Zusammenfassung
Experimentalphysik A

Inhaltsverzeichnis

1 Kinematik punktförmiger Körper

1.1 Grundlegende physikalische Größen

- **Zeit**
  Formelzeichen: t
  Einheit: 1 s (Sekunde)

- **Strecke**
  Formelzeichen: s
  Einheit: 1 m (Meter)

- **Geschwindigkeit**
  Formelzeichen: v
  Einheit: 1 m/s
  Die Geschwindigkeit eines Körpers wird anhand der zurückgeglegte Strecke Δs während einer Zeit Δt bestimmt, also:
  $$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.1}$$
  Anders ausgedrückt: Die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Strecke s nach der Zeit t
  $$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{1.2}$$

- **Beschleunigung**
  Formelzeichen: a
  Einheit: $1\,\mathrm{m/s^2}$
  Die Beschleunigung ist eine Geschwindigkeitsänderung Δv während einer Zeit Δt, also:
  $$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{1.3}$$
  Somit ist die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeit v nach der Zeit t, nach Gleichung (1.2) also auch die zweifache Ableitung der Strecke s nach der Zeit t:
  $$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \overset{(1.2)}{=} \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.4}$$

- **Masse**
  Formelzeichen: m
  Einheit: 1 kg (Kilogramm)
  Die Masse eines Körpers ergibt sich aus seiner Dichte ρ $(\mathrm{kg/m^3})$ und seinem Volumen V $(\mathrm{m^3})$
  $$m = \rho \cdot V. \tag{1.5}$$

1.2 Bewegungen

Gleichförmige Bewegungen Eine gleichförmige Bewegung ist nicht beschleunigt $(a = 0)$, die Geschwindigkeit v ist daher konstant mit der Zeit t. Aus Gleichung (1.2) folgt für die zurückgelegte Strecke zum Zeitpunkt t (mit $t_{\text{Start}} = 0$)

$$s = \int_0^t v \, dt' = v \cdot t, \quad \text{da } v = \text{const.} \tag{1.6}$$

Konstant beschleunigte Bewegungen Bei einer konstant beschleunigten Bewegung gilt $a = const.$ und somit folgt aus Gleichung (1.4) für die Geschwindigkeit v zum Zeitpunkt t (mit $v_{\text{Start}} = 0$ und $t_{\text{Start}} = 0$)

$$v = \int_0^t a \, dt' = a \cdot t. \tag{1.7}$$

Für die Strecke muss berücksichtigt werden, dass sich die Geschwindigkeit mit der Zeit ändert, daher gilt

$$s = \int_0^t v \, dt' = \int_0^t a \cdot t \, dt' = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \tag{1.8}$$

1.3 Kräfte

Formelzeichen: F
Einheit: $1\,\text{kg m /s}^2 = 1\,\text{N}$ (Newton)

Newtonsche Axiome

1. **Trägheitsprinzip:** Ein Körper ändert seinen Bewegungszustand nicht, solange keine äußere Kraft auf ihn wirkt (siehe gleichförmige Bewegung).

2. **Aktionsprinzip:** Eine Änderung der Bewegung (= Beschleunigung) ist proportional zur einwirkenden Kraft F und verläuft in dieselbe Richtung wie F, kurz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

3. **Reaktionsprinzip:** Zu jeder wirkenden Kraft gibt es eine gleich große, entgegen gerichtete Kraft (Gegenkraft), kurz *actio* = *reactio*. Daraus folgt, dass sich alle Kräfte, die auf einen ruhenden Körper wirken, aufheben müssen (F_{ges}=0).

Superpositionsprinzip Das Superpositionsprinzip besagt, dass sich n (beliebig viele) gleichzeitig wirkende Kräfte (analog: Bewegungen, Wellen. . .) ungestört überlagern, sich also gegenseitig nicht beeinflussen.

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n \tag{1.9}$$

Reibungskräfte

- **Haftreibung:** Da ein Körper am Untergrund "haftet", muss diese Kraft einmal überwunden werden, damit sich der Körper in Bewegung setzen kann.

- **Gleitreibung:** Wenn ein Körper auf einem Untergrund gleitet, wird er durch Reibung mit dem Untergrund abgebremst (analog: Rollreibung, Luftreibung. . .).

Reibungskräfte wirken immer entgegen der Bewegungsrichtung. Ihr Betrag ist proportional zur Normalkraft. Proportionalitätsfaktor ist der einheitenlose Reibungskoeffizient μ

$$F_R = \mu \cdot F_N \tag{1.10}$$

- **Reibung in Flüssigkeiten oder Gasen:** Die Reibung, die der Kontakt mit Flüssigkeiten oder Gasen verursacht, ist abhängig von der Oberfläche des Körpers und der Viskosität η des Mediums. Für sphärische Körper (Kugel) mit dem Radius R und der Geschwindigkeit v gilt:

$$F_R = 6\pi \cdot R \cdot \eta \cdot v \tag{1.11}$$

Federkraft Die Kraft, die eine Feder ausübt, ist abhängig von der Federkonstante D ("Stärke der Feder") und proportional zur Ausdehnung s der Feder aus ihrer Ruhelage x_0.

$$F = -D \cdot s \tag{1.12}$$

Gravitation Zwischen zwei Körpern mit den Massen m_1 und m_2, die sich im Abstand r zueinander befinden, wirkt eine Anziehungskraft,

$$F_\gamma = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{1.13}$$

die *Gravitation* genannt wird. Der Proportionalitätsfaktor γ ist die Gravitationskonstante, mit

$$\gamma = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$$

1.4 Impuls

Formelzeichen: p
Einheit: $1\,\mathrm{kg\,m\,/s} = 1\,\mathrm{N\,s}$
Der Impuls bezeichnet eine aufgewendete Kraft $\vec{F}$ in einer Zeit t

$$\vec{p} = \int \vec{F}\,\mathrm{d}t \tag{1.14}$$

Impulserhaltung In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls eine Erhaltungsgröße.

