich, Energie aus dem nichts zu gewinnen!“

andere Formulierung:

„Ein perpetuum mobile erster Art ist unmöglich!“

Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik:

„Wärme fließt immer nur vom wärmeren zum kälteren Körper!“

andere Formulierung:

„Ein perpetuum mobile zweiter Art ist unmöglich!“

Dritter Hauptsatz der Thermodynamik:

„Am absoluten Nullpunkt ist die Entropie = 0!“

$$T = 0 \Leftrightarrow S = 0$$
$$S(t) = \int_0^T \frac{dQ_{\max}}{T} = \int_0^T \frac{C_V}{T} dT$$
$$C_V \rightarrow 0 \text{ für } T \rightarrow 0 \quad (\text{Forderung unmöglich})$$

„Es ist prinzipiell unmöglich, den absoluten Nullpunkt zu erreichen!“

Entropie:

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (\text{Entropieänderung aus Wärmeänderung})$$

Keine Entropieänderung bei adiabatische Prozessen, Adiabaten sind Linien konstanter Entropie, „Isentropen“. Entropie ist eine Zustandsgröße, $\Delta S = 0$ für reversible Prozesse, sonst >0 .

Enthalpie	$H = U + p \cdot V$
Enthalpiezunahme	$dH = dU + p dV + V dp$
Kompression $\rightarrow$ Energiezufuhr	$dW = F dx = p \cdot A \cdot dx = -p \cdot dV$
Zufuhr $dQ > 0$ v. Wärmeenergie	$dU = dQ + dW = dQ - p \cdot dV$
1. Hauptsatz f. ideales Gas	
C_v ist spezifische Molwärme	$\Delta U = n \cdot C_v \cdot \Delta T$
innere Energie von n Mol Teilchen	$\Delta U = n \cdot \frac{f}{2} R \cdot \Delta T$
mit f Freiheitsgraden	z.B.: 1-atomig: $f = 3$; 2-atomig: $f = 5$
Molwärme f. konst. Volumen	$C_V = \frac{f}{2} R$
Molwärme f. konst. Druck	$C_p = C_V + R$
innere Energie von N einatomigen Teilchen	$U = N \cdot \overline{E_{\text{kin}}} = N \cdot \frac{3}{2} kT$
Adiabatenkoeff.	$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f}$
isochor: $V = \text{const.}$	$\Delta Q = \Delta U = C_V \cdot \Delta T = \frac{f}{2} R \Delta T$
isobar: $p = \text{const.}$	$\Delta Q = \Delta U + p \Delta V = \frac{f}{2} R \cdot \Delta T + R \Delta T$
isotherm: $T = \text{const.}$	$\Delta Q = -\Delta W = -RT \cdot \ln \frac{V_1}{V_2}; \Delta U = 0$
adiabatisch: $Q = \text{const.}$	$\Delta Q = 0; \Delta W = \Delta U; T^{C_V} \cdot V^R = \text{const.}$

Kreisprozesse

Carnot'scher Kreisprozess

- a) isotherme Kompression bei T_1

$$\Delta U = 0, \quad T = \text{const.} = T_1, \quad V_1 \rightarrow V_2$$

- b) adiabatische Kompression $T_1 \rightarrow T_2$

$$\begin{aligned} \Delta Q = 0, \quad n \cdot C_v dT &= -PdV = -nRT \frac{dV}{V} \rightarrow \frac{dT}{T} + \frac{R}{C_v} \frac{dV}{V} = 0 \\ \rightarrow \frac{C_p}{C_v} \ln \frac{V_2}{V_1} &= \ln \frac{p_1}{p_2} \rightarrow p \cdot V^\kappa = \text{const.}, \quad V_2 \rightarrow V_3 \end{aligned}$$

- c) isotherme Expansion bei T_2

$$\Delta U = 0, \quad T = \text{const.} = T_2, \quad V_3 \rightarrow V_4$$

- d) adiabatische Expansion $T_2 \rightarrow T_1$

$$\Delta Q = 0, \quad \frac{C_p}{C_v} \ln \frac{V_1}{V_4} = \ln \frac{p_4}{p_1} \rightarrow p \cdot V^\kappa = \text{const.}, \quad V_4 \rightarrow V_1$$

$$\text{Mechanische Arbeit} \quad W = -nR \left(T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} - T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} \right) = -nR \ln \frac{V_4}{V_3} (T_2 - T_1)$$

