FBW Übung 5 22.11.2010

Einleitung

• Wiederholung: Im statischen Fall gilt im idealen Leiter ($\kappa = \infty$)

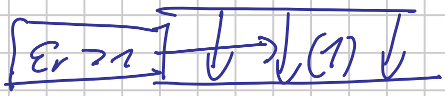
$$\vec{E} = 0, \quad \Phi = \text{const.}, \quad \rho = 0 \quad (\operatorname{div} \underbrace{\vec{D}}_{\varepsilon \vec{E}} = \rho)$$

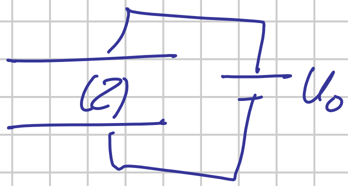
• Kondensatoren mit Dielektrikum ($\varepsilon_r > 1$)

allg. Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \\ w_e &= \tfrac{1}{2} \vec{D} \vec{E} \\ C &= Q/U \end{aligned}}$$

In einen Kondensator werde ein Dielektrikum eingeschoben





(1) konst. Ladung (isolierter Kondensator)

σ const. $\rightarrow \vec{D}$ const. $\rightarrow \vec{E} \downarrow \rightarrow U \downarrow \rightarrow C \nearrow$

$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \downarrow$ (nimmt ab!)

(2) konst. Spannung (z.B. mit Spannungsquelle)

U const. $\rightarrow \vec{E}$ const. $\rightarrow \vec{D} \nearrow \rightarrow \sigma \nearrow \rightarrow Q \nearrow \rightarrow C \nearrow$

$W_e = \frac{1}{2} C U^2 \nearrow$ (nimmt zu!)

• Laplace-Gleichung

Kurze Herleitung: Kombinieren der bekannten Gleichungen

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{und} \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi$$

$$\operatorname{div} \varepsilon(-\operatorname{grad} \Phi) = \rho \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi) = \frac{-\rho}{\varepsilon}$$

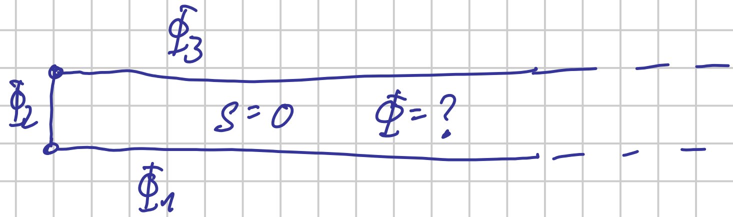
$$\nabla(\nabla \Phi) = \frac{-\rho}{\varepsilon}$$

$\boxed{\Delta \Phi = \frac{-\rho}{\varepsilon}}$, $\boxed{\Delta \Phi = 0}$ im ladungsfreien Raum

Δ („Laplace-Operator") in versch. Koordinatensystemen s. FS Punkt 4

Laplace-Gleichung ist DGL → i.d.R. unendlich viele Lösungen

Gesuchte Lsg wird durch Randbedingungen gefunden (Potential auf Rand eines Gebietes)



$\Delta \Phi = 0$

↓ lösen

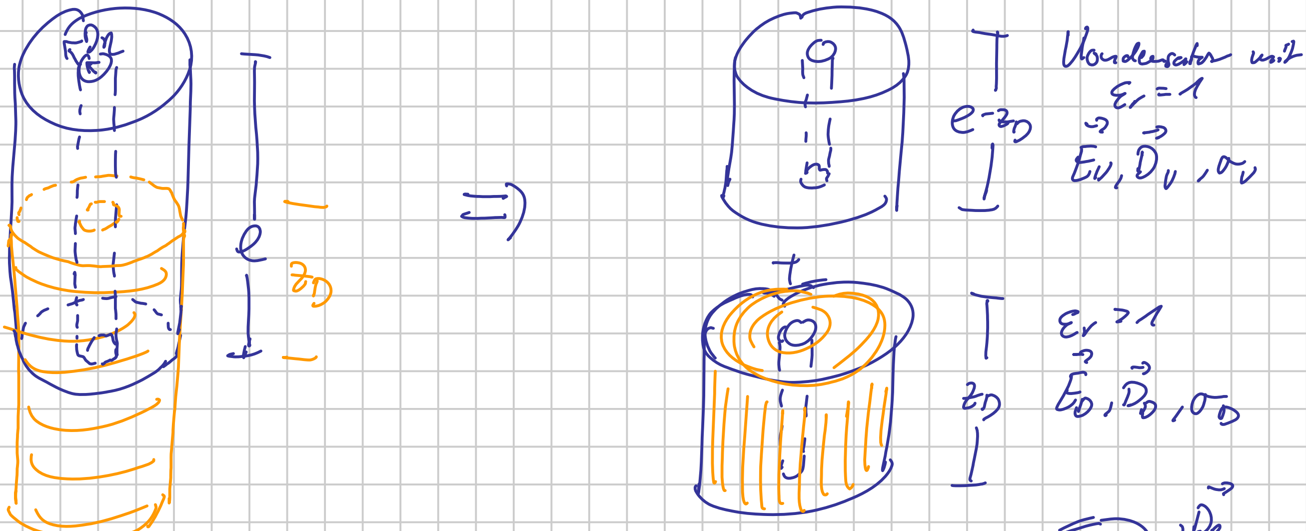
allg. Lösungen (unendlich viele)

