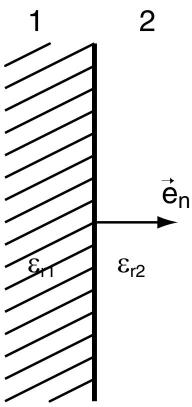
Felder und Wellen

WS 2010/2011

Musterlösung zur 2. Übung

4. Aufgabe

Grenzbedingungen:



$$\sigma = D_{n2} - D_{n1} \tag{1}$$

$$E_{t2} = E_{t1} \tag{2}$$

Hier: Keine Grenzflächenladung, $\sigma = 0$

$$\Rightarrow D_{n2} = D_{n1} \tag{3}$$

Materialgleichung:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \tag{4}$$

Einsetzen in (3):

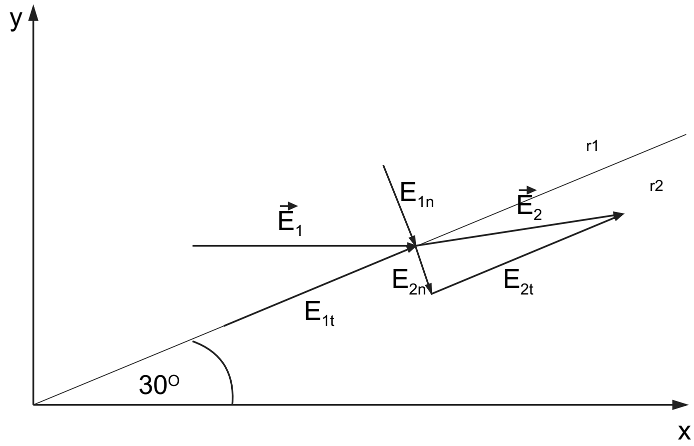
$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} E_{n_2} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} E_{n_1}$$

$$\Rightarrow E_{n_2} = \frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}} E_{n_1} \tag{5}$$

Einsetzen in (2):

$$\frac{D_{t_2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}} = \frac{D_{t_1}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}}$$

$$\Rightarrow D_{t_2} = \frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}} D_{t_1} \tag{6}$$



Lage der Grenzfläche:
gegeben: $\vec{E}_1 = E_0\,\vec{e}_x$, gesucht: $\vec{D}_1,\ \vec{E}_2, \vec{D}_2$. aus Gleichung (4) folgt:

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\vec{E}_1 = \varepsilon_0\varepsilon_{r_1}E_0\vec{e}_x$$

Zerlegung von $\vec{E}_1$ in Normal- und Tangentialkomponente:

$$E_{n_1} = E_0\sin 30^\circ = \frac{E_0}{2}$$
$$E_{t_1} = E_0\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}E_0$$

Anwendung der Grenzbedingungen:

$$(5) \Rightarrow E_{n_2} = \frac{1}{2}E_{n_1} = \frac{E_0}{4}$$
$$(2) \Rightarrow E_{t_2} = E_{t_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}E_0$$

Zusammenfassung der x- und y- Anteile:

$$E_{x_2} = E_{n_2}\sin 30^\circ + E_{t_2}\cos 30^\circ = \frac{7}{8}E_0$$
$$E_{y_2} = -E_{n_2}\cos 30^\circ + E_{t_2}\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}E_0$$

Bestimmung von $\vec{D}_2$ aus der Materialgleichung:

$$(4) \Rightarrow \vec{D}_2 = \varepsilon_0\varepsilon_{r_2}\vec{E}_2 = \frac{7}{4}\varepsilon_0E_0\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{4}\varepsilon_0E_0\vec{e}_y$$

5. Aufgabe

Die Aufgabe wird mit der Methode: Satz vom Hüllenfluß & Symmetrie (Skript Kapitel 3.3) gelöst. Ausgangspunkt ist die Maxwellgleichung

$$\oint \vec{D}\,d\vec{f} = \int \varrho\,dv$$

Die Ladungsverteilung ist kugelsymmetrisch $\Rightarrow \vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$, Rechnung in Kugelkoordinaten. Außerdem gilt $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$.

