Felder und Wellen

WS 2010/2011

Musterlösung zur 10. Übung

24. Aufgabe

a) Berechnung des Magnetfeldes mit dem Durchflutungsgesetz

$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = \int \vec{j}\, d\vec{f} = I$$

$$\vec{H} = H_\varphi(R)\, \vec{e}_\varphi$$

wg. Zylindersymmetrie

$$2\pi R H_\varphi(R) = I$$
$$H_\varphi(R) = \frac{I}{2\pi R}$$
$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi R}\, \vec{e}_\varphi$$

Koordinatenursprung der Zylinderkoordinaten wird im Draht 2 gewählt.
Für $\varphi = 0$ gilt:

$$\vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi R}\, \vec{e}_\varphi$$
$$\vec{H}_1 = \frac{-I}{2\pi(R+a)}\, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+a}\right)\, \vec{e}_\varphi$$

Fluss durch Leiterschleife

$$\begin{aligned}
\phi &= d \cdot \int\limits_b^{b+d} \frac{\mu I}{2\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+a}\right) dR \\
&= d \cdot \frac{\mu I}{2\pi}\left[\ln\ R - \ln\ (R+a)\right]_b^{b+d} \\
&= d \cdot \frac{\mu I}{2\pi} \underbrace{\left(\ln(b+d) - \ln(b+d+a) - \ln b + \ln(b+a)\right)}_{C_1}
\end{aligned}$$

b)

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\mu I_0 d\ \sin\omega t}{2\pi}\,C_1$$
$$= \frac{\mu I_0 d\omega}{2\pi}\ \cos\omega t\ C_1$$

$$U = -\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$I = \frac{U}{R_0} = -\frac{\mu I_0 d\omega}{2\pi R_0}\ \cos\omega t\ C_1$$

c) Die Leiterschleife befindet sich in gleichförmiger Bewegung $b = vt$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\mu I_0 d\ \sin\omega t}{2\pi}\,C_1\\ &= \frac{\mu I_0 d}{2\pi}\left(C_1\frac{\partial}{\partial t}\sin\omega t + \sin\omega t\frac{\partial}{\partial t}C_1\right)\\ &= \frac{\mu I_0 d}{2\pi}\left(C_1\ \omega\ \cos\omega t\ + v\ \sin\omega t\left(\frac{1}{b+d} - \frac{1}{b+d+a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b+a}\right)\right)\end{aligned}$$

25. Aufgabe

Zur Lösung der Aufgabe muss zunächst das Magnetfeld berechnet werden, um dann über die Feldenergie die Selbsinduktion zu berechnen ($W_m = \frac{1}{2}LI^2$)

$$\oint \vec{H}\ d\vec{s} = \int \vec{J}\ d\vec{f}$$

Aus der Symmetrie ergibt sich:

$$\vec{H} = H\varphi(R)\ \vec{e}_\varphi \Longrightarrow \oint \vec{H}\ d\vec{s} = 2\pi R\ H_\varphi(R)$$
$$\vec{J} = J_z\ \vec{e}_z$$

$R < a$: Der Strom verteilt sich gleichmäßig über die Leiterfläche:

$$J_z = \frac{I}{\pi a^2}$$

$$\begin{aligned}\int \vec{J}\ d\vec{f} &= \int_0^R \frac{I}{\pi a^2} 2\pi R'\ dR'\\ &= \frac{I}{a^2}\left[R'^2\right]_0^R\\ &= \frac{IR^2}{a^2}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow H\varphi(R) = \frac{IR}{2\pi a^2}$$

Energiedichte und Feldenergie

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B} = \frac{1}{2}\mu \left|\vec{H}\right|^2 \\ &= \frac{\mu}{2}\left(\frac{IR}{2\pi a^2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$W_m = \int w_m \; dv$$

Da die Feldenergie unendlich groß würde, wird hier auf die Leiterlänge bezogen gerechnet:

$$\begin{aligned} \frac{W_{m1}}{l} &= \frac{1}{l}\int w_m \; dv \\ &= \int_0^a w_m \; 2\pi R' \; dR' \\ &= \frac{\mu I^2}{4\pi a^4}\int_0^a R'^3 dR' \\ &= \frac{\mu I^2}{16\pi a^4}\left[R'^4\right]_0^a \\ &= \frac{\mu I^2}{16\pi} = \frac{1}{2}\frac{\mu}{8\pi}I^2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{L_1}{l} = \frac{\mu}{8\pi}$$

$a \leq R < b$:

$$\begin{aligned} J_z &= 0 \\ \int \vec{J}\, d\vec{f} &= I \\ \Longrightarrow H\varphi(R) &= \frac{I}{2\pi R} \end{aligned}$$

$$w_m = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 R^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{W_{m2}}{l} &= \frac{1}{l}\int w_m \; dv \\ &= \int_a^b w_m \; 2\pi R' \; dR' \\ &= \frac{\mu I^2}{4\pi}\int_a^b \frac{1}{R'}dR' \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\; I^2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{L_2}{l} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$b \leq R < c:$

$$J_z = -I\left(\frac{1}{\pi c^2 - \pi b^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\int \vec{J}\, d\vec{f} &= I - \int_b^R \frac{I}{\pi\left(c^2 - b^2\right)} 2\pi R'\, dR' \\
&= I - \frac{I}{c^2 - b^2}\left[R'^2\right]_b^R \\
&= I\left(1 - \frac{R^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) = I\frac{c^2 - R^2}{c^2 - b^2}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow H\varphi(R) = \frac{I}{2\pi R}\frac{c^2 - R^2}{c^2 - b^2}$$