1.5 Energie

Formelzeichen: E
Einheit: $1\,\mathrm{kg\,m^2\,/s^2} = 1\,\mathrm{N\,m} = 1\,\mathrm{J}$ (Joule)

Energieerhaltung In einem abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße ($E_{\text{Start}} = E_{\text{Ende}}$).

Energieformen

- **Kinetische Energie:** "Bewegungsenergie"

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.15}$$

- **Potentielle Energie:**
  - "Höhenenergie"

$$E = m \cdot g \cdot h \tag{1.16}$$

– "Federenergie" / "Spannenergie"

$$E = \frac{1}{2} D \cdot s^2 \tag{1.17}$$

- **Arbeit** W**:** Als Arbeit wird eine aufgewendete Kraft in Richtung einer zurückgelegten Strecke $\vec{s}$ bezeichnet. Spannen die Kraft $\vec{F}$ und die Strecke $\vec{s}$ einen Winkel α auf, so muss die zu $\vec{s}$ parallele Kraft $F_{\|} = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\alpha$ verwendet werden

$$W = \int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{s} = \int \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\alpha \, \mathrm{d}s \tag{1.18}$$

$$= \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\alpha \, |\vec{s}|, \quad \text{falls } F = \text{const.} \nsim s \tag{1.19}$$

1.6 Leistung und Wirkungsgrad

Leistung Die in einem Zeitintervall aufgewendete Arbeit W wird als Leistung bezeichnet.
Formelzeichen: P
Einheit: $1\,\mathrm{J}\,/\mathrm{s} = 1\,\mathrm{W}$ (Watt)

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tag{1.20}$$

Wirkungsgrad Der Wirkungsgrad einer Maschine gibt deren Effizienz an (= wie gut wandelt die Maschine Arbeit in Leistung um). Eine optimale Maschine hat den Wirkungsgrad $\eta = 1$.
Formelzeichen: η
Einheit: 1 (einheitenlos)

$$\Rightarrow P = \eta \, \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{1.21}$$

1.7 Kreisbewegungen

Kreisbewegungen sind charakterisiert durch die Winkelgeschwindigkeit.
Formelzeichen: ω
Einheit: $1/\mathrm{s}$
Diese beschreibt einen zurückgelegten Winkel φ in einer Zeit t:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{1.22}$$

Sofern die Winkelgeschwindigkeit konstant mit der Zeit t ist, gilt

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \tag{1.23}$$

wobei T die Dauer eines Umlaufs (Periodendauer) ist und f die Frequenz (Einheit: $[f] = 1\,/\mathrm{s} = 1\,\mathrm{Hz}$ (Hertz)). Für die Geschwindigkeit eines Punktes, der mit Winkelgeschwindigkeit ω im Abstand r um den Mittelpunkt kreist, gilt

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1.24}$$

Die Kraft, die einen Körper auf eine Kreisbahn lenkt, heißt *Zentripetalkraft*.

Scheinkräfte Eine Schreinkraft ist eine Kraft, die abhängig vom Bezugssystem ist, in dem ein Vorgang beobachtet wird. In Inertialsystemen (unbeschleunigtes Bezugssystem) treten keine Scheinkräfte auf.

- **Zentrifugalkraft:** Gegenkraft zur Zentripetalkraft

$$\vec{F}_z = m\omega^2\vec{r} \quad \Rightarrow \left|\vec{F}_z\right| = m\frac{v^2}{r} \tag{1.25}$$

- **Coriolis-Kraft:** Wirkt auf sich bewegende Körper in einem rotierenden System

$$\vec{F}_c = -2m\left(\vec{\omega} \times \vec{v}\right) \tag{1.26}$$

Drehimpuls und Drehmoment Der *Drehimpuls* zeigt in Richtung der Drehachse, sein Betrag gibt den Schwung einer Drehbewegung an.
Formelzeichen: L
Einheit: $1\,\mathrm{kg\,m^2/s}$
Der Drehimpuls eines Körpers berechnet sich durch das Kreuzprodukt von Radiusvektor $\vec{r}$ und Impulsvektor $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{1.27}$$

Das *Drehmoment* bei Drehbewegungen ist das Pendant zur Kraft $\vec{F}$ bei geradlinigen Bewegungen. Es beschleunigt oder bremst Drehbewegungen.
Formelzeichen: M
Einheit: $1\,\mathrm{kg\,m^2/s^2}$
Das Drehmoment ist gegeben durch das Kreuzprodukt von Abstandsvektor (Radius) $\vec{r}$ und Kraftvektor $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{1.28}$$

Wirkt eine Kraft $\vec{F}$ senkrecht auf den Hebelarm $\vec{r}$, so ist der Betrag des Drehmoments

$$M = r \cdot F. \tag{1.29}$$

Drehimpulserhaltung Der Drehimpuls ist in einem abgeschlossenen System eine Erhaltungsgröße ($M = \dot{L} = 0$).

