Felder und Wellen Übung 9 20.12.2010

## Magnetostatik

allg: $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \cancel{\dot{\vec{D}}} = 0$, momentan $\qquad \frac{d\vec{D}}{dt} = \dot{\vec{D}}$

$$\Downarrow$$

$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \iint \vec{j}\, d\vec{f}$$

Vakuum: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Materie: $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

bewegte Ladungen ($e^-$ im Material) sind Ströme

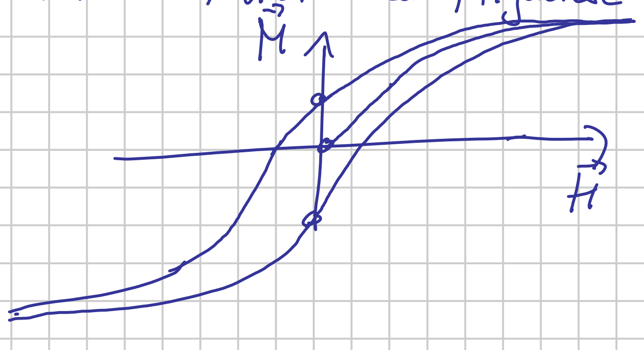
→ erzeugen magn. Moment!

lineare Medien: $\boxed{\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})} = \mu_0(\vec{H} + \underbrace{\chi_m \vec{H}}_{\vec{M}}) = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H}$

$\boxed{= \mu_0 \mu_r \vec{H}}$

Materialklassen:

- diamagnetisch: $\mu_r < 1$ ($\vec{M}$ antiparallel zu $\vec{H}$, kleiner Effekt)
- paramagnetisch: $\mu_r > 1$ ($\vec{M}$ parallel zu $\vec{H}$, linear zu $|\vec{H}|$)
- ferromagnetisch: $\vec{M}$ deutlich stärker als bei paramagnetischen Materialien, nicht-linear, Hysterese



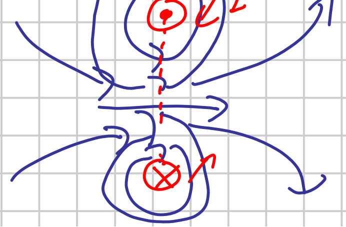

Bedingungen an Grenzflächen:

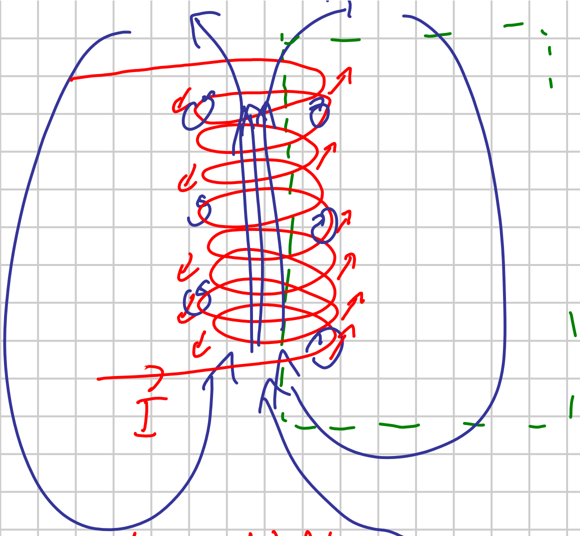
$B_{n1} = B_{n2}$, $\quad H_{t1} = H_{t2}$ (wenn keine Flächenströme)

$\mu_{r1} H_{n1} = \mu_{r2} H_{n2} \Rightarrow H_{n1} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} H_{n2}$