$$w_m = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 R^2}\left(\frac{c^2 - R^2}{c^2 - b^2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{W_{m3}}{l} &= \frac{1}{l}\int w_m\, dv \\
&= \int_b^c w_m\, 2\pi R'\, dR' \\
&= \frac{\mu I^2}{4\pi}\int_b^c \frac{1}{R'}\left(\frac{c^2 - R'^2}{c^2 - b^2}\right)^2 dR' \\
&= \frac{\mu I^2}{4\pi}\left(\frac{1}{c^2 - b^2}\right)^2 \int_b^c \frac{1}{R'}\left(c^4 - 2c^2R'^2 + R'^4\right) dR' \\
&= \frac{\mu I^2}{4\pi}\left(\frac{1}{c^2 - b^2}^2\right)\left[c^4 ln R' - c^2 R' + \frac{1}{4}R'^4\right]_b^c \\
&= \frac{\mu I^2}{4\pi}\left(\frac{1}{c^2 - b^2}\right)^2\left[c^4 ln\frac{c}{b} - c^2c^2 + c^2b^2 + \frac{1}{4}c^4 - \frac{1}{4}b^4\right] \\
&= \frac{\mu I^2}{4\pi}\left(\frac{1}{c^2 - b^2}\right)^2\left[c^4 ln\frac{c}{b} + c^2b^2 - \frac{3}{4}c^4 - \frac{1}{4}b^4\right]
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{L_3}{l} = \frac{\mu}{2\pi}\left(\frac{1}{c^2 - b^2}\right)^2\left[c^4 ln\frac{c}{b} + c^2b^2 - \frac{3}{4}c^4 - \frac{1}{4}b^4\right]$$

$c \leq R:$ Innerer und äußerer Strom heben sich auf. Daher ist außen kein Feld vorhanden.

$$\Longrightarrow \frac{L}{l} = \frac{L_1}{l} + \frac{L_2}{l} + \frac{L_3}{l}$$

26. Aufgabe

a) Mit dem Durchflutungsgesetz $\oint \vec{H}\, d\vec{s} = I$ ergibt sich leicht:

$$H_a l = nI_a$$
$$H_b l = mI_b$$

Der selbstinduzierte magnetische Fluss in der Primärspule ist:

$$\Phi_{aa} = \mu_0\, H_a\, A_a = \mu_0\, H_a\, \pi R_a^2$$

Daraus folgt:

$$\Phi_{aa} = \mu_0\, H_a\, \pi R_a^2 = \mu_0\, \frac{n}{l}\, I_a\, \pi R_a^2$$
$$\Rightarrow L_{aa} = n\Phi_{aa}/I_a = \mu_0\, \frac{n^2}{l}\, \pi R_a^2$$

Ebenso lassen sich die anderen Induktionskoeffizienten Berechnen.

$$\Phi_{bb} = \mu_0\, H_b\, A_b\; = \mu_0\, H_b\, \pi R_b^2$$
$$\Phi_{ab} = \mu_0\, H_b\, A_b\; = \mu_0\, H_b\, \pi R_b^2$$
$$\Phi_{ba} = \mu_0\, H_a\, A_b\; = \mu_0\, H_a\, \pi R_b^2$$

Es ist zu beachten, dass sowohl bei Φ_{ab} als auch bei Φ_{ba} der kleinere Radius angesetzt werden muss.

Und weiter:

$$L_{bb} = \mu_0\, \frac{m^2}{l}\, \pi R_b^2$$
$$L_{ab} = \mu_0\, \frac{nm}{l}\, \pi R_b^2$$
$$L_{ba} = \mu_0\, \frac{nm}{l}\, \pi R_b^2$$

b)

$$U_a = -L_{aa}\frac{dI_a}{dt} - L_{ab}\frac{dI_b}{dt}$$
$$U_b = -L_{bb}\frac{dI_b}{dt} - L_{ab}\frac{dI_a}{dt}$$

$I_b = 0$ bei unbelasteter Spule.

$$U_a = -L_{aa}\frac{dI_a}{dt}$$
$$U_b = -L_{ab}\frac{dI_a}{dt}$$

Setzt man die Gleichungen ineinander ein, erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{U_a}{L_{aa}} &= \frac{U_b}{L_{ab}}\\ U_a &= \frac{L_{aa}}{L_{ab}}U_b\\ U_a &= \frac{nR_a^2}{mR_b^2}U_b\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}U_a &= -L_{aa}\dot{I}_a - L_{ab}\dot{I}_b\\ U_b &= -L_{bb}\dot{I}_b - L_{ab}\dot{I}_a\end{aligned}$$

Löst man die letzte Zeile nach $\dot{I}_a$ auf:

$$\dot{I}_a = -\frac{L_{bb}\dot{I}_b + U_b}{L_{ab}}$$

$$\begin{aligned}U_a &= \frac{U_b + L_{bb}\dot{I}_b}{L_{ab}}L_{aa} - L_{ab}\dot{I}_b\\ U_a &= \frac{L_{aa}}{L_{ab}}U_b + \frac{L_{bb}L_{aa} - L_{ab}^2}{L_{ab}}\dot{I}_b\\ U_a &= \frac{nR_a^2}{mR_b^2}U_b + \frac{m^2R_b^2n^2R_a^2 - n^2m^2R_b^4}{nmR_b^2}\dot{I}_b\end{aligned}$$

für $R_a = R_b$ verschwindet der letzte Term:

$$U_a = \frac{n}{m}U_b$$

oder

$$\frac{U_a}{U_b} = \frac{n}{m}$$

Bei einem idealen Transformator ohne Streuverlusste verhalten sich die Spannungen wie das Verhältnis der Windungszahl.