Felder und Wellen

WS 2010/2011

Musterlösung zur 9. Übung

22. Aufgabe

a) Nach dem Durchflutungsgesetz

$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = NI$$

$$H_E l + 2H_L x = NI$$

$\vec{B}$ steht senkrecht auf allen Grenzflächen

$$B_E = B_L = B$$

$$H_L = \frac{B}{\mu_0}$$

$$H_E = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

In das Umlaufintegral eingesetzt

$$Bl + 2\mu_r Bx = \mu_0 \mu_r NI$$

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{l + 2\mu_r x}$$

Daraus folgen die magnetischen Feldstärken

$$H_L = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\mu_r NI}{l + 2\mu_r x} = \mu_r H_E$$

$$H_E = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = \frac{NI}{l + 2\mu_r x}$$

b) Die Energiedichte der magnetischen Feldenergie ist

$$w_m = \frac{1}{2} BH$$

Die Gesamtenergie ist also

$$\begin{aligned} W &= \int w_{mL}\, dv + \int w_{mE}\, dv \\ &= \frac{1}{2} \int BH_L\, dv + \frac{1}{2} \int BH_E\, dv \end{aligned}$$

B und H sind im Eisen und im Luftspalt über die Länge konstant

$$W = \frac{1}{2}(lABH_E + 2xABH_L)$$

$H_L = \mu_r H_E$

$$\begin{aligned}
W_m(I,x) &= \frac{1}{2}ABH_E(l + 2\mu_r x) \\
&= \frac{1}{2}A\mu_0\mu_r(NI)^2\frac{l + 2\mu_r x}{(l + 2\mu_r x)^2} \\
&= \frac{1}{2}A\mu_0\mu_r(NI)^2\frac{1}{l + 2\mu_r x}
\end{aligned}$$

Nun noch $W_m(\phi, x)$ für gleichbleibenden Fluss und variablen Abstand.

$$\begin{aligned}
W_m(\phi,x) &= \frac{1}{2}ABH_E(l + 2\mu_r x) \\
&= \frac{1}{2}AB\frac{B}{\mu_0\mu_r}(l + 2\mu_r x) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\phi^2}{A\mu_0\mu_r}(l + 2\mu_r x)
\end{aligned}$$

Vergleicht man diese beiden Darstellungen der Energie miteinander, stellt man fest, dass die magnetische Energie $W_m(I,x)$ bei konstantem Strom mit steigendem x abnimmt. In diesem Fall wird von den Quellen (Batterie) gefordert, dass die Ströme konstant gehalten werden, entweder durch Energieabgabe in das System, oder durch Energieaufnahme aus dem System.

$W_m(\phi, x)$ beschreibt hingegen den Fall, bei dem die Quellen nicht gegen eine Änderung des Flusses, bzw. eine dadurch induzierte Spannung arbeiten müssen. In diesem Fall findet kein Energieaustausch mit den Quellen statt. Die magnetische Energie $W_m(\phi, x)$ hingegen nimmt mit zunehmendem Abstand zu.

Der zweite Fall ist der einfachere. Hier werden die Quellen nicht betrachtet und die Energiebilanz ist nur durch die im Magnetfeld gespeicherte Energie und die zugeführte mechanische Energie $W_{mech} = \int \vec{F}d\vec{s}$ gegeben. Da die Masse angezogen wird, muss bei einer Vergrößerung des Abstandes gegen die Kraft des Elektromagneten gearbeitet werden. Dem System wird also Energie zugeführt. Dies schlägt sich in einer Erhöhung der magnetischen Energie nieder.
Diese Kraft wollen wir nun ausrechnen.

c) Bei konstantem Strom:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\partial W}{\partial x} \\
&= \frac{1}{2}A\mu_0\mu_r(NI)^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{l + 2\mu_r x} \\
&= -A\mu_0\mu_r^2(NI)^2\frac{1}{(l + 2\mu_r x)^2}
\end{aligned}$$

Bei konstantem Fluss

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\frac{\phi^2}{A\mu_0\mu_r}(l+2\mu_r x) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\phi^2}{A\mu_0\mu_r}2\mu_r \\ &= -\frac{\phi^2}{A\mu_0\mu_r}\mu_r \end{aligned}$$