1.8 Schwingungen

Schwingungen zeichnen sich aus durch das periodische Wiederholen von Abläufen. Ihre charakteristische Größe ist die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Sie lassen sich mit Hilfe von Differentialgleichungen (DGL) ausdrücken, deren Lösungen ebene Wellen der Form

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t) \tag{1.30}$$

sind, wobei A und B zeitunabhängige Konstanten sind und $x(t)$ eine beliebige physikalische Größe sein kann.

Schwingungen einer Feder Die Kraft F, die auf einen Block der Masse m wirkt, der an einer Feder der Federkonstanten D befestigt ist, ist die Federkraft (1.12):

$$F = m \cdot a = -D \cdot s. \tag{1.31}$$

Dies lässt sich mit

$$m \cdot a = m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = m \cdot \ddot{s} \tag{1.32}$$

in eine DGL 2. Ordnung umschreiben

$$\ddot{s} = -\frac{D}{m} \cdot s. \tag{1.33}$$

Setzt man für die Strecke s den Ansatzes für eine ebene Welle (1.30) ein, erhält man die Beziehung von Winkelgeschwindigkeit ω und Federkonstanten D:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{1.34}$$

Bei Schwingungen im Schwerefeld der Erde wirkt die Gewichtskraft der Federkraft entgegen

$$F = D \cdot s - m \cdot g \tag{1.35}$$

$$= D\left(x_0 - x\right) - m \cdot g \tag{1.36}$$

$$= -D(x - \underbrace{\left(x_0 - \frac{m \cdot g}{D}\right)}_{=x_0'}) \tag{1.37}$$

$$= -D\left(x - x_0'\right), \tag{1.38}$$

daher verschiebt sich die Gleichgewichtslage x_0' des Blocks um $-\frac{m \cdot g}{D}$ im Vergleich zur Gleichgewichtslage der Feder x_0.

Schwingungen eines Pendels Die auf einen Block der Masse m wirkenden Kräfte, das mit einem Faden der Länge l an der Decke befestigt ist, sind Zentripetal- und Gewichtskraft. Beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage herrscht Kräftegleichgewicht:

$$F_z = G \tag{1.39}$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot l = m \cdot g, \tag{1.40}$$

Daraus folgt die Beziehung

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1.41}$$

zwischen Winkelgeschwindigkeit ω und Pendellänge l.

Drehschwingungen Bei Schwingungen um einen Kreismittelpunkt (z.B. Torsionsdraht) gilt Drehimpulserhaltung, es gilt also $\vec{M_{\text{ges}}} = 0$. Daher betrachten wir anstatt eines Kräftegleichgewichts die beitragenden Komponenten zum Drehmoment

$$\vec{M}_{\text{ges}} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots = 0, \tag{1.42}$$

und stellen so die Schwingungs-DGL auf.
Das Drehmoment eines Torsionsdrahtes ist proportional zum Auslenkungswinkel α und der Torsionsfederkonstante D_α

$$M_\alpha = D_\alpha \cdot \alpha. \tag{1.43}$$

Gedämpfte Schwingungen Jede reale Schwingung wird aufgrund von Reibungskräften irgendwann zur Ruhe kommen. Stokes'sche Reibung ist der einfachste Fall, in dem ein linearer Dämpfungsterm mit Dämpfungskonstante β betrachtet wird. Daraus folgt die DGL:

$$m \cdot a = F_{\text{Feder}} + F_{\text{Stokes}} \tag{1.44}$$
$$m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x - \beta \cdot \dot{x} \tag{1.45}$$
$$\implies \quad \ddot{x} + \frac{\beta}{m} \cdot \dot{x} + \frac{D}{m} \cdot x = 0. \tag{1.46}$$

Mit der Schwingungsfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ des ungedämpften Oszillators und $\delta = \frac{\beta}{2m}$ lässt sich dies umformen zu

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0. \tag{1.47}$$

Dies ist eine homogene DGL 2. Ordnung. Die einfachste Lösung ergibt sich durch den Exponentialansatz

$$x(t) = a \cdot e^{\lambda t}. \tag{1.48}$$

Einsetzen liefert:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \tag{1.49}$$

Allgemein können nun drei verschiedene Fälle auftreten:

- Schwingfall: $\delta < \omega_0$ (schwache Dämpfung),
- Aperiodischer Grenzfall: $\delta^2 = \omega_0^2$ (kritische Dämpfung),
- Kriechfall: $\delta > \omega_0$ (Dämpfung größer als die Eigenschwingung, starke Dämpfung).