Die abgegebene Nutzarbeit W pro Umlauf entspricht der Fläche im p-V-Diagramm.

$$\text{Wirkungsgrad} \quad \eta_{\text{Carnot}} = \frac{|W|}{Q_{\text{zu}}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

Sterling-Kreisprozess

- a) isotherme Expansion
- b) isochore Abkühlung
- c) isotherme Kompression
- d) isochore Erwärmung

Elektrostatik

elektrostatische Kraft und Energie

Strom ist fließende Ladung

$$I = \frac{Q}{t}$$

Coulomb'sches Gesetz

$$\vec{F}_C = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}$$

vergl. Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

el. Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_C}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \hat{r}$$

Kraft im E-Feld

$$\vec{F}_C = q \cdot \vec{E}$$

Arbeit im E-Feld (gegen F_C)

$$W = \int \vec{F} d\vec{s} = -q \int \vec{E} d\vec{s}$$

pot Energie f. Punktladung

$$E_{\text{pot}}(r) = -\frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr$$

elektrisches Potential

$$= \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (\text{da } E \parallel s, \text{ geht mit } 1/r)$$

$$\phi(r) = \frac{E_{\text{pot}}(r)}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Arbeit im el. Potential

$$\Delta W = q \cdot \Delta \phi$$

Äquipotentialflächen

$$\Delta \phi = \int \vec{E} d\vec{s} = 0$$

Überlagerungssatz

$$\vec{E}_{\text{ges}} = \sum \vec{E}_i, \text{ da } \vec{F}_{\text{ges}} = \sum \vec{F}_i$$

Potentielle Gesamtenergie von n Ladungen

erste Ladung aus unendlichen geholt

$$Q_1 : W_1 = 0$$

zweite Ladung aus unend.

$$Q_2 : W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{21}}$$

dritte Ladung aus unend.

$$Q_3 : W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_3}{r_{31}} + \frac{Q_2 Q_3}{r_{32}} \right)$$

...

...

gesamte pot Energie f. n Ladungen

$$E_{\text{pot,ges}} = \sum_1^n W_i$$

Bewegung im E-Feld

Beschleunigung im E-Feld

$$m \cdot \vec{a} = q \cdot \vec{E}$$

Arbeit im E-Feld

$$W = \int \vec{F} d\vec{s} = -q \int \vec{E} d\vec{s} = q \cdot \Delta \phi = q \cdot U$$

pot. Energie prop. U

$$\text{mit } E_{\text{pot}} = -q \cdot U$$

Energieerhaltung

$$\Delta E_{\text{kin}} = -\Delta E_{\text{pot}}$$

für $v_0 = 0, v \ll c$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = |q \cdot U|$$

Ladungsverteilungen, Satz von Gauß

Ladungsdichte

$$\varrho(r) = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

Feldstärke am Ort e. Punktl.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq_i}{(\vec{r} - \vec{r}_i)^2} \cdot \hat{r}_i$$

mit $\rho = dq/dV$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho(\vec{r})}{(\vec{r} - \vec{r}_i)^2} \cdot \hat{r}_i dV$$

Fluß durch geschlossene Fläche A

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A}$$

Satz von Gauß	$\oint \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \, d\vec{A} = \int \varrho(r) \, dV = Q$
Satz von Gauß in differentieller Form	$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho$
Feldstärke von homogen geladener Fläche mit Flächenladungsdichte $\varrho = Q/A = \text{const.}$	
Feldstärke senkrecht auf Fläche	$E_{\perp} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$
Feldstärke von homogen geladenem Draht mit Linienladungsdichte $\lambda = Q/l = \text{const.}$	
Feldstärke senkrecht zu Draht	$E_{\perp} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$

Leiter im elektrischen Feld

- Inneres ist feldfrei
- $E_{\perp}$ an der Oberfläche $\rightarrow$ Oberfl. ist Potentialfläche
- Ladungen nur an der Oberfl. so, dass inneres feldfrei bleibt (Influenz)

	$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot A}{\varepsilon_0} = E_{\perp} \cdot A$
Flächenladungsdichte an Leiteroberfl.	$\sigma = \varepsilon_0 \cdot E_{\perp}$
elektr. Flußdichte	$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot E$