Magnetfeld einer Spule

Zuerst: Magnetfeld einer Schleife





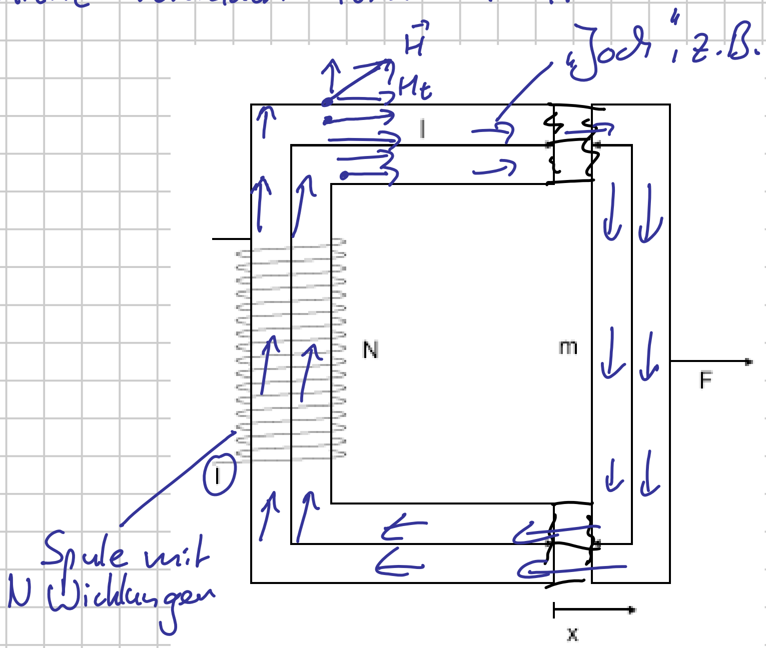

$\oint \vec{H} d\vec{s} = \underbrace{\iint \vec{j} d\vec{f}}_{= I_{ges} = NI}$

$|\vec{H}|$ proportional zu $N$

Problem: Form von $\vec{H}$ nicht kreisförmig

→ Integrationsweg?

Materie verändert Form von $\vec{H}$

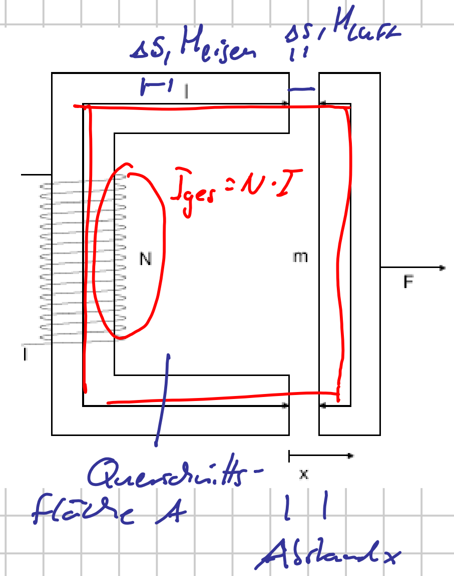



→ Richtung von $\vec{H}$ im Joch entlang des Jochs

→ Integrationsweg hier wählen

$\left( \oint \vec{H} d\vec{s} = NI \text{ gilt überall!} \right)$

$\boxed{A22}$ a) ges: $\vec{B}$, $\vec{H}$




$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \underbrace{\iint \vec{J} d\vec{f}}_{= I_{ges} = NI}$$

$N$: Anzahl der Wicklungen

$\vec{H} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot ds$

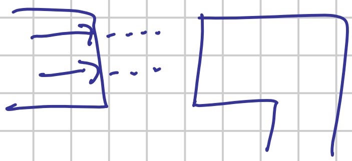
(auf „rotem" Integrationsweg, laut Hinweis)

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = H_{eisen} \cdot l + 2x \cdot H_{Luft} = NI$$

$l$: Länge des Weges im Eisen

Wie ist das Verhältnis zwischen $H_{eisen}$ und $H_{Luft}$?

An der Grenze gilt: $H_{t1} = H_{t2} \Rightarrow \vec{H}$ behält Richtung bei! Stärke?