Ist die Wurzel von Null verschieden, so gibt es zwei linear unabhängige Lösungen. Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination der beiden Lösungen. Im Kriechfall und im aperiodischen Grenzfall kommt es zu kaum bzw. gar keiner Schwingung, da das System schnell gedämpft wird. Wir betrachten im Folgenden nur den Schwingfall[1]. Hier wird die Wurzel imaginär und man erhält Schwingungsterme

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t}(a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}) \qquad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{1.50}$$
$$= e^{-\delta t}((a_1 + a_2)\cos(\omega t) + i \cdot (a_1 - a_2)\sin(\omega t)). \tag{1.51}$$

Der vordere Term $e^{-\delta t}$ gibt eine Dämpfung der Amplitude an, der hintere Teil die Schwingung. Die Anfangsbedingungen zu Startort $x_0 = x(t=0)$ und Startgeschwindigkeit $v_0 = \dot{x}(t=0)$ definieren die Vorfaktoren

$$a_1 + a_2 = x_0, \tag{1.52}$$
$$i \cdot (a_1 - a_2) = \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega}. \tag{1.53}$$

Nun möchte man $x(t)$ in eine Form mit globaler Amplitude A und einfachem Schwingterm (z.B. nur $\sin(\omega t)$) bringen. Dazu verwendet man das Additionstheorem $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ und zieht A nach vorne

$$x(t) = A \cdot e^{-\delta t}\Big(\underbrace{\frac{x_0}{A}}_{\overset{!}{=}\sin(\varphi)} \cos(\omega t) + \underbrace{\frac{v_0 + \delta x_0}{\omega A}}_{\overset{!}{=}\cos(\varphi)} \sin(\omega t)\Big). \tag{1.54}$$

[1] Bei Interesse empfehle ich: Nolting, „Grundkurs Theoretische Physik 1“, Abschnitt 2.3.7 *Freier gedämpfter linearer Oszillator*

Daraus ergibt sich

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega x_0}{v_0 + \delta x_0}\right), \tag{1.55}$$

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{x_0^2\omega^2 + (v_0 + \delta x_0)^2}, \tag{1.56}$$

und die Lösung der homogenen DGL ist somit

$$x(t) = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi). \tag{1.57}$$

Getriebener harmonischer Oszillator Wir betrachten nun eine zusätzliche antreibende Kraft $F(t)$. Aus der DGL in (1.47) wird nun eine inhomogene:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}F(t). \tag{1.58}$$

Diese wird gelöst, indem zuerst eine allgemeine Lösung $x_\mathrm{h}(t)$ der homogenen DGL gesucht wird (wie in (1.57)) und eine spezielle Lösung $x_\mathrm{p}(t)$ der inhomogenen DGL. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist dann

$$x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t). \tag{1.59}$$

Nach einer kurzen Einschwingzeit wird das System immer der antreibenden Kraft $F(t)$ folgen. Für eine Antriebskraft $F(t) = F_\mathrm{max} \cdot e^{i\bar{\omega}t}$ ist der Ansatz $z(t) = A \cdot e^{i\bar{\omega}t}$ naheliegend. Dies ergibt (nach einigem Umformen und Rechnen)

$$z(t) = |A|e^{i\cdot(\bar{\omega}t + \bar{\varphi})} \tag{1.60}$$

mit

$$|A| = \frac{F_\mathrm{max}/m}{\sqrt{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\bar{\omega}^2}} \quad \text{und} \tag{1.61}$$

$$\bar{\varphi} = \arctan\left(\frac{2\delta\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2}\right). \tag{1.62}$$

Ist die antreibende Kraft rein sinusförmig (kosinusförmig), ist die spezielle Lösung der inhomogenen DGL nur der Imaginärteil (Realteil) von $z(t)$.

Möchte man die maximale Amplitude, abhängig von der Anregungsfrequenz ω, so muss A nach ω abgeleitet und das Maximum bestimmt werden. Das Erscheinen eines ausgeprägten Maximums nennt man Resonanz. Im Spezialfall eines nicht gedämpften Oszillators fällt die Resonanzfrequenz auf die Eigenfrequenz ω_0 des HOs. Die Amplitude wird dann unendlich groß und man spricht von einer Resonanzkatastrophe. Im Fall von Dämpfungen verschiebt sich das Maximum zu kleineren Frequenzen.

1.9 Elastische Stöße

Bei einem elastischen Stoß zweier Körper a und b gilt sowohl Impuls- als auch Energieerhaltung. Nur die Geschwindigkeiten v_i der beiden Körper ändern sich (zu v_i'). Nach dem Impulserhaltungssatz (IES) sind die Gesamtimpulse vorher und nachher identisch:

$$m_a \cdot v_a + m_b \cdot v_b = m_a \cdot v_a' + m_b \cdot v_b' \quad \Rightarrow \quad m_a\left(v_a - v_a'\right) = -m_b\left(v_b - v_b'\right). \tag{1.63}$$

Nach dem Energieerhaltungssatz (EES) gilt:

$$\frac{1}{2}m_a v_a^2 + \frac{1}{2}m_b v_b^2 = \frac{1}{2}m_a \left(v_a'\right)^2 + \frac{1}{2}m_b \left(v_b'\right)^2 \tag{1.64}$$

$$\Leftrightarrow m_a \left(v_a^2 - \left(v_a'\right)^2\right) = -m_b \left(v_b^2 - \left(v_b'\right)^2\right) \tag{1.65}$$

$$\Leftrightarrow \left[m_a \left(v_a - v_a'\right)\right] \left(v_a + v_a'\right) = \left[-m_b \left(v_b - v_b'\right)\right] \left(v_b + v_b'\right) \tag{1.66}$$