Kondensatoren

Plattenkondensator

Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d}$$

Feldstärke

$$E = \frac{U}{d}$$

Kugelkondensator

eingeschl. Ladung

$$Q = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot E(r) \cdot A(r), \text{ mit } A(r) = 4\pi r^2$$

Feldstärke

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)$$

Kapazität Kugelkondensator

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{r_a r_i}{r_a - r_i}$$

Zylinderkondensator

Satz v. Gauß f. Zylinderfläche

$$E \cdot A = E(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{l} \frac{1}{r}$$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E(r) dr = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{l} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

Kapazität Zyl.kondensator

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot l}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

Serien- und Parallelschaltung von Kondensatoren

Parallelschaltung

$$C_p = \sum_i C_i$$

Serienschaltung

$$\frac{1}{C_s} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Energie, Energiedichte, Kraft auf Kondensatorplatte

gespeicherte el. Energie im Kond.

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

Energie im Volumen V bei Plattenk.

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{d} (E \cdot d)^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} A \cdot d \cdot E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot E^2 \cdot V$$

Energiedichte allgemein

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

Kraft auf eine Kondensatorplatte

$$F = \frac{1}{2} E \cdot q$$

Polarisation im Dielektrikum

Verschiebungspolarisation, erst d. äußeres Feld polarisiert (z.B. Kunststoff)

Orientierungspolarisation bei Dipolen (z.B. Wasser)

Verschiebungsdichte

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

elektrische Polarisation (Dipolmoment pro Volumen)

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E}$$

χ = Suszeptibilität

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E}$$

$$= \varepsilon_0 (1 + \chi) \cdot \vec{E}$$

mit $\varepsilon_r = \chi + 1$

$$= \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \vec{E}$$

Stationäre Ströme

geflossene Ladung

$$dQ = I \cdot dt$$

Knotenregel: 1. Kirchhofsches G.

$$\sum_k I_k = 0$$

Maschenregel: 2. Kirchhofsches G.

$$\sum_k U_k = 0$$

Ohmsches Gesetz

$$U = R \cdot I$$

Leistung bei Gleichstrom

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

Widerstände

Leitwert in Siemens

$$G = \frac{1}{R}$$

Widerstand Draht mit ρ , A , l

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

spezifischer Widerstand von Kupfer

$$\rho_{\text{Kupfer}} = 0,0175 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$$

Widerstandsänderung mit Temperatur

$$R_{\vartheta} = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (\vartheta - \vartheta_0))$$

Serienschaltung von Widerständen

$$R_{\text{Gesamt}} = R_1 + R_2 + \dots = \sum_i R_i$$

Parallelschaltung

$$G_{\parallel} = \frac{1}{R_{\parallel}} = G_1 + G_2 + \dots = \sum_i G_i$$

Parallelschaltung von 2 Widerständen

$$R_{\parallel} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Spannungsteilung an R_2

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Stromteilung eines Stroms in $R_1 \parallel R_2$ durch R_2

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Magnetostatik & Dynamik

Stationäre Magnetfelder

Ampèresches Durchflutungsgesetz

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = I = \int j \, d\vec{A}$$

magn. Feldstärke Draht

$$H = \frac{I}{2\pi \cdot r}$$

magn. Feldstärke Zylinderspule N Wdg/Länge l

$$H = I \cdot \frac{N}{l}$$

Gesetz von Biot-Savart, ϕ =Winkel Tangente zu Pkt

$$dH = \frac{I}{4\pi r^2} \sin \phi \cdot ds$$

H im Mittelpunkt eines Kreisstroms I , z.B Elektron umkreist Atomkern

$$H = \frac{I}{2r}$$

Kräfte auf bewegte Ladungen

magn. Flußdichte

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Lorentzkraft auf bewegte Ladung

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

wenn $v \parallel B$

$$F_L = 0$$

Zentralkraft, wenn v senkr auf B

$$m \frac{v^2}{r} = q \cdot v_{\perp} \cdot B$$

Radius Kreisbahn

$$r = \frac{mv}{qB}$$

v zerlegen, wenn schräg zu B

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} = v \cdot \cos \phi + v \cdot \sin \phi$$

Kraft auf stromdurchflossenen Leiter

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

Zwei parallele, stromdurchflossene Leiter im Abstand d $\vec{B}$ ist senkrecht auf $\vec{l}$ (Leiter 2)