Linke Seite der Gleichung:

$$\oint \vec{D}\, d\vec{f} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon_0 E_r(r)\, \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{1}\, r^2 \underbrace{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}_{4\pi} = \varepsilon_0 E_r(r) \;\cdot\; 4\pi r^2$$

Dieses Zwischenergebnis gilt für alle kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen (konstant in ϑ, φ).

Rechte Seite:

Die Ladungsdichte ist für die beiden Bereiche $0 \le r < R_0$ und $R_0 \le r < \infty$ durch unterschiedliche Funktionen definiert. Die praktischste Vorgehensweise ist, die Ladung zunächst innerhalb eines Kugelvolumen mit dem Radius $r < R_0$ zu bestimmen und dann die Ladung innerhalb eines Kugelvolumen mit Radius $r \ge R_0$ zu bestimmen.

Bereich 1 ($r \le R_0$):

$$\begin{aligned}
\int \varrho\, dv &= \int_{r'=0}^{r}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} \varrho(r')\, r'^2 \underbrace{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}_{4\pi}\, dr' \\
&= 4\pi \int_0^r \frac{\varrho_1}{R_0^2}\, r'^2\, r'^2\, dr' \\
&= 4\pi \left[\frac{\varrho_1}{R_0^2}\, \frac{r'^5}{5}\right]_0^r \\
&= 4\pi \frac{\varrho_1}{R_0^2}\, \frac{r^5}{5} \;=:\, Q(r) \quad \text{(Ladung innerhalb der Kugel mit Radius } r\text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_r(r) &= \frac{4\pi \frac{\varrho_1}{R_0^2}\, \frac{r^5}{5}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\varrho_1\, r^3}{5\varepsilon_0\, R_0^2} \\
\vec{E}_1 &= \frac{\varrho_1}{5\varepsilon_0}\, \frac{r^3}{R_0^2}\, \vec{e}_r
\end{aligned}$$

Bereich 2 (Ladung innerhalb eines Kugelvolumens mit $R_0 \le r < \infty$):

Das Kugelvolumen mit $r \ge R_0$ enthält auch den Bereich 1. Die Gesamtladung Q im Bereich 1 ist (s.o)

$$Q(R_0) = \frac{4}{5}\, \pi \varrho_1 R_0^3$$

Daraus folgt für $r \geq R_0$:

$$\begin{aligned}
\int \varrho \, dv &= \int\limits_{r'=R_0}^{r} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \varrho(r')\, r'^2 \underbrace{\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{4\pi} \, dr' + Q(R_0) \\
&= 4\pi \int\limits_{R_0}^{r} \varrho_2 \, \frac{{R_0}^4}{r'^4} \, r'^2 \, dr' + Q(R_0) \\
&= 4\pi \varrho_2 \left[-\frac{{R_0}^4}{r'} \right]_{R_0}^{r} + Q(R_0) \\
&= 4\pi \varrho_2 {R_0}^3 \left(1 - \frac{R_0}{r} \right) + \frac{4}{5} \, \pi \varrho_1 {R_0}^3
\end{aligned}$$

Linke Seite auflösen nach E_r:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_r &= \frac{4\pi \varrho_2 {R_0}^3 \left(1 - \frac{R_0}{r}\right) + \frac{4}{5} \, \pi \varrho_1 {R_0}^3}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \\
&= \frac{\varrho_2}{\varepsilon_0} \frac{{R_0}^3}{r^2} \left(1 - \frac{R_0}{r} \right) + \frac{\varrho_1}{5\varepsilon_0} \, \frac{{R_0}^3}{r^2}
\end{aligned}$$

$$\vec{E}_2 = E_r \, \vec{e}_r$$

6. Aufgabe

a) Formelsammlung

$$\Phi(r_2) - \Phi(r_1) = - \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{E_0}{r_0} \, r' \, e^{-r'/r_0} \, dr'$$

