

# Felder und Wellen

WS 2010/2011

## Musterlösung zur 4. Übung

### 10. Aufgabe

- a) Auf den Leitern befinden sich die Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$ . Wegen der Kugelsymmetrie folgt

$$\vec{E} = E_r(r) \vec{e}_r$$

Das elektrische Feld wird mit dem Satz vom Hüllenfluß berechnet

$$\oint \varepsilon \vec{E} d\vec{f} = \int \varrho dv$$

Innerhalb des ersten Leiters befindet sich keine Ladung, deshalb gilt

$$\vec{E} = 0 \quad \text{für } 0 < r < a$$

Zwischen den Leitern gilt für das Feld (nur Leiter 1 innerhalb der Integrationsfläche)

$$4\pi\varepsilon r^2 E_r = Q_1 \Rightarrow E_r = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r^2} \quad \text{für } a \leq r < b$$

Für den Bereich ausserhalb des Leiter 2 schließt die Integrationsfläche sowohl  $Q_1$  als auch  $Q_2$  ein. Für  $\vec{E}$  gilt

$$E_r = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon r^2} \quad \text{für } b \leq r < \infty$$

Bei der Berechnung der Potentiale, muß von einem Punkt mit bekanntem Potential ausgegangen werden, das Potential im Unendlichen ist Null ( $\phi(\infty) = 0$ ). Für  $b \leq r < \infty$  gilt

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \phi(\infty) - \int_{\infty}^r E_r dr \\ &= 0 - \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr \\ &= -\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Auf dem Leiter 2 gilt

$$\phi_2 = \phi(b) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{b}$$

Mit dem bekannten Potential  $\phi_2$  kann das Potential für  $a \leq r < b$  berechnet werden.

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \phi(b) - \int_b^r E_r dr \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \int_b^r \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \left[ -\frac{1}{r} \right]_b^r \\ &= \frac{Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \\ \phi(a) &= \frac{Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{a} = \phi_1\end{aligned}$$

Damit gilt folgendes Gleichungssystem für die Ladungen und die Potentiale auf den Leitern

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{a} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b} \\ \phi_2 &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{b}\end{aligned}$$

Sind die Potentiale bekannt, und sollen die Ladungen berechnet werden, muß das Gleichungssystem nach  $Q_1$  und  $Q_2$  aufgelöst werden. Dieses einfache System kann natürlich durch elementare Umformungen der Gleichungen gelöst werden. Für kompliziertere Problem und bei Einsatz eines Computers ist die formale Darstellung wie im Skript S. 76ff sinnvoll. Die beiden Gleichungen drücken die Potentiale durch Ladungen und Potentialkoeffizienten aus ( $\phi_i = \sum_{k=1}^2 p_{ik} Q_k$ , in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

- b) Sollen die Ladungen bei bekannten Potentialen  $\phi_i$  berechnet werden muß die inverse Matrix berechnet werden.

Mit

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}$$

erhält man:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{4\pi\epsilon}{b-a} \begin{bmatrix} ab & -ab \\ -ab & b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}Q_1 &= \frac{4\pi\epsilon ab(\phi_1 - \phi_2)}{b-a} \\ Q_2 &= \frac{4\pi\epsilon b(-a\phi_1 + b\phi_2)}{b-a}\end{aligned}$$

- c) Die Gesamtenergie eines statischen Systems aus Ladungen ist das Integral des elektri-

schen Feldes zum Quadrat über das gesamte Volumen. Rechnung in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv \\
 &= 2\pi\epsilon \int_a^b \left( \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r^2} \right)^2 r^2 dr + 2\pi\epsilon \int_b^\infty \left( \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon r^2} \right)^2 r^2 dr \\
 &= \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon} \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^b + \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{8\pi\epsilon} \left[ -\frac{1}{r} \right]_b^\infty \\
 &= \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{8\pi\epsilon} \frac{1}{b} \\
 &= \frac{1}{8\pi\epsilon} \left( \frac{Q_1^2}{a} + \frac{2Q_1Q_2}{b} + \frac{Q_2^2}{b} \right)
 \end{aligned}$$

Mit der Formel aus dem Skript S. 95 kann die Energie als Funktion der Ladungen und Potentialkoeffizienten berechnet werden

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} [Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} (p_{11}Q_1^2 + p_{12}Q_1Q_2 + p_{21}Q_2Q_1 + p_{22}Q_2^2) \\
 &= \frac{1}{8\pi\epsilon} \left( \frac{Q_1^2}{a} + \frac{2Q_1Q_2}{b} + \frac{Q_2^2}{b} \right)
 \end{aligned}$$

Analog mit der Influenzkoeffizientenmatrix

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} (c_{11}\phi_1^2 + c_{12}\phi_1\phi_2 + c_{21}\phi_2\phi_1 + c_{22}\phi_2^2) \\
 &= \frac{2\pi\epsilon}{b-a} (ab\phi_1^2 - 2ab\phi_1\phi_2 + b^2\phi_2^2)
 \end{aligned}$$

- d) Auf den beiden Leitern befindet sich die gleiche Ladungsmenge mit umgekehrtem Vorzeichen ( $Q_2 = -Q_1 = Q$ ).

