Felder und Wellen

WS 2010/2011

Musterlösung zur 3. Übung

8. Aufgabe

Lösung mit dem Coulombintegral

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dv'$$

Die Ladungsverteilung hat die Form einer dünnen Scheibe, deshalb wird das Volumen- zum Flächenintegral.

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, df'$$

Die geladene Scheibe hat die konstante Flächenladungsdichte $\sigma = Q/\pi a^2$. Das infinitesimale Flächenelement ist gleich

$$df' = r'\, d\varphi'\, dr'$$

Für einen beliebigen Punkt auf der z-Achse gilt $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + r'^2}$.

$$\Phi(z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{r'}{\sqrt{z^2 + r'^2}}\, d\varphi'\, dr'$$

Der Integrant hängt nicht von φ' ab, deshalb ergibt das Integral über den Winkel 2π

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon} \int_0^a \frac{r'}{\sqrt{z^2 + r'^2}}\, dr' \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon} \left[\sqrt{z^2 + r'^2}\right]_0^a \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon} \left(\sqrt{z^2 + a^2} - |z|\right)
\end{aligned}$$

Anmerkung: Das Coulombintegral bestimmt das Potential bis auf eine additive Konstante. Diese Konstante wird zur Erfüllung der Randbedingung $\Phi(\infty) = 0$ benötigt. Die Konstante ist in diesem Fall null (zu Überprüfen durch Grenzübergang $z \to \infty$). Aus Φ wird das $\vec{E}$-Feld mit der Formel

$$\vec{E} = -grad\, \Phi$$

berechnet. $\vec{E}$ hat auf der z-Achse nur eine z-Komponente und hängt nur von z ab (wegen der Zylindersymmetrie), deshalb

$$\vec{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon}\frac{d}{dz}\left(\sqrt{z^2+a^2} - |z|\right)\vec{e}_z$$
$$= \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\vec{e}_z & \text{für } z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(-1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\vec{e}_z & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

Zum Vergleich mit dem Feld einer Punktladung wird das $\vec{E}$-Feld als Funktion der Gesamtladung Q geschrieben.

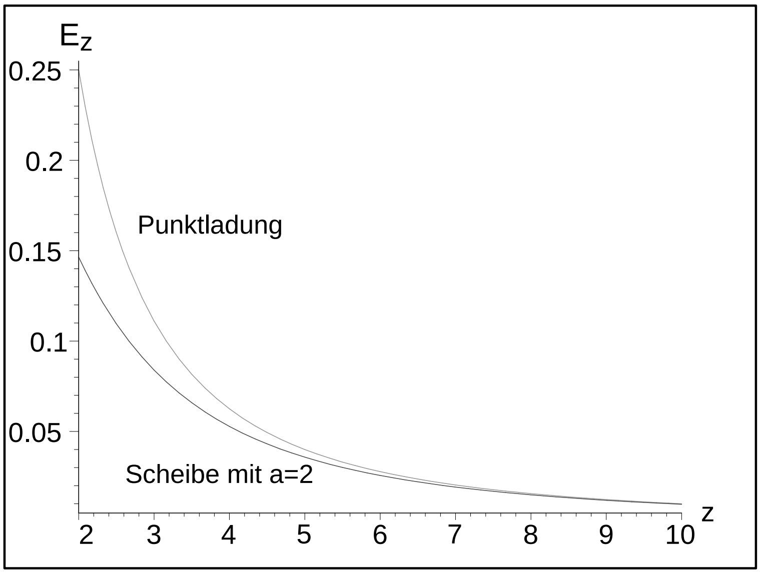
$$\vec{E}(z) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\vec{e}_z, \text{ für } z > 0$$

Wird z sehr groß gegenüber a gilt (Reihenentwicklung aus Bronstein)

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2/z^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2} \text{ für } \frac{a}{z} \ll 1$$

Das Elektrische Feld nähert sich dem einer Punktladung an

$$\vec{E}(z) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon z^2}\vec{e}_z$$