Nach Ersetzen des Flusses durch das Feld ergibt sich wieder

$$= -A\mu_0\mu_r^2(NI)^2\frac{1}{(l+2\mu_r x)^2}$$

D.h. die Kraft ist - wie zu erwarten war - negativ, also entgegen der Richtung des Abstandes x. Für eine vorliegende Situation ist die Kraft natürlich die gleiche, egal wie sie ausgerechnet wird. In einem gewählten Arbeitspunkt von I, bzw. dem dazugehörenden ϕ gibt es natürlich nur die Kraft in eine Richtung.

Im Falle $W_m(\phi, x)$ ist dies einfach zu verstehen. (s.o.) Für den Fall $W_m(I, x)$ wird durch die verrichtete Arbeit Energie in das System gesteckt und zusätzlich nimmt die magnetische Energie ab. Das bedeutet, dass die Quellen die überschüssige Energie aufnehmen.

Verwirrend? Stellt man es sich so vor, dass bei $W_m(I, x)$ die magnetische Energie mit abnehmendem Abstand zunimmt, und zusätzlich mechanische Energie frei wird, dann ist es klar, dass die Quellen sowohl für die zunehmende magnetisiche Energie aufkommen müssen, als auch für das Beschleunigen der Last.

Zusatz:
Für nicht zu kleine x kann folgende Näherung gemacht werden: $l \ll 2\mu_r x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F &= A\mu_0\mu_r^2(NI)^2\frac{1}{4\mu_r^2 x^2} \\ &= \frac{1}{4}A\mu_0(NI)^2\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Kraft ist proportional zu $\frac{1}{x^2}$
Zu diesem Ergebnis kommt man auch, wenn man annimmt, dass der Großteil der Energie im Luftspalt ist. (Dort ist das $\vec{H}$-Feld umd den Faktor μ_r größer.)

Für sehr kleine x: $2\mu_r d \ll l$

$$\Rightarrow F = A\mu_0\mu_r(NI)^2\frac{1}{l^2}$$

Die Kraft ist konstant.

23. Aufgabe

a) Das Gesetz von Biot-Savart für Linienleiter ist

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi}\int\frac{d\vec{s'} \times (\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$

$$\vec{r}' = a\vec{e}_R + d\vec{e}_z, \quad \vec{r} = z\vec{e}_z, \quad d\vec{s}' = ad\varphi' e_\varphi$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -a\vec{e}_R + (z-d)\vec{e}_z$$
$$d\vec{s}' \times \vec{r} - \vec{r}' = a^2 d\varphi \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_{z1}(z) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\varphi \vec{e}_z}{(a^2 + (z-d)^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 a^2 I}{(a^2 + (z-d)^2)^{3/2}}$$

b) Das Feld der zweiten Spule folgt aus dem der ersten durch Einsetzen von $-d$ anstelle von d.

$$\vec{B}_2(z) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 a^2 I}{(a^2 + (z+d)^2)^{3/2}}$$

Das Gesamtfeld lautet

$$\vec{B}_z(z) = \vec{B}_{z1}(z) + \vec{B}_{z2}(z) = \frac{\mu_0 a^2 I}{2} \left\{ \frac{1}{(a^2 + (z+d)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \right\}$$

c) Die erste Ableitung ergibt

$$\frac{\partial}{\partial z} B_z = -\frac{3\mu_0 a^2 I}{2} \left\{ \frac{z-d}{(a^2 + (z-d)^2)^{5/2}} + \frac{z+d}{(a^2 + (z+d)^2)^{5/2}} \right\}$$

Diese Ableitung wird Null für $z = 0$. (Dies war auch klar, weil das Problem symmetrisch zur x-y-Achse ist und deshalb dort zumindest ein lokales Extremum besitzen kann. Damit ist auch klar, dass alle ungeraden Ableitungen null sind.)