$B_{n1} = B_{n2}$ (Eisen, Luft)

$$\cancel{\mu_0} \underbrace{\mu_{r,eisen}}_{\mu_r} \cdot H_{n1} = \cancel{\mu_0} \underbrace{\mu_{r,Luft}}_{\approx 1} H_{n2} \Rightarrow \underset{Luft}{H_{n2}} = \mu_r \underset{Eisen}{H_{n1}}$$

$$\Rightarrow H_{eisen} \cdot l + 2x \underbrace{\mu_r H_{eisen}}_{H_{Luft}} = NI \Rightarrow H_{eisen} = \frac{NI}{l + 2\mu_r x}, \quad H_{Luft} = \frac{\mu_r NI}{l + 2\mu_r x}$$

$$B_{eisen} = B_{Luft} = \mu_0 H_{Luft} = \boxed{\frac{\mu_0 \mu_r NI}{l + 2\mu_r x} = B}$$

b) ges: magnetische Energie $W_m$ 1.) $W_m(I, x)$, 2.) $W_m(\Phi, x)$ ($\Phi$: magn. Fluss)

$$W_m = \iiint w_m \, dV = w_{m,eisen} \cdot V_{eisen} + w_{m,Luft} \cdot V_{Luft}$$

„Energiedichte × Volumen"

$w_{m,eisen} = \frac{1}{2} B \cdot H_{eisen}$, $V_{eisen} = A \cdot l$

$w_{m,Luft} = \frac{1}{2} B \cdot H_{Luft}$, $V_{Luft} = A \cdot 2x$

1) $\Rightarrow W_m = \frac{1}{2} B H_{Eisen} \cdot V_{Eisen} + \frac{1}{2} B H_{Luft} V_{Luft} = \frac{1}{2} B A \cdot (H_{Eisen} \cdot l + H_{Luft} \cdot 2x)$

$$= \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l+2\mu_r x} \left( \frac{NI}{l+2\mu_r x} \cdot l + \frac{\mu_r NI}{l+2\mu_r x} 2x \right)$$

$$= \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \left(\frac{NI}{l+2\mu_r x}\right)^2 \cdot (l + \mu_r 2x) = \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \frac{(NI)^2}{l+2\mu_r x} = W_m(I,x)$$

Bei konstanten Strom $I$ nimmt die Energie im Feld ab, wenn $x$ steigt.

2.) $W_m(\Phi, x) = ?$

B aus a) ↓ einsetzen

$$\Phi_m = \iint \vec{B}\, d\vec{f} = B \cdot A = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{l+2\mu_r x} A \Rightarrow I = \Phi_m \frac{l+2\mu_r x}{\mu_0 \mu_r NA}$$

$$W_m = \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r \frac{\cancel{N^2} \left( \Phi_m \frac{l+2\mu_r x}{\mu_0 \mu_r \cancel{N} A} \right)^2}{l+2\mu_r x} = \frac{1}{2 A \mu_0 \mu_r} (l+2\mu_r x) \Phi_m^2$$

$$= W_m(\Phi_m, x)$$

Bei konstanten Fluss nimmt die magnetische Feldenergie zu, wenn $x$ steigt!

c) ges: Kraft $F$ auf Last

Laut Aufgabe:

bei konst. Strom $I$

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial x}$$

$$F = \frac{\partial W_m(I,x)}{\partial x} = \frac{1}{2} A \mu_0 \mu_r (NI)^2 \left( -\frac{1}{(l+2\mu_r x)^2} \cdot 2\mu_r \right)$$

$$= -A \mu_0 \mu_r^2 (NI)^2 \cdot \frac{1}{(l+2\mu_r x)^2}$$

bei konst. Fluss $\Phi_m$

$$F = \frac{-\partial W_m}{\partial x} \quad (F \partial x = -\partial W_m)$$

$$F = -\frac{\partial W_m(\Phi_m, x)}{\partial x} = \frac{-1}{\cancel{2} A \mu_0 \cancel{\mu_r}} \cdot \cancel{2 \mu_r} \Phi_m^2$$