↓ Randbedingungen

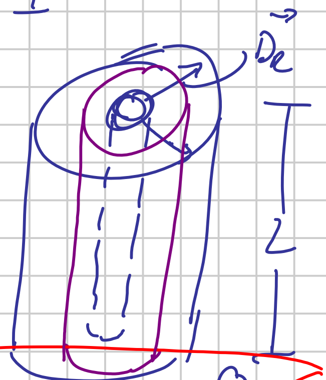
spez. Lösung

Lösungsansätze z.B.
- falls 1-dim Problem → Integration
- Separationsansatz
- numerisch

$\boxed{A12}$ a) ges: $\vec{E}_V, \vec{E}_D, \vec{D}_V, \vec{D}_D, \underbrace{\sigma_V, \sigma_D}_{\text{innere Elektrode}}$



Betrachte Kondensator mit beliebiger Länge L



$$\iint \operatorname{div} \vec{D} = \iiint \rho \, dv \quad \text{(Satz vom Hüllenfluss)}$$

$$D_r \overset{!}{\cdot} A(r)$$

$$2\pi r L D_r(r) = \underbrace{Q}_{\text{innere Elektrode}} \rightarrow D_r(r) = \frac{Q}{2\pi L r} \rightarrow E_r(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r 2\pi L r}$$

Problem: Q unbekannt, aber U_0 gegeben

Es gilt: $$\underbrace{\Phi(r_a) - \Phi(r_i)}_{U_0} = -\int_{r_i}^{r_a} E_r(r)\, dr = \frac{-Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r 2\pi L} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} dr = \frac{-Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r 2\pi L} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$\boxed{Q = \varepsilon_0 \varepsilon_r 2\pi L \frac{U_0}{\ln r_i / r_a}}$$

$$\vec{E}_V = \frac{Q}{\underbrace{\varepsilon_0\varepsilon_r}_{=1} 2\pi(l-z_D)\, r}\,\vec{e}_r = \frac{\cancel{\varepsilon_0}\overset{=1}{\cancel{\varepsilon_r}}\cancel{2\pi}\cancel{(l-z_D)}\frac{U_0}{\ln r_i/r_a}}{\cancel{\varepsilon_0}\cancel{2\pi}\cancel{(l-z_D)}\, r}\,\vec{e}_r = \underline{\frac{U_0}{r\cdot\ln r_i/r_a}\,\vec{e}_r}$$

$L = l - z_D$

gleich!

$$\vec{D}_V = \varepsilon\vec{E}_V = \frac{\varepsilon_0 U_0}{r\ln r_i/r_a}\,\vec{e}_r$$

$$\vec{E}_D = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r 2\pi l\, r}\,\vec{e}_r = \frac{\frac{\cancel{\varepsilon_0}\cancel{\varepsilon_r}\cancel{2\pi}\cancel{z_D}U_0}{\ln r_i/r_a}}{\cancel{\varepsilon_0}\cancel{\varepsilon_r}\cancel{2\pi}\cancel{z_D}\, l\, r} = \underline{\frac{U_0}{r\ln r_i/r_a}\,\vec{e}_r}$$