d) Die zweite Ableitung und gleich $z = 0$ eingesetzt:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} B_z = -\frac{3\mu_0 a^2 I}{2} \left\{ \frac{[a^2 + d^2]^{5/2} - \frac{5}{2}(-d)^2 [a^2 + d^2]^{3/2} 2}{(a^2 + (-d)^2)^5} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \frac{[a^2 + d^2]^{5/2} - \frac{5}{2}(+d)^2 [a^2 + d^2]^{3/2} 2}{(a^2 + (+d)^2)^5} \right\}$$
$$= -\frac{3\mu_0 a^2 I}{2} [a^2 + d^2]^{3/2} \left\{ \frac{[a^2 + d^2] - 5d^2}{(a^2 + (-d)^2)^5} + \frac{[a^2 + d^2] - 5d^2}{(a^2 + (+d)^2)^5} \right\}$$

Dieser Term wird null, wenn $[a^2 + d^2] - 5d^2 = 0$ wird. Also bei $d = \frac{1}{2}a$.

Mit diesem Wert ist auch die zweite Ableitung null. Damit sind also die ersten drei Ableitungen null und das Feld ist damit sehr homogen um den Ursprung.

Zusatzaufgabe

a) $\vec{j}$ hat nur eine z-Komponente. $\Rightarrow \vec{A} = A_z\,\vec{e}_z$. Berechnung mit dem "Coulomb"-Integral

$$A_z(r) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{j_z(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv'$$

$\vec{r}'$ liegt immer auf der z-Achse $\Rightarrow x' = 0, y' = 0; j_z(\vec{r}') = I$

Mit

$$\begin{aligned}
A_z(x,y,z) &= \frac{\mu I}{4\pi} \int\limits_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}\,dz' \\
&= \frac{\mu I}{4\pi} \left[\ln(z'-z+\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{\mu I}{4\pi} \ln \frac{a-z+\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}}{-a-z+\sqrt{x^2+y^2+(a+z)^2}}
\end{aligned}$$

b) Mit dem Gesetz von Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dv'$$

Die einzelnen Terme des Integrals haben folgende Form: Die Stromdichte hat nur eine Komponente in z-Richtung

$$\vec{j}(\vec{r}') = j_z\,\vec{e}_z = I\,\vec{e}_z$$

$\vec{r}'$ liegt auf der z-Achse

$$\vec{r}' = z'\,\vec{e}_z$$

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}$$

$$dv' = dz'$$

Daraus ergibt sich folgende Form für das Integral

$$\vec{B}(x,y,z) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{I\,\vec{e}_z \times (x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + (z-z')\,\vec{e}_z)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}^3}\,dz'$$

Werden die Kreuzprodukte ausgerechnet ($\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y, \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x, \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0$). ergibt sich eine Summe aus zwei Integralen

$$\begin{aligned}
\vec{B}(x,y,z) =& \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}^3}\,dz'\,\vec{e}_y \\
&- \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}^3}\,dz'\,\vec{e}_x
\end{aligned}$$

Mit dem Hinweis aus der Aufgabe ergibt sich folgende Lösung

$$\begin{aligned}
\vec{B}(x,y,z) = \frac{\mu I}{4\pi} &\left(\frac{y(z-a)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{y(z+a)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}} \right) \vec{e}_x \\
-\frac{\mu I}{4\pi} &\left(\frac{x(z-a)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{x(z+a)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}} \right) \vec{e}_y
\end{aligned}$$

Im zweiten Teil wird $\vec{B}$ durch Bildung der Rotation berechnet

$$\begin{aligned}\vec{B} &= rot\,\vec{A}\\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z\end{aligned}$$