Feld von Leiter 1 an Stelle Leiter 2

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d}$$

Kraft auf Leiter 2

$$F_2 = I_2 \cdot l \cdot B_1 = \mu_0 \cdot \frac{I_1 I_2 l}{2\pi d}$$

Materie und Magnetfeld

magn. Suszeptibilität

$$\kappa$$

Magnetisches Dipolmoment pro Volumen

$$\vec{M} = \kappa \cdot \vec{H}$$

rel. Permeabilität

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Diamagnetische Stoffe (Cu, Au, Pb)

$$\kappa < 0, \mu_r < 1$$

Paramagnetische Stoffe (Al, Ca, Mg, Pt, W)

$$\kappa > 0 (\approx 10^{-2}), \mu_r > 1$$

Ferromagnetische Stoffe (Fe, Ni, Co, Gd)

$$\kappa \gg 0 (\approx 10^4), \mu_r \gg 1$$

Induktion und Maxwell-Gleichungen

Elektromagnetische Induktion

Lenzsche Regel

Induzierte Spannung so gerichtet, dass
ein induzierter Strom der Ursache entgegenwirkt.

magnetischer Fluss

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Induzierte Spannung im M-Feld

$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Spule mit N Windungen

$$U_{\text{ind}} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

Erzeugte Ind.-Spannung

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Drei Möglichkeiten, Spannung zu induzieren

Änderung von B

$$U_{\text{ind}} = -N \cdot \vec{A} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Änderung von A

$$U_{\text{ind}} = -N \cdot \vec{B} \frac{d\vec{A}}{dt} = -N B \cos \varphi \frac{dA}{dt}$$

Änderung von φ

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(N \cdot A \cdot \cos(\omega t)) = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \sin(\omega t)$$

Selbstinduktion und Induktivität

Induktivität

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}$$

Induktivität lange Spule

$$L = \mu_0 \mu_r A \frac{N^2}{l}$$

Energie im Magnetfeld

$$\text{Energie in Induktivität } L \quad W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

Energie pro Volumen

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \frac{1}{V} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2 = \frac{1}{2} H \cdot B$$

Transformator

Spannungsübersetzungsverhältnis, N_i Windungszahlen $\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$

Stromübersetzungsverhältnis = 1/Spg-ÜV $\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1}$

Maxwell-Gleichungen

Integral Form

$$\text{Durchflutungsgesetz (Ampere-Maxwell)} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \mu_r \left(I + \frac{d}{dt} \int \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{A} \right)$$

Induktionsgesetz

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Elektrischer Fluss $\rightarrow$ Gaußscher Satz

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Quellenfreiheit Magnetfeld

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Differentielle Form

$$\text{Durchflutungsgesetz (Ampere-Maxwell)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \mu_r \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Induktionsgesetz	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Elektrischer Fluss $\rightarrow$ Gaußscher Satz	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$
Quellenfreiheit Magnetfeld	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Materialgleichungen	
elektrische Durchflutung	$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$
magnetische Induktion	$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

Elektromagnetische Wellen

Wellengleichung, durch Maxwellgleichungen erfüllt	$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$
Wellengleichung für E -Feld	$\frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial t^2}$
Wellengleichung für B -Feld	$\frac{\partial^2 \vec{B}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(x,t)}{\partial t^2}$
Ausbreitungsgeschwindigkeit in Materie	$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}$
Ausbreitungsgeschwindigkeit in Vakuum	$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2,997 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Brechungsindex eines Mediums	$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$
Energiedichte im E-Feld	$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$
Energiedichte im B-Feld	$w_{\text{mag}} = w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$
Gesamtenergiedichte	$w = w_{\text{el}} + w_{\text{mag}} = \varepsilon_0 E^2$ $= \varepsilon_0 c E \cdot B = \frac{E \cdot B}{\mu_0 c}$
momentane Intensität	$I_m = \frac{E \cdot B}{\mu_0} = w \cdot c$
Poynting-Vektor f. Energieausbreitung	$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}$
mittlere Intensität, E_0 , B_0 =Amplituden	$I = \frac{E_0 \cdot B_0}{2\mu_0}$