Randbedingungen: $r_2 = r$; $r_1 = \infty$; $\Phi(\infty) = 0$
Substitution: $\tilde{r} = r'/r_0; \; dr' = r_0 d\tilde{r}$

$$\begin{aligned}
\Phi(r) - 0 &= - \int\limits_{\infty}^{r/r_0} E_0 \, \tilde{r} \, e^{-\tilde{r}} \, r_0 d\tilde{r} \\
&= E_0 r_0 \, e^{-r/r_0} \left(\frac{r}{r_0} + 1 \right) \\
\Rightarrow \Phi(r) &= E_0 \, e^{-r/r_0} \, (r + r_0)
\end{aligned}$$

b) Nur E_r-Komponente $\Rightarrow$ Kugelsymmetrie. Es gilt die 1. Maxwellgleichung in Differentialform

$$div\vec{D} = \varrho$$
$$\Leftrightarrow div\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

$div\vec{E}$ in Kugelkoordinaten mit $E_\vartheta = E_\varphi = 0$ (Formelsammlung 4.)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r(r)\right) = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$
$$\frac{E_0}{r_0}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^3 e^{-r/r_0}\right) = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$
$$\frac{E_0}{r_0}\frac{1}{r^2}\left(3r^2 e^{-r/r_0} - \frac{r^3}{r_0}e^{-r/r_0}\right) = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$
$$\varrho = \frac{E_0\varepsilon_0}{r_0}\left(3 - \frac{r}{r_0}\right)e^{-r/r_0}$$

Aufgabe 7

a) Raumladungsdichten:

$R \leq R_a :$ $\quad D_R = \varepsilon_0 E_R = \varrho_0\, R^2$

$$\text{div}\vec{D} = \varrho = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\, D_R\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} R\, \varrho_0\, R^2$$
$$= 3\, \varrho_0\, R$$

$R_a < R \leq R_b :$ $\quad \vec{E} = 0 \quad \varrho = 0$

$R_b < R \leq R_c :$ $\quad D_R = \varrho_0 \frac{R_a^3}{R}$

$$\varrho = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\, \varrho_0\, \frac{R_a^3}{R}\right) = 0$$

$R_c < R :$ $\vec{E} = 0 \quad \varrho = 0$

Flächenladungsdichten:

$\sigma = D_{N2} - D_{N1}$

$\sigma_a = -\varrho_0\, R_a^2$

$\sigma_b = +\varrho_0 \frac{R_a^3}{R_b}$

$\sigma_c = -\varrho_0 \frac{R_a^3}{R_c}$

b) $\Phi(\infty) \;=\; 0$

$R > R_c:\qquad E \;=\; 0 \qquad \to \;\Phi \;=\; 0$

$$R_b < R \leq R_c: \qquad \Phi(R) - \Phi(R_c) \;=\; -\int\limits_{R_c}^{R} \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\,\frac{R_a^3}{R'}\,dR' \qquad\qquad \Phi(R_c) \;=\; 0$$

$$= -\,\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\,R_a^3\,\ln\frac{R}{R_c}$$

$$R_a < R \leq R_b: \qquad \vec{E} \;=\; 0 \qquad \to\; \Phi \;=\; -\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\,R_a^3\,\ln\frac{R_b}{R_c}$$

$$R \leq R_a:\; \Phi(R) \;-\; \Phi(R_a) \;=\; -\int\limits_{R_a}^{R} \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\,R^2\,dR$$

$$\Phi(R) \;=\; -\left[\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{3}\,R^3\right]_{R_a}^{R} \;-\; \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\,R_a^3\,\ln\frac{R_b}{R_c}$$

$$\Phi(R) \;=\; -\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\,\left[\frac{1}{3}\,\left(R^3 \;-\; R_a^3\right) \;+\; R_a^3\,\ln\frac{R_b}{R_c}\right]$$