Da $\vec{A}$ nur eine z-Komponente besitzt vereinfacht sich die Rotation mit

$$\begin{aligned}C &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}\\ D &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}\end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned}B_x =& \frac{\partial A_z}{\partial y}\\ =& \frac{\mu I}{4\pi}\left[\frac{y}{(-(z-a)+C)C} - \frac{y}{(-(z+a)+D)D}\right]\\ & \text{erweitern mit dem dritten Binom}\\ =& \frac{\mu I}{4\pi}\left[\frac{y}{C}\left(\frac{1}{-(z-a)+C}\right)\left(\frac{(z-a)+C}{(z-a)+C}\right) - \frac{y}{D}\left(\frac{1}{-(z+a)+D}\right)\left(\frac{(z+a)+D}{(z+a)+D}\right)\right]\\ =& \frac{\mu I}{4\pi}\left[\frac{y}{C}\left(\frac{(z-a)+C}{C^2-(z-a)^2}\right) - \frac{y}{D}\left(\frac{(z+a)+D}{D^2-(z+a)^2}\right)\right]\\ =& \frac{\mu I}{4\pi}\left[\frac{y}{C}\left(\frac{(z-a)+C}{x^2+y^2}\right) - \frac{y}{D}\left(\frac{(z+a)+D}{x^2+y^2}\right)\right]\\ =& \frac{\mu I}{4\pi}\left[\frac{y}{C}\left(\frac{z-a}{x^2+y^2} + \frac{C}{x^2+y^2}\right) - \frac{y}{D}\left(\frac{z+a}{x^2+y^2} + \frac{D}{x^2+y^2}\right)\right]\\ =& \frac{\mu I}{4\pi}\left[\frac{y}{C}\left(\frac{z-a}{x^2+y^2}\right) - \frac{y}{D}\left(\frac{z+a}{x^2+y^2}\right)\right]\\ =& \frac{\mu I}{4\pi}\left[\frac{y(z-a)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{y(z+a)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_y =& -\frac{\partial A_z}{\partial x}\\ =& -\frac{\mu I}{4\pi}\left(\frac{x(z-a)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{x(z+a)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right)\end{aligned}$$

c) Für große a kann man z gegenüber a vernachlässigen. Sowohl der Zähler $(z-a)$ als auch der Nenner $(\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2})$ steigen linear mit a an und können deshalb gekürzt werden. Der Grenzübergang $a \to \infty$ für das $\vec{B}$-Feld ergibt

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi}\left(-2\frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{e}_x + 2\frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{e}_y\right)$$

Mit dem Durchflutungsgesetz

$$\begin{aligned}\oint \vec{H}\,d\vec{s} &= I\\ 2\pi\, H_\varphi(R)\, R &= I\\ \vec{B} &= \frac{\mu I}{2\pi R}\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Umformung in kart. Koordinaten

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_y \end{aligned}$$

d) Das B-Feld hat nur eine φ-Komponente. Das Vektorpotential $\vec{A}$ lässt sich deshalb aus

$$rot A_z = -\frac{\partial A_z}{\partial R}\vec{e}_\varphi$$

zu

$$\begin{aligned} A_z &= -\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{R}{R_0} \text{ (in Zylinderkoord.)} \\ A_z &= -\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = -\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{x^2+y^2}{x_0^2+y_0^2} \text{ (in kart. Koord.)} \end{aligned}$$

Die Grenzwertbetrachtung mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil a) ist etwas komplizierter.

$$\begin{aligned} \lim_{a\to\infty}\frac{\mu I}{4\pi}\ln\frac{a-z+\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}}{-a-z+\sqrt{x^2+y^2+(a+z)^2}} &= \lim_{a\to\infty}\frac{a+|a|\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}}{-a+|a|\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}} \\ &= \lim_{a\to\infty}\frac{a+a\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}}{-a+a\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}} \\ &= \lim_{a\to\infty}\frac{2a}{-a+a\left(1+\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{a^2}\cdots\right)} \\ &= \ln\frac{4a^2}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Der Zähler steigt linear mit $2a$. Der Nenner geht jedoch gegen null. Um dennoch einen aussagekräftigen Wert für den Zusammenhang zwischen x^2+y^2 und a angeben zu können, wurde die Wurzel in eine Reihe entwickelt.
Mit beliebigen Werten x_0 und y_0 ist das Vektorpotential

$$A_z = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{4a^2}{x^2+y^2} = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{4a^2}{x_0^2+y_0^2} - \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{x^2+y^2}{x_0^2+y_0^2}$$

Somit ist das Vektorpotential bis auf eine sehr große, trotzdem jedoch unerhebliche Konstante in diesem Fall

$$A_z = -\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{x^2+y^2}{x_0^2+y_0^2}$$