Wechselströme

Effektivspannung	$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) dt} = \sqrt{u^2(t)}$
U_{eff} für $u(t) = U_{\text{max}} \sin(\omega t)$	$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$
Aufladen eines Kondensators	$u(t) = U_0 \cdot (1 - \exp[-\frac{t}{RC}])$
Entladen eines Kondensators	$u(t) = U_0 \cdot \exp[-\frac{t}{RC}]$
Einschalten Induktivität	$i(t) = \frac{U_0}{R} \cdot (1 - \exp[-\frac{R}{L}t])$
komplexer Widerstand Induktivität	$\underline{Z}_L = i\omega L$
komplexer Widerstand Kondensator	$\underline{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$

Optik

Geometrische Optik

Gegenstandsweite	g
Bildweite	b
Gegenstandshöhe	G
Bildhöhe	B
Einfalls- = Ausfallswinkel b. Reflektion	$\alpha_1 = \alpha_2$
Brechungsindex	$n = \sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}$
Brechungsgesetz, auch Snellius'sches Brechungsgesetz	$n_1 \cdot \sin \vartheta_1 = n_2 \cdot \sin \vartheta_2$
Ablenkungswinkel Prisma b. Prismenwinkel (γ)	$\delta = (n - 1) \cdot \gamma$
Grenzwinkel Totalreflektion	$\sin \vartheta_{1,\text{Grenz}} = \frac{n_2}{n_1}$
Brennweite Linse $r_1 + r_2$	$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$
Brechkraft Linse	$D = \frac{1}{f}$
Brechkr. 2 Linsen i. Abstand d	$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$
Abbildungsgesetz	$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$
konkaver Spiegel	$f > 0$
konvexer Spiegel	$f < 0$
reelles Bild	$b > 0$
virtuelles Bild	$b < 0$
Vergrößerung V , $V < 0$ für kopfstehend	$V = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g}$
Auflösungsvermögen von Linsensystemen	
für ein Linsensystem mit einem Objektivdurchmesser D und einer Brennweite f gilt	
Winkelauflösung	$\alpha = \frac{1,22 \cdot \lambda}{D}$
Winkelauflösung bei Objektivdurchm. D	$s = f \cdot \alpha = \frac{1,22 \cdot \lambda \cdot f}{D}$

Interferometer

Interferenz: Überlagerung von 2 Wellen mit festen Phasenbeziehungen (kohärentes Licht).

Erzeugung kohärentes Licht d. Spalte od. halbdurchlässige Spiegel.

Michelson Interferometer (M.I.)

Gangunterscheid bei M.I. $\Delta x = 2 \cdot (l_1 - l_2) = 2\Delta l n$

Phasenunterschied M.I. $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta c$

Maxima $\Delta \varphi = m \cdot 2\pi \rightarrow \Delta x = m \cdot \lambda$

Minima $\Delta \varphi = (2m - 1)\pi \rightarrow \Delta x = (2m - 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$

Abstand Maxima bei M.I. $\Delta l = \frac{\lambda}{2}$

Perot-Fabry-Interferometer: Spiegel + halbdurchlässiger Spiegel ($\approx 97\%$)

Abstand der Spiegel für LASER $l = m \frac{\lambda_0}{2}$

Wellenlänge Atomstrahlung λ_0

Stehende Welle möglich, angeregte Atome im Resonator, phasensynchrone (stimulierte) Emission der Atome.
→ Verstärkung der stehenden Welle.

Strahl wird durch teildurchlässigen Spiegel ausgekoppelt.

Einzel-, Doppelspalt und Gitter

Spaltbreite	b
Abstand Spalte bzw. Abstand Gitterstriche	d
Anzahl Gitterstriche	N
Zunächst $b \ll \lambda$	
Maxima b. Doppelspalt	$d \cdot \sin \alpha = m \cdot \lambda$
Minima b. Doppelspalt	$d \cdot \sin \alpha = (m + \frac{1}{2}) \cdot \lambda$
Hauptmaximum b. Gitter	$d \cdot \sin \alpha = m \cdot \lambda$
Anzahl Nebenmaxima zw. Hauptmax. beim Gitter	$N - 2$
Beugung am Spalt	
Spaltbreite nun nicht mehr viel kleiner als Wellenlänge → Huygenssche Elementarwellen	
Auslöschung Teilstrahlen	$\frac{b}{2} \sin \alpha = m \cdot \frac{\lambda}{2}$
Intensität am Spalt	$I = I_0 \left(\frac{\sin \varphi/2}{\varphi/2} \right)^2$
mit	$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot b \cdot \sin \alpha$
Intensität am Doppelspalt	$I' = I_0 \left(\frac{\sin \varphi/2}{\varphi/2} \right)^2 \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2}$
mit	$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \alpha$