Nach dem IES sind die beiden Terme in den eckigen Klammern identisch. Daher muss gelten:

$$v_a + v_a' = v_b + v_b' \tag{1.67}$$

$$\Leftrightarrow v_a - v_b = v_a' - v_b' \tag{1.68}$$

Der Geschwindigkeitsunterschied der beiden Körper vor der Stoß ist also gleich dem negativen Geschwindigkeitsunterschied nach dem Stoß:

$$\boxed{\boxed{\Delta v = -\Delta v'}} \tag{1.69}$$

2 Kinematik starrer, ausgedehnter Körper

2.1 Trägheitsmoment

Ausgedehnte Körper haben, im Gegensatz zu Massenpunkten, eine Trägheit ("Widerstand") gegenüber Rotation. Je nachdem, um welche Achse sich ein Körper dreht ist die Trägheit unterschiedlich. Das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Achse i berechnet sich anhand der Massenverteilung in die beiden Richtungen orthogonal zur Drehachse. Ganz allgemein lässt es sich berechnen mit:

$$\theta_i = \int \left(x_j^2 + x_k^2\right) \mathrm{d}m \tag{2.1}$$

$$= \int \left(x_j^2 + x_k^2\right) \rho \mathrm{d}V. \tag{2.2}$$

Im Allgemeinen wird das Trägheitsmoment durch den Schwerpunkt berechnet. Das geschieht durch die richtige Wahl der Integrationsgrenzen.

Beispiel: *Quader mit den Kantenlängen a, b und c*
Volumenelement: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$\theta_{z,SP} = \rho \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{2.3}$$

Vollzylinder Für die Parametrisierung werden aus Gründen der Einfachheit Zylinderkoordinaten gewählt, mit

$$x = r \cdot \cos\varphi, \tag{2.4}$$

$$y = r \cdot \sin\varphi, \tag{2.5}$$

$$z = z, \tag{2.6}$$

die Grundfläche liegt also in der x-y-Ebene, die Höhe in z-Richtung. Für das Volumenelement

$$\mathrm{dV} = r \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z, \tag{2.7}$$

wird über den Radius r, die Höhe z und den Winkel φ integriert. Die Masse des Zylinders ist

$$M = \rho \cdot V_{\text{Zyl.}} = \rho \cdot \pi R^2 \cdot h. \tag{2.8}$$

Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders mit Radius R und Höhe h ist somit

$$\begin{align}
\theta_i &= \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^h \mathrm{d}z \;\; r \cdot \left(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi\right) \rho \tag{2.9}\\
&= \rho \cdot \int_0^R r^3 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^h \mathrm{d}z \tag{2.10}\\
&= 2\pi h \rho \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^R \tag{2.11}\\
&= \frac{1}{2} M R^2 \tag{2.12}
\end{align}$$

Hohlzylinder Im Gegensatz zum Vollzylinder, befindet sich beim Hohlzylinder die gesamte Masse nur im Mantel. Daher fällt die Integration über den Radius weg. Das Volumenelement ist also:

$$\mathrm{d}V = R \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z. \tag{2.13}$$

Die Masse ist

$$M = \rho \cdot 2\pi R \cdot h \tag{2.14}$$

Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit Radius R und Höhe h ist somit

$$\begin{align}
\theta_i &= R \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^h \mathrm{d}z \;\; R^2 \cdot \rho \tag{2.15}\\
&= 2\pi \cdot \rho \cdot h \cdot R^3 \tag{2.16}\\
&= M R^2 \tag{2.17}
\end{align}$$

Satz von Steiner Ist das Trägheitsmoment θ_{SP} durch den Schwerpunkt bekannt, so ist das Trägheitsmoment θ bezüglich einer Rotationsachse, die parallel zu der durch den Schwerpunkt gehenden Achse ist, jedoch mit Abstand a verschoben:

$$\theta = \theta_{SP} + M \cdot a^2 \tag{2.18}$$

2.2 Rotationsenergie, Drehimpuls und Drehmoment

Ein rotierender starrer, ausgedehnter Körper hat die Energie

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \theta \omega^2. \tag{2.19}$$

Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit ω und dem Trägheitsmoment der Drehachse

$$\vec{L} = \theta \cdot \vec{\omega}. \tag{2.20}$$

Das Drehmoment $\vec{M}$ ist die Ableitung des Drehimpulses nach der Zeit und somit:

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \theta \cdot \dot{\vec{\omega}}. \tag{2.21}$$

3 Deformation fester Körper

Unter Einwirkung von Kräften können Körper verformt werden. Man unterscheidet zwischen zwei Arten der Verformung:

- *elastisch*: Der Körper ist nur verformt, solange eine Kraft wirkt. Er geht wieder zurück in seine ursprüngliche Form, sobald keine Kraft mehr ausgeübt wird.
- *plastisch*: Die Deformation bleibt bestehen, auch wenn keine Kraft mehr wirkt.