$L = l$

$$\vec{D}_D = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}_D = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r U_0}{r\ln r_i/r_a}\,\vec{e}_r \qquad \vec{D}_D = \varepsilon_r\vec{D}_V$$

$$\underline{\sigma_V} = D_V(r=r_i) - \underbrace{D_{V,\text{innen}}}_{=0} = \frac{\varepsilon_0 U_0}{r_i\ln r_i/r_a}, \quad \underline{\sigma_D} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r U_0}{r_i\ln r_i/r_a}$$

b) ges: C

$$C = C_V + C_D = \left|\frac{Q_V}{U_0}\right| + \left|\frac{Q_D}{U_0}\right| = \frac{\varepsilon_0 2\pi(l-z_D)\cancel{U_0}}{|\ln r_i/r_a|\cancel{U_0}} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r 2\pi z_D \cancel{U_0}}{|\ln r_i/r_a|\cancel{U_0}}$$

$\varepsilon_r = 1$

$$= \frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln r_a/r_i}(l - z_D + \varepsilon_r z_D)$$

$$= \frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln r_a/r_i}(l + z_D(\varepsilon_r - 1))$$

c) nach Abklemmen von U_0 ändert sich Q nicht mehr

$$Q = \varepsilon_0\varepsilon_r 2\pi l\frac{U_0}{\ln r_i/r_a} \qquad (z_D = l)$$

Jetzt $z_D = l \Rightarrow z_D = l/2$

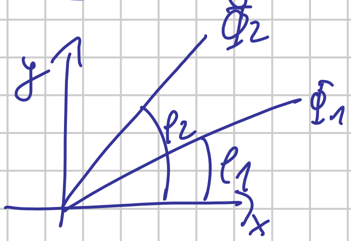
ges: U? $\quad U = Q/C$

$$C(z_D = l/2) \underset{\substack{\text{s. b)}\\ z_D = l/2}}{=} \frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln r_a/r_i}\left(l + \frac{l}{2}(\varepsilon_r - 1)\right) = \frac{\varepsilon_0\pi l}{\ln r_a/r_i}(2 + \varepsilon_r - 1)$$

$$= \frac{\varepsilon_0\pi l}{\ln r_a/r_i}(\varepsilon_r + 1)$$

$$U = \left|\frac{Q}{C}\right| = \left|\frac{\cancel{\varepsilon_0}\varepsilon_r \cancel{2\pi l}\frac{U_0}{\cancel{\ln r_i/r_a}}}{\frac{\cancel{\varepsilon_0}\cancel{\pi l}(\varepsilon_r+1)}{\cancel{\ln r_a/r_i}}}\right| = \frac{2\varepsilon_r U_0}{\varepsilon_r + 1}$$

A13 a) ges: Φ zwischen den Platten



wegen unendlicher Ausdehnung in z-Richtung: $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ (keine z-Abhängigkeit)

wegen unendlicher Ausdehnung in r-Richtung und weil Φ auf Leiter const $\rightarrow$ $\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 0$

Laplace-Gleichung: $\Delta \Phi = 0$

laut FS: $\Delta \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}\Big(R \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial R}}_{\substack{=0 \\ \text{s. oben}}}\Big) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \Phi}_{=0}\Big)$ s. oben

$$= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \rightarrow \text{ Lösen durch Integration}$$

$$\int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} d\varphi = \int 0 \, d\varphi$$

$\downarrow$ Integral der 2. Ableitung ist die 1. Ableitung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 + C_1$$

C_1: Integrationskonstante (unbestimmtes Integral)

$$\int \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} d\varphi = \int C_1 d\varphi$$

$$\boxed{\Phi(\varphi) = C_1 \varphi + C_2} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ Es gibt unendlich viele Potentialverläufe, die $\Delta \Phi = 0$ erfüllen, C_1 und C_2 sind bisher beliebig.

Bestimmung von C_1 und C_2 mittels Randbedingungen

Es muss gelten: $\Phi(\varphi_1) = \Phi_1$, $\Phi(\varphi_2) = \Phi_2$

(1) $\Phi_1 = C_1 \varphi_1 + C_2$

(2) $\Phi_2 = C_1 \varphi_2 + C_2$ –

$$\Phi_1 - \Phi_2 = C_1(\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow C_1 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

C_1 in (1)

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}\varphi_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = \Phi_1 - \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}\varphi_1$$

$$\boxed{\Phi(\varphi) = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}\varphi + \Phi_1 - \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}\varphi_1 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}(\varphi - \varphi_1) + \Phi_1}$$

Probe: Randbedingungen erfüllt? ✓

5) ges $\vec{E}$

$$\underline{\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi} = -\left(\vec{e_r}\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial r}}_{=0} + \vec{e_\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \vec{e_z}\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}_{=0}\right)$$

$$= -\vec{e_\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$$

$$= -\vec{e_\varphi}\frac{1}{r}\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$