Polarisation

Brewster-Winkel	α_B
Hier ist reflektierter Strahl senkrecht auf gebrochenem Strahl	
Für diesen Winkel sind beide Strahlen senkrecht zueinander polarisiert.	
Bedingung für Brewster'scher Winkel	$\frac{n_2}{n_1} = \tan \alpha_B$
Brewster'scher Winkel für $n_1 = 1$	$n_2 = \tan \alpha_B$

moderne Physik

Spezielle Relativitätstheorie

- Versuch von Michelson und Morley: Messung Lichtgeschwindigkeit in und gegen Erdbewegung
→ kein Unterschied für c
- Spezielle Relativitätstheorie von Einstein:
 - a) Absolute, gleichförmige Bewegungen kann man nicht messen
 - b) Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle oder dem Beobachter (oder: Jeder Beobachter misst für c im Vakuum denselben Wert).

Zeitdilatation

Zeitpunkt eines Ereignisses 1 im Bezugssystem B: $t_1^{(B)}$

Zeitpunkt eines Ereignisses 2 im Bezugssystem B: $t_2^{(B)}$

Zeitdifferenz im im Bezugssystem B: $t_2^{(B)} - t_1^{(B)}$

Geschwindigkeit des Bezugssystems B relativ zu Bezugssystem A: $v_B^{(A)}$

im Bezugssystem A beobachteter Zeitpunkt des Ereignisses 1: $t_1^{(A)}$

im Bezugssystem A beobachteter Zeitpunkt des Ereignisses 2: $t_2^{(A)}$

$$1. \text{ Zeitpunkt im Bezugssystem A} \quad t_1^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_B^{(A)}}{c}\right)^2}} \left(t_1^{(B)} + \frac{v_B^{(A)} x_0^{(B)}}{c^2} \right)$$

$$2. \text{ Zeitpunkt im Bezugssystem A} \quad t_2^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_B^{(A)}}{c}\right)^2}} \left(t_2^{(B)} + \frac{v_B^{(A)} x_0^{(B)}}{c^2} \right)$$

$$\text{Zeitdifferenz in B} \quad \Delta t^{(B)} = t_2^{(B)} - t_1^{(B)}$$

$$\text{Zeitdehnung (-dilatation) in A} \quad \Delta t^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_B^{(A)}}{c}\right)^2}} \cdot \Delta t^{(B)}$$

Längenkontraktion

Längenkontraktion parallel zu v

$$l = \sqrt{1 - \left(\frac{v_B^{(A)}}{c}\right)^2} \cdot l_{\text{Eigen}}$$

relative Geschwindigkeiten

x -Richtung

$$v_x^{(A)} = \frac{v_x^{(B)} + v_B^{(A)}}{1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)} / c^2}$$

y -Richtung

$$v_y^{(A)} = \frac{v_y^{(B)}}{1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)} / c^2}$$

z -Richtung

$$v_z^{(A)} = \frac{v_z^{(B)}}{1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)} / c^2}$$

relativistischer Impuls und relativistische Energie

relativistische Masse

$$m_{\text{rel}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \cdot m_0$$

Ruheenergie

$$E_0 = m_0 c^2$$

Elektron

$$E_0 = 0,511 \cdot 10^6 \text{ eV} = 0,511 \text{ MeV}$$

Proton

$$E_0 = 938,272 \text{ MeV}$$

Neutron	$E_0 = 939,565 \text{ MeV}$
relativistische kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1)$
Relativistische (Gesamt-)Energie	$E = E_0 + E_{\text{kin}} = \gamma m_0 c^2$
relativistischer Impuls	$p = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0 v$
Impuls, Ruhe- und Gesamtenergie	$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$