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= (p_{11} - p_{12})Q_1 \\
 \phi_2 &= (p_{21} - p_{22})Q_1
 \end{aligned}$$

Es gilt  $U = \phi_1 - \phi_2$  und  $C = \left| \frac{Q}{U} \right|$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 U &= (p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22}) Q \\
 C_{ges} &= (p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22})^{-1} \\
 &= 4\pi\epsilon \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

Vergleichen Sie diese Lösung mit der Kapazität eines Kugelkondensators (Skript S. 63).

## 11. Aufgabe

a) Elektrisches Feld : Satz von Gauss:

$$\oint \vec{D} d\vec{f} = \int \varrho dv$$

$$\oint \vec{D} d\vec{f} = 2\pi R L D_R$$

$$\begin{array}{ll} R < R_a : & D_R = 0 \quad E_R = 0 \\ R_a \leq R < 2R_a : & D_R = \frac{Q}{2\pi R L} \quad E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a L} \\ 2R_a \leq R < 3R_a : & D_R = 0 \quad E_R = 0 \\ 3R_a \leq R < 4R_a : & D_R = \frac{Q}{2\pi R L} \quad E_R = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R L} \\ 4R_a \leq R : & D_R = 0 \quad E_R = 0 \end{array}$$

Skalarpotential

$$4R_a \leq R : \quad \Phi(R) = 0$$

$$\begin{aligned} 3R_a \leq R \leq 4R_a : \quad \Phi(R) - \Phi(4R_a) &= - \int_{4R_a}^R E_R dR' = - \int_{4R_a}^R \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R' L} dR' \\ \Phi(R) &= - \left[ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln R' \right]_{4R_a}^R \\ &= - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R}{4R_a} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{4R_a}{R} \end{aligned}$$

$$2R_a \leq R \leq 3R_a : \quad \Phi(R) = konst. = \Phi(3R_a) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} R_a \leq R \leq 2R_a : \quad \Phi(R) - \Phi(2R_a) &= - \int_{2R_a}^R E_R dR' = - \int_{2R_a}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a L} dR' \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a L} [R']_{2R_a}^R \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a L} (2R_a - R) \end{aligned}$$

$$\Phi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a L} (2R_a - R) + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}
 R \leq R_a : \quad \Phi(R) = \Phi(R_a) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{4}{3} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left(1 + 2 \ln \frac{4}{3}\right)
 \end{aligned}$$

Ladung

$$\begin{aligned}
 U = \Phi(R_a) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left(1 + 2 \ln \frac{4}{3}\right) \\
 \Rightarrow Q &= U \frac{4\pi\epsilon_0 L}{1 + 2 \ln \frac{4}{3}}
 \end{aligned}$$

b) Es gibt keine Raumladungen sondern nur Flächenladungen:

$$\sigma = D_{N2} - D_{N1}$$

$$\begin{aligned}
 R = R_a : \quad \sigma &= \frac{Q}{2\pi R_a L} \\
 R = 2R_a : \quad \sigma &= -\frac{Q}{4\pi R_a L} \\
 R = 3R_a : \quad \sigma &= \frac{Q}{6\pi R_a L} \\
 R = 4R_a : \quad \sigma &= -\frac{Q}{8\pi R_a L}
 \end{aligned}$$

c) Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0 L}{1 + 2 \ln \frac{4}{3}}$$

d) Maximales E-Feld im Kondensator:

$$\begin{aligned}
 E_{max} = E_D &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a L} = U \frac{4\pi\epsilon_0 L}{4\pi\epsilon_0 R_a L} \frac{1}{\left(1 + 2 \ln \frac{4}{3}\right)} \\
 &= \frac{U}{R_a \left(1 + 2 \ln \frac{4}{3}\right)} \\
 \Rightarrow R_a &= \frac{U}{E_D \left(1 + 2 \ln \frac{4}{3}\right)}
 \end{aligned}$$

Die Kapazität ist in diesem speziellen Fall unabhängig von  $R_a$ . Es gilt:

$$L = C_0 \frac{1 + 2 \ln \frac{4}{3}}{4\pi\epsilon_0}$$

Skizze