$$= \frac{-1}{\mu_0 A} \cdot \Phi_m^2$$

$$= \frac{-1}{\mu_0 A} \left( \frac{\mu_0 \mu_r NIA}{l+2\mu_r x} \right)^2$$

$$= -A \mu_0 \mu_r^2 (NI)^2 \frac{1}{(l+2\mu_r x)^2}$$

identisch

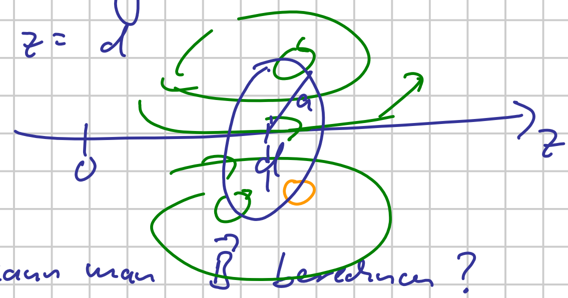
Grund: Kraft ist nur von aktuellem Strom und zugehöriger Flussdichte bzw. $\Phi_m$ abhängig, nicht davon, ob nach einer kleinen Änderung von $x$ sich der Fluss oder der Strom ändern!

Richtung der Kraft: entlang der negativen $x$-Achse $\rightarrow$ Last wird angezogen!

Bei konst. Fluss: mech. Energie $\Leftrightarrow$ magn. Feldenergie

Bei konst. Strom: zusätzlich Energieaustausch mit Quelle (Grund: Induktion)

$\boxed{\text{A23}}$ a) Berechnung von $\vec{B}$ auf $z$-Achse einer einzelnen Schleife bei $z = d$




Wie kann man $\vec{B}$ berechnen?

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{J} d\vec{f}$$

Kein sinnvoller Integrationsweg zu finden! Würde $\vec{B}$ nicht auf ganzer $z$-Achse liefern!

Gesetz von Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

im Prinzip möglich

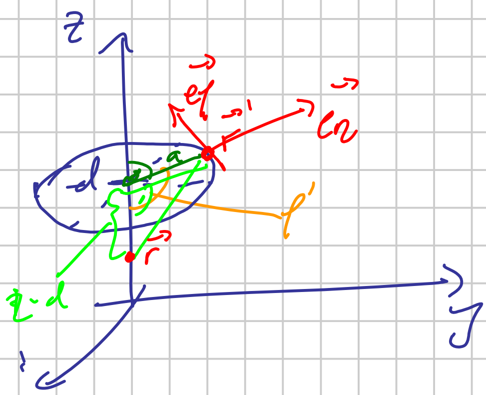
etwas einfacher:

Gesetz von Biot-Savart für Linienleiter:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

alle benötigten Größen bekannt

$\vec{r}$: Ort des $\vec{B}$-Feldes $\quad$ $\vec{r}'$: Ort des Stromes




$$\vec{r} = z \cdot \vec{e}_z \;, \; \vec{r}' = d \cdot \vec{e}_z + a \cdot \vec{e}_r + \varphi' \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (z-d)\vec{e}_z - a\vec{e}_r - \varphi'\vec{e}_\varphi$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(z-d)^2 + a^2}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{a \cdot d\varphi' \cdot \vec{e}_\varphi \times \left( (z-d)\vec{e}_z - a\vec{e}_r - \rho'\vec{e}_\varphi \right)}{\left((z-d)^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

$d\vec{s} = a \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$

Radius

$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_r$

$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = -\vec{e}_z$

$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\varphi = \vec{0}$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{a \cdot d\varphi' \left( (z-d)\,\vec{e}_r + a\,\vec{e}_z \right)}{\left( \dots \right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{a(z-d)\vec{e}_r + a^2\vec{e}_z}{\left( \dots \right)^{3/2}} \, d\varphi'$$

$\int (\dots) = 0$ wegen Symmetrie

$$= \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{a^2 \vec{e}_z}{\left( \dots \right)^{3/2}} \, d\varphi' = \frac{\mu I}{2} a^2 \frac{1}{\left((z-d)^2 + a^2\right)^{3/2}} \vec{e}_z$$

$$= \vec{B}_{z1}(z)$$