Welle-Teilchen Dualismus

- a) Elektronen durch Doppelspalt: Interferenzmuster $\rightarrow$ Wellennatur des Lichts.
- b) Photoeffekt: Elektronen werden durch Photonen aus Metalloberfläche herausgeschlagen:
 - (i) Minimale Frequenz ν notwendig um Austrittsenergie W zu überwinden
 - (ii) E_{kin} ist abhängig von Frequenz ν des Photons und steigt linear mit ν
 - (iii) Anzahl Elektronen ist proportional zur Intensität des Lichts
- c) Compton-Effekt: elastischer Stoß zwischen Elektronen und Photonen, Photon gibt Energie ab (Frequenz nach Stoß kleiner) $\rightarrow$ Photonen haben Impuls.
- d) Paarbildung: aus einem energiereichen Photon mit $E_{\text{Photon}} = h \cdot \nu$ bildet sich ein Teilchen-Antiteilchen-Paar (z.B. Elektron-Positron-Paar bei $E_{\text{Photon}} \geq 2m_e \cdot c^2 (1 + \Delta)$). Findet entweder im Atomkern statt (z.B. Germaniumdetektor für γ -Spektroskopie, $\Delta \approx 10^{-5}$) oder in der Atomhülle, wenn Photon eine Hüllelektron trifft (sog. Triplettbildung) mit $E_{\text{Photon}} \geq 4m_e \cdot c^2$, wovon $2m_e \cdot c^2$ als kinetische Energie der drei Teilchen auftreten, d.h. $\Delta = 1$.

Energie von Photonen und Elektronen

Photonen-Energie	$E = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda}$
de-Broglie-Wellenlänge	$\lambda = \frac{h}{p}$
Wellenlänge eines Teilchens mit: $v \ll c$	$\lambda = \frac{h \cdot c}{\sqrt{2m_0 c^2 E_{\text{kin}}}} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\sqrt{2m_0 c^2 E_{\text{kin}}}}$
z.B. für Elektron mit E_{kin} in (eV)	$\lambda_{\text{Elektron}} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\sqrt{2(0,511 \cdot 10^6 \text{ eV}) E_{\text{kin}}}} = \frac{1,226 \text{ nm}}{\sqrt{E_{\text{kin}} / [\text{eV}]}}$

Atomaufbau

Atome bestehen aus einem Atomkern und einer wesentlich größeren Hülle aus Elektronen.

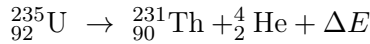
Der Kerndurchmesser beträgt $10^{-15} \dots 10^{-14} \text{ m}$ während der Durchmesser der Atomhülle etwa 10^{-10} m beträgt. Fast die gesamte Atommasse ist im Kern enthalten, er besteht aus Z Protonen und N Neutronen. Die Summe $Z + P = A$ nennt man die Nukleonenzahl A .

Die Anzahl der Elektronen in der Hülle (und damit die negative Ladung) entspricht der Anzahl Z der positiven Protonen im Kern (der Kernladungszahl, gleichzeitig Ordnungszahl im Periodensystem). Damit ist das Atom elektrisch neutral.

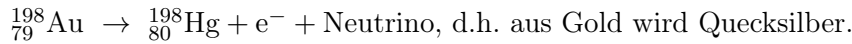
Atomzerfall, Radioaktivität

Instabile Atome zerfallen unter Aussendung eines Teilchens.

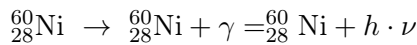
- a) α -Zerfall: ${}^4_2\text{He}^{2+}$ -Kern aus 2 Protonen und 2 Neutronen. Z.B. zerfällt ein Uran-235 Atom zu Thorium-231:



- b) β -Zerfall: beim β^- -Zerfall wird ein Elektron durch Tunneleffekt aus dem Kern ausgesandt (selten ein Positron beim β^+ -Zerfall), ein Neutron wird zum Proton und die Kernladungszahl erhöht sich um eins, die Nukleonenzahl bleibt jedoch unverändert:



- c) γ -"Zerfall": Nach einem α - oder β -Zerfall bleibt der Atomkern meist in einem angeregten Zustand (überschuss an Energie). Dieser Energieüberschuss wird in Form von γ -Strahlung abgegeben:



Zerfallsgesetz

Zerfallskonstante

λ

Anzahl Teilchen nach Zeit t

$$N(t) = N_0 \cdot \exp[-\lambda \cdot t]$$

nach Halbwertszeit sind noch 50% der Teilchen da

$$\frac{1}{2} = \exp[-\lambda \cdot T_{1/2}]$$

Halbwertszeit

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Aktivität nach Zeit t

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda \cdot N_0 \cdot \exp[-\lambda \cdot t]$$