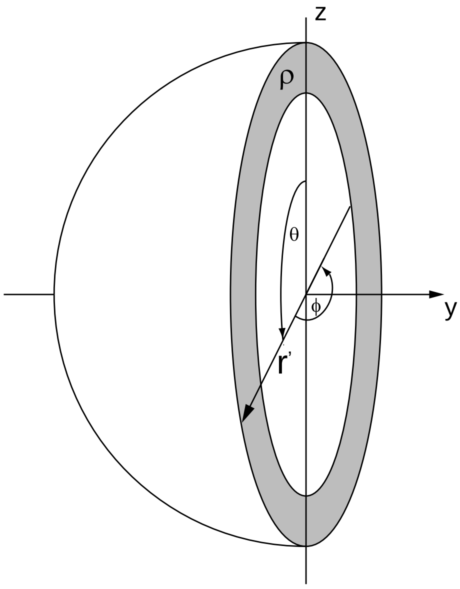


9. Aufgabe

a) Coulomb-Integral:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'\,(+C)$$

Das Potential wird am Ort $\vec{r} = 0$ bestimmt. $\vec{r}'$ ist der Ort der Raumladungs-



dichte.

$$\Phi(\vec{0}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\varrho}{|0-\vec{r'}|} dv'$$

$$= \frac{\varrho}{4\pi\varepsilon} \int\limits_{\pi}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r'} r'^2 \sin\vartheta'\, dr'\, d\vartheta'\, d\varphi'$$

$$= \frac{\varrho}{4\pi\varepsilon} \int\limits_{\pi}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \left[\frac{r'^2}{2}\right]_{r_i}^{r_a} \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'$$

$$= \frac{\varrho}{4\pi\varepsilon} \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}(r_a^2 - r_i^2) \left[-\cos\vartheta'\right]_0^{\pi} d\varphi'$$

$$= \frac{\varrho}{4\varepsilon}(r_a^2 - r_i^2)$$

b) Das $\vec{E}$-Feld kann *nicht* mit $\vec{E} = -grad\,\Phi$ berechnet werden, da Φ nur für einen Punkt, nicht aber für die benachbarten Punkte berechnet wurde. Das $\vec{E}$-Feld wird über das Coulombintegral berechnet.
$\vec{E}$-Feld für Punktladung im Ursprung

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r \quad \text{mit} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$\vec{E}$-Feld für Punktladung Q_i am Ort $\vec{r}_i$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Gesamtwirkung aller N Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N} Q_i \frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

Übergang zum Kontinuum

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\varrho(\vec{r}\,')\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dv'$$

$\vec{r} = \vec{0}, \quad \vec{r}\,' = r'\vec{e}_r, \quad |\vec{r}-\vec{r}\,'|^3 = r'^3$ eingesetzt:

$$\vec{E}(\vec{0}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\varrho(\vec{r}\,')\,(-\vec{e}_{r'})}{r'^2}\, dv'$$

Der Einheitsvektor in $\vec{r}\,'$-Richtung (in Kugelkoordinaten) wird durch die Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten ausgedrückt, weil die Abhängigkeit von ϑ' und φ' sonst verborgen bleiben würde:

$$\vec{e}_{r'} = \vec{e}_{x'} \sin\vartheta' \cos\varphi' + \vec{e}_{y'} \sin\vartheta' \sin\varphi' + \vec{e}_{z'} \cos\vartheta'$$

Wegen der Symmetrie des Problems hat das Feld nur eine y'-Komponente

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{0}) &= \frac{-1}{4\pi\varepsilon} \int_{r_i}^{r_a}\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\varrho(\vec{r}\,')\,\sin\vartheta' \sin\varphi'}{r'^2}\, r'^2 \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'\, dr'\, \vec{e}_{y'} \\
&= \frac{-\varrho}{4\pi\varepsilon}(r_a - r_i) \int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\pi} \sin^2\vartheta' \sin\varphi'\, d\vartheta'\, d\varphi'\, \vec{e}_{y'} \\
&= \frac{-\varrho}{4\pi\varepsilon}(r_a - r_i)\, \underbrace{\left[-\cos\vartheta'\right]_{\pi}^{2\pi}}_{=-2} \int_{0}^{\pi} \sin^2\vartheta'\, d\vartheta'\, \vec{e}_{y'} \\
&= \frac{\varrho}{2\pi\varepsilon}(r_a - r_i) \left[\frac{1}{2}\vartheta' - \frac{1}{2}\cos\vartheta' \sin\vartheta'\right]_0^{\pi} \vec{e}_{y'} \\
&= \frac{\varrho}{2\pi\varepsilon}(r_a - r_i)\frac{\pi}{2}\, \vec{e}_{y'} \\
&= \frac{\varrho}{4\varepsilon}(r_a - r_i)\, \vec{e}_{y'}
\end{aligned}$$