Die Deformation wird empirisch durch die Längenänderung Δl charakterisiert, wobei

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{l}{A} \cdot F \tag{3.1}$$

mit dem materialspezifischen Elastizitätsmodul E ("E-Modul"), der Länge l und Querschnittsfläche A des Körpers und der auf den Körper wirkenden Kraft F. Mittels der relativen Längenänderung ϵ

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{3.2}$$

und der Zug-/ Druckspannung σ

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad \hat{=} \qquad \text{Kraft pro Querschnittfläche} \tag{3.3}$$

kann das *Hooksche Spannungsgesetz* angegeben werden:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{3.4}$$

4 Flüssigkeiten und Gase

4.1 Hydro- und Aerostatik

Die Hydro- beziehungsweise Aerostatik beschreibt das Verhalten von ruhenden Flüssigkeiten und Gasen. Im Folgenden steht "Flüssigkeit" stellvertretend für Flüssigkeiten und Gase. Die charakteristische Größe der Hydrostatik ist der Druck.
Formelzeichen: p
Einheit: $1\,\text{Pa (Pascal)} = 10^{-5}\,\text{bar}$
Der Druck ist gegeben durch eine auf eine Fläche A ausgeübte Kraft F

$$p = \frac{F}{A}. \tag{4.1}$$

In Flüssigkeiten wirkt er senkrecht auf die Wände des Gefäßes.

Pascalsches Prinzip Der Druck in einem geschlossenen Gefäß ist ohne Gravitation an jedem Ort innerhalb der Flüssigkeit in allen Richtungen gleich.

Schweredruck In einer Flüssigkeit wirkt aufgrund der Gravitation ein Schweredruck. Er ist abhängig von der Flüssigkeitssäule oberhalb der betrachteten Höhe

$$p = \rho \cdot g \cdot h, \tag{4.2}$$

wobei $h = H - h_0$, mit der Gesamthöhe H der Flüssigkeit und der Höhe h_0 des betrachteten Punktes innerhalb der Flüssigkeit.

Auftrieb Durch den Schweredruck der Flüssigkeit erfährt ein Körper in einer Flüssigkeit eine nach oben gerichtete Kraft, den *Auftrieb*. Betrachtet man einen Quader der Grundfläche A und der Höhe h, dessen Oberseite sich h_1 unter der Oberfläche der Flüssigkeit befinden, so wirkt von oben eine Kraft von

$$F_1 = (p_0 + \rho_F \cdot g \cdot h_1) \cdot A, \tag{4.3}$$

mit dem Flüssigkeitsdruck p_0 und der Dichte ρ_F der Flüssigkeit. Von unten (Höhe $h_2 = h_1 + h$) wirkt die Kraft

$$F_2 = (p_0 + \rho_F \cdot g \cdot h_2) \cdot A. \tag{4.4}$$

Die beiden Kräfte sind entgegen gesetzt gerichtet, insgesamt wirkt also die Kraft

$$F = F_2 - F_1 = \rho_F \cdot g\,(h_2 - h_1) \cdot A \tag{4.5}$$
$$= \rho_F \cdot g \cdot V. \tag{4.6}$$

Die Auftriebskraft

$$F_A = m_F \cdot g \tag{4.7}$$

ist also proportional zur Masse der verdrängten Flüssigkeit (*Prinzip von Archimedes*).

Oberflächenspannung Die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten beruht auf Molekularkräften, die dazu führen, dass Flüssigkeiten immer die kleinstmögliche Oberfläche einnehmen. Das Verhältnis Oberfläche : Volumen wird also minimiert. Das geometrische Objekt mit dem kleinsten Oberfläche : Volumen-Verhältnis ist die Kugel. Die Vergrößerung der Oberfläche erfordert Energie. Die zu verrichtende Arbeit ist proportional zur stoffspezifischen Oberfläche und der Änderung der Oberfläche:

$$\mathrm{d}W = \sigma \mathrm{d}A. \tag{4.8}$$

Barometrische Höhenformel In der Erdatmosphäre ändern sich Druck und Dichte mit der Höhe. Unter der Annahme konstanter Temperatur kann der Druck in Abhängigkeit der Höhe ausgedrückt werden. Hierfür betrachtet man ein Volumenelement der Grundfläche A und Höhe $\mathrm{d}h$. Von unten wirkt auf dieses Volumenelement die Kraft

$$F_1 = p \cdot A. \tag{4.9}$$

Von oben wirkt zum einen der Schweredruck des Volumenelements, zum anderen ändert sich der Druck um einen infinitesimalen Anteil dp:

$$F_2 = \mathrm{d}m \cdot g + (p + \mathrm{d}p) \cdot A \tag{4.10}$$
$$= \rho \cdot \mathrm{d}V \cdot g + (p + \mathrm{d}p) \cdot A \tag{4.11}$$
$$= \rho \cdot A \cdot \mathrm{d}h \cdot g + (p + \mathrm{d}p) \cdot A \tag{4.12}$$

Geht man von einem hydrostatischen Gleichgewicht aus, sodass alle Luftströmungen in Ruhe sind, müssen sich die beiden Kräfte aufheben

$$F_1 - F_2 = 0 \tag{4.13}$$
$$p \cdot A - \rho \cdot A \cdot \mathrm{d}h \cdot g - (p + \mathrm{d}p) \cdot A = 0 \tag{4.14}$$
$$\rho \cdot g \cdot \mathrm{d}h = -\mathrm{d}p \tag{4.15}$$
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = -\rho \cdot g \tag{4.16}$$