Bohr'sches Atommodell

Quantisierung des Drehimpulses eines Elektrons

Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Quantelung des Drehimpulses

$$|\vec{L}| = r \cdot m_e \cdot v = n \cdot \hbar = n \cdot \frac{h}{2\pi}, n \in \mathbb{N}$$

Kreisbahnradius für Quantenzahl n

$$r_n = n^2 \cdot \frac{\hbar \cdot 4\pi\epsilon_0}{m_e \cdot c^2}$$

n=1: Bohr'scher Atomradius

$$a_0 = r_1 = \frac{\hbar \cdot 4\pi\epsilon_0}{m_e \cdot c^2} \approx 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

kin. Energie aus Kreisbewegung

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_n}$$

potentielle Energie aus Coulombkraft

$$E_{\text{pot}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

Gesamtenergie Elektron

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

Energieniveau abh. von n

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot a_0} \approx -\frac{1}{n^2} \cdot 13,6 \text{ eV}$$

Energiezufuhr und Abstrahlung

Energieänderungen nur in Quanten

$$\Delta E = E_m + E_n = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \cdot \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot a_0}, m > n$$

Quantenmechanik

Heisenberg'sche Unschärferelation

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$$

Schrödingergleichung

$$H\psi(x, y, z, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y, z, t)$$

stationäre Schrödingergleichung eindim.

$$\frac{\hbar}{2m} \cdot \frac{d\psi}{dx^2} = (E - U(x)) \cdot \psi$$

Lösung eindim. Schrödingergl.=Wellen-

funktion im erlaubten Bereich: $0 \dots L$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{L} \cdot x\right)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte dafür,

dass sich Elektron an der Position x befindet $|\psi(x)|^2$
 Quantisierung der Energie im Bereich L, für $n \in \mathbb{N}$ $E_n = n^2 \cdot \frac{h^2}{8mL^2} = n^2 E_1$

Quantenmechanisches Atommodell am Beispiel des Wasserstoffatoms

- a) Atomkern wird als ruhend angenommen
- b) Elektron in der Hülle wird durch Wellenfunktion Ψ beschrieben
- c) Das Quadrat der Wellenfunktion, $|\Psi|^2$ kann als Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektron interpretiert werden
- d) Erlaubte Energieniveaus ergeben sich aus den Randbedingungen für die Wellenfunktion
- e) Aus den Energieniveaus können die Spektrallinien des Wasserstoffs berechnet werden.

stationäre Schrödingergleichung $\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = (E - U) \cdot \psi$

konstante Gesamtenergie d. Elektrons $E = \text{const.}$

potentielle Energie

abh von Kernabstand $U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$

Lösung ist Prod. aus 2 Funktionen $\psi = \psi_{nlm}(r, \Theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\Theta, \varphi)$

erlaubte Energieniveaus abh. von n $E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot a_0} \approx -\frac{1}{n^2} \cdot 13,6 \text{ eV}$

Quantenzahlen: es ergeben sich 3 verschiedene Quantenzahlen: n, l, m

Hauptquantenzahl $n = 1, 2, 3, \dots$

Bestimmt Energieniveau $E_n \approx -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{n^2}$

Bahndrehimpulsquantenzahl $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$

möglichen Werte des Bahndrehimpulses $|\vec{L}| = \sqrt{l \cdot (l+1)} \cdot \hbar$

Magnetquantenzahl $m = -l, -(l-1), \dots, (l-1), l$

z-Komponente Drehimpuls $L_z = m \cdot \hbar$

Beispiele für $n = 1$ und $n = 2$

$n = 1; l = 0; m = 0$ $E_1 = -13,6 \text{ eV} \rightarrow \psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a_0^3}} \cdot e^{-\frac{r}{a_0}}$, Maximum bei $r = a_0$

$n = 2; l = [0, 1]; m = [-1, 0, 1];$ $E_2 = -3,4 \text{ eV}$

Feinstrukturaufspaltung: Der Spin

Elektronenspin $m_s = \pm \frac{1}{2}$

Pauli-Verbot

Keine 2 Elektronen in einem Atom dürfen in allen Quantenzahlen übereinstimmen!