Das *Ideale Gasgesetz* gibt einen Zusammenhang zwischen Druck p und Volumen V an

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T, \tag{4.17}$$

mit der Stoffmenge n, der universellen Gaskonstante R und der Temperatur T. Mittels der speziellen Gaskonstanten $R_s = \frac{R}{M}$, wobei M die molare Masse des jeweiligen Stoffes ist, lässt sich ein Zusammenhang von Druck und Dichte ρ ausdrücken

$$p = \frac{m}{V} \cdot R_s \cdot T = \rho \cdot R_s \cdot T. \tag{4.18}$$

Da die Temperatur als konstant angesehen wird, ist $\frac{p_i}{\rho_i}$ eine Konstante. Somit lässt sich (4.16) umschreiben in

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = -\frac{p}{R_s \cdot T} \cdot g \tag{4.19}$$
$$= -p\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g, \tag{4.20}$$
$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot \mathrm{d}h. \tag{4.21}$$

Integration von (4.21) liefert

$$\ln\left(\frac{p(h)}{p(0)}\right) = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h, \tag{4.22}$$

und umgeformt lautet die *Barometrische Höhenformel*

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h}. \tag{4.23}$$

4.2 Hydrodynamik

Die Hydrodynamik beschreibt das Verhalten strömender Flüssigkeiten.

Kontinuitätsgleichung Bei einer inkompressiblen Strömung ist die Dichte der Flüssigkeit konstant. Fließt eine Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit v_1 durch ein Rohr der Querschnittsfläche A_1, fließt pro Zeiteinheit durch alle Querschnitte dieselbe Masse. Bei einer Verengung auf die Querschnittsfläche A_2 muss dieselbe Masse pro Zeiteinheit fließen

$$\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} = \rho_i \frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t} = \rho_i \cdot A_i \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \rho_i \cdot A_i \cdot v_i. \tag{4.24}$$

Da $\rho_1 = \rho_2$, muss gelten:

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2. \tag{4.25}$$

Durch die Verengung muss die Flüssigkeit also schneller fließen.

Bernoulli-Gleichung Da die Flüssigkeit in der Verengung schneller fließt, steigt die kinetische Energie. Gleichzeitig ändert sich der statische Druck mit der Querschnittsfläche. Die potentielle Energie der Flüssigkeit sinkt somit. Die verrichtete Arbeit ist

$$\mathrm{d}W_i = -F_i \mathrm{d}x_i = -p_i A_i \mathrm{d}x_i = -p_i \mathrm{d}V_i. \tag{4.26}$$

Da die Dichte konstant ist, ändert sich das Volumen nicht $\mathrm{d}V_1 = \mathrm{d}V_2 := \mathrm{d}V$ und somit ist die Änderung der Arbeit zwischen den beiden Rohrabschnitten

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_2 - \mathrm{d}W_1 = -(p_2 - p_1) \cdot \mathrm{d}V = (p_1 - p_2) \frac{\mathrm{d}m}{\rho} \tag{4.27}$$

Dies führt zu einer Änderung in der kinetischen Energie

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}E_{kin} \tag{4.28}$$

$$(p_1 - p_2) \frac{\mathrm{d}m}{\rho} = \frac{\mathrm{d}m_2}{2} v_2^2 - \frac{\mathrm{d}m_1}{2} v_1^2 = \frac{\mathrm{d}m}{2} \left(v_2^2 - v_1^2 \right), \tag{4.29}$$

somit gilt

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 = p_{\text{ges}}. \tag{4.30}$$

Unter der Berücksichtigung der Gravitation (Schweredruck) ergibt sich:

$$p_{\text{ges}} = p + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g h = \text{const.} \tag{4.31}$$

5 Thermodynamik

Die Thermodynamik wird auch als Wärmelehre bezeichnet und beschreibt das Verhalten von Systemen, wobei die Temperatur nicht mehr als konstant angenommen wird. Insbesondere beschäftigt sie sich mit den Umwandlungsprozessen von Energie (Wärme $\leftrightarrow$ Arbeit).

5.1 Thermodynamische Größen

Die Temperatur ist eine charakteristische Größe in der Thermodynamik
Formelzeichen: T
Einheit: 1 K (Kelvin)
Die Einheit Kelvin, besitzt dieselbe Skala wie Celsius, jedoch verschoben: $0\,\mathrm{K} = -273{,}15°\mathrm{C}$.
Wichtig: Temperaturangaben in Celsius IMMER in Kelvin umrechnen. Sonst kommt Schrott raus! Nur wenn ihr ausschließlich mit Temperaturdifferenzen ΔT rechnet, in denen sich die Verschiebung um $273{,}15°\mathrm{C}$ sowieso aufhebt, ist ein Umrechnen nicht notwendig.

Die Wärme ist eine Form der Energie.
Formelzeichen: Q
Sie ist abhängig von der Temperatur T und der Wärmekapazität C des Mediums

$$\delta Q = C\mathrm{d}T. \tag{5.32}$$

Die Wärmekapazität $C = m \cdot c$ skaliert mit der Masse des Mediums und hängt von der spezifischen Wärmekapazität ab.
Anmerkung: Um zu unterscheiden, ob die Wärmekapazität oder die spezifische Wärme(-Kapazität) gegeben ist, achtet auf die Einheiten
$[C] = 1\,\mathrm{J/K}$,
$[c] = 1\,\mathrm{J/(K\,kg)}$

Zustands- und Prozessgrößen Bei der Beschreibung von Systemen und Prozessen werden zwei Arten von Größen unterschieden: Zustandsgrößen und Prozessgrößen.

- **Zustandsgröße** gibt den aktuellen Zustand eines Systems an und ist nicht davon abhängig, wie das System in diesen Zustand gelangt ist. Man unterscheidet zwischen extensiven und intensiven Größen:

  extensiv: skaliert mit der Größe des System (z.B. Masse, Energie, Volumen, Teilchenzahl, Entropie)

  intensiv: unabhängig von der Größe des Systems (z.B. Druck, Temperatur)

  Beispiel: Verdoppelt man die Größe eines Systems (z.B. in einem Glas Wasser durch erneute Zugabe derselben Menge), so verdoppelt sich das Volumen, nicht aber der herrschende Druck oder die Temperatur.
  Da Zustandsgrößen vom Weg unabhängig sind (sie also „konservativ" sind) werden sie meistens durch totale Differentiale angegeben (Beispiel Änderung der innere Energie: $\mathrm{d}U$).

- **Prozessgröße** beschreibt den Übergang von einem Zustand in einen anderen, also den Prozess. Damit ist sie wegabhängig und ihre Änderung wird durch partielle Differentiale (∂ bzw. δ) angegeben. Beispiele: Wärme Q, Arbeit W.

5.2 Hauptsätze der Thermodynamik

0. Hauptsatz: Thermodynamisches Gleichgewicht
Befinden sich zwei Systeme im thermodynamischen Gleichgewicht, so haben sie dieselbe Temperatur T.

1. Hauptsatz: Energieerhaltung
Die innere Energie U ist eine Zustandsgröße. Es gilt:

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q. \tag{5.33}$$

Das heißt, die innere Energie eines Systems ändert sich nur durch Zufuhr von Wärme oder Leisten von Arbeit (Verbietet Perpetuum Mobile 1. Art = Verrichtung von Arbeit ohne Energiezufuhr).

2. Hauptsatz: *(Es existieren unterschiedliche Formulierungen)*

- Eine periodisch arbeitende Maschine kann nicht alle Wärme eines Systems in Arbeit umwandeln.

- Wärme kann nicht von selbst von einem System niedrigerer Temperatur in ein System höherer Temperatur übergehen.
- ...

3. Hauptsatz: Die Entropie S für $T \to 0$ strebt gegen einen festen Wert (dieser wird auf Null gesetzt, das kann jedoch niemals erreicht werden)

$$S(T \to 0) \to S_0 \tag{5.34}$$

$\Rightarrow$ Der absolute Temperaturnullpunkt kann nicht erreicht werden.

5.3 Ausdehnung eines Materials in Abhängigkeit der Temperatur

Festkörper Der Längenausdehnungskoeffizient α ist materialspezifisch und ist definiert als

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T}. \tag{5.35}$$

Daher gilt:

$$\alpha = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}T} \quad \Rightarrow \quad L(T) = L_0 e^{\int \alpha \mathrm{d}T} = L_0 E^{\alpha \Delta T} \tag{5.36}$$

Für die Lösung der DGL ist ein temperaturunabhängiger Ausdehnungskoeffizient angenommen. Für unsere Zwecke, kann man gut annehmen, dass $\alpha \Delta T \ll 1$. So kann die e-Funktion um $\alpha \Delta T = 0$ entwickelt werden und es ergibt sich die Näherung

$$L \approx L_0(1 + \alpha \Delta T) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boxed{\Delta L = L - L_0 = \alpha \cdot \Delta T \cdot L_0}} \tag{5.37}$$

Bei Betrachtung eines (rechteckigen) Volumens $V_0 = a \cdot b \cdot c$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}(a(T) \cdot b(T) \cdot c(T)) && (5.38)\\
&= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}T} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}b}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}T} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}c}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}T} && (5.39)\\
&= bc\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}T} + ac\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}T} + ab\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}T} && (5.40)\\
&= 3\alpha \cdot abc = 3 \cdot \alpha V_0 && (5.41)
\end{aligned}$$

wobei verwendet wird, dass $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta a}{\Delta T} = \alpha \cdot a$. Daraus folgt

$$\boxed{\boxed{\Delta V = 3\alpha \cdot \Delta T \cdot V_0}}. \tag{5.42}$$

Flüssigkeiten Für Flüssigkeiten ist ein materialspezifischer Volumenausdehnungskoeffizient γ definiert

$$\gamma = \frac{\Delta V}{V \Delta T}. \tag{5.43}$$

Analog zur Längenausdehnung bei Festkörpern folgt für die Ausdehnung des Volumens von Flüssigkeiten (und Gasen)

$$\boxed{\boxed{\Delta V = V - V_0 = \alpha \cdot \Delta T \cdot V_0}} \tag{5.44}$$