Felder und Wellen Übung 12 — 24.01.2011

Einleitung: Wellen in leitfähigen Medien

letzte Übung: Wellen in Medien mit $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$

dann: $\text{rot}\, \vec{H} = \underbrace{\vec{j}}_{=0} + \frac{d\vec{D}}{dt} \Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$ Wellengleichung

$\uparrow$ $\text{rot}\, \vec{B} = -\frac{d\vec{E}}{dt}$

Ansatz für ebene harmonische Welle:

$\vec{E} = E_0\, e^{j(\omega t - kz)}\, \vec{e}_y$ löst die Wellengleichung

mit $k = \frac{\omega}{c}$ $\quad c^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon}$ $\quad$ (k reell)

Jetzt: $\kappa > 0$ (Leitfähigkeit vorhanden)

$\Rightarrow$ $\vec{E}$-Feld der Welle erzeugt Stromdichte $\vec{j}$

zusätzlicher Term

dann: $\text{rot}\, \vec{H} = \underbrace{\vec{j}}_{\neq 0} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} = \kappa\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$

Telegraphengleichung

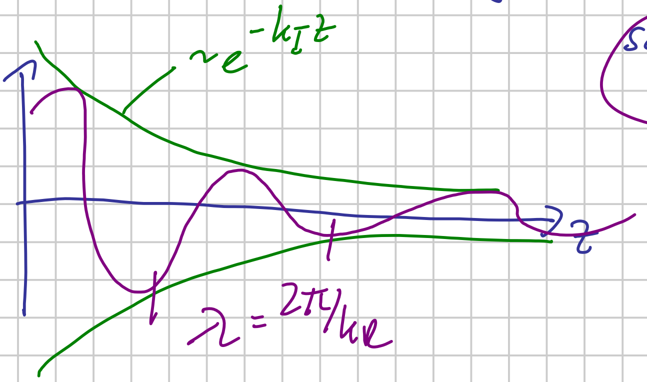
Gleicher Ansatz für ebene harmonische Welle:

$\vec{E} = E_0\, e^{j(\omega t - kz)}\, \vec{e}_y$ löst auch die Telegraphengleichung,

aber mit $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu\left(1 - j\left(\frac{\kappa}{\varepsilon\omega}\right)\right)}$ komplexe Wellenzahl k!

$= k_R - j k_I$

$$\vec{E} = E_0 \cdot e^{j(\omega t - (k_R - jk_I) z)}\, \vec{e}_y = E_0\, \underbrace{e^{j(\omega t - k_R z)}}_{\text{schwingender Anteil}}\, \underbrace{e^{-k_I z}}_{\text{dämpfender Anteil}}\, \vec{e}_y$$



A2 g)

geg: $\vec{H} = A \cdot e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \sin\vartheta \, \vec{e}_\varphi$

ist das eine ebene Welle? nein, da die Ableitungen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung nicht 0 sind.

ist das eine harmonische Welle?

Ja, da $\vec{H} = A \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{harmonische Zeitabhängigkeit}} \cdot \vec{H}(\vec{r})$

a) ges. $\vec{E}$ aus $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Ansatz: $\vec{E} = \underbrace{\vec{E}(\vec{r})}_{\text{Ortsabhängigkeit}} e^{j\omega t}$ $\Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E}$ $\qquad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega\varepsilon\vec{E}$ rechte Seite

linke Seite

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(H_\varphi \sin\vartheta) - \cancel{\frac{\partial H_\vartheta}{\partial\varphi}}\right]$$
$$+ \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\cancel{\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}} - \frac{\partial}{\partial r} r H_\varphi\right]$$
$$+ \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial r}(r H_\vartheta)} - \cancel{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(H_r)}\right]$$

$\vec{H}$ hat nur eine φ-Komponente

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}(H_\varphi \sin\vartheta) = \ldots = A \cdot e^{j(\omega t - kr)}\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) 2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$\frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} = \ldots = \underline{A \sin\vartheta \, e^{j(\omega t - kr)}\left(k^2 - \frac{jk}{r} - \frac{1}{r^2}\right)}$$

Einsetzen und gleichsetzen:

$$\vec{e}_r \frac{1}{r\cancel{\sin\vartheta}} \cdot A \cdot e^{j(\omega t - kr)}\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \cdot 2\cancel{\sin\vartheta}\cos\vartheta$$
$$+ \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}(+A)\sin\vartheta \, e^{j(\omega t - kr)}\left(k^2 - \frac{jk}{r} - \frac{1}{r^2}\right) = \underline{j\omega\varepsilon\vec{E}} \quad \Big| : j\omega\varepsilon$$

$$\vec{E} = \frac{A}{\omega\varepsilon} \underbrace{e^{j(\omega t - kr)}}_{\text{harmonische Zeitabhängigkeit}} \underbrace{\left(\vec{e}_r\left(\frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3}\right) 2\cos\vartheta + \vec{e}_\vartheta\left(\frac{jk^2}{r} + \frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3}\right)\sin\vartheta\right)}_{\text{Ortsabhängigkeit}}$$

$\vec{r}$- und ϑ-Komponente

b) ges: $\vec{H}$ und $\vec{E}$ für große r

$$r \text{ groß} \Rightarrow \frac{1}{r} \gg \frac{1}{r^2} \gg \frac{1}{r^3}$$

$$\vec{H} \approx A e^{j(\omega t - kr)} \cdot \left(\frac{jk}{r} + \cancel{\frac{1}{r^2}}\right) \sin\vartheta \, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E} \approx \frac{A}{j\omega\varepsilon} e^{j(\omega t - kr)} \left[\underline{\vec{e}_r \left(\cancel{\frac{k}{r^2}} - \cancel{\frac{j}{r^3}}\right) 2\cos\vartheta} + \underline{\vec{e}_\vartheta \left(\frac{jk^2}{r} + \cancel{\frac{k}{r^2}} - \cancel{\frac{j}{r^3}}\right)} \sin\vartheta\right]$$

$$= \frac{A}{\omega\varepsilon} e^{j(\omega t - kr)} \cdot \frac{jk^2}{r} \sin\vartheta \, \vec{e}_\vartheta$$

die ϑ-Komponente überwiegt!

Es gilt $k = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \Rightarrow \vec{E} = \underbrace{\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\varepsilon}}_{=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \underbrace{A e^{j(\omega t - kr)} \frac{jk}{r} \sin\vartheta}_{H_\varphi} \vec{e}_\vartheta$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_\varphi \vec{e}_\vartheta$$

ges: Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$

$$\vec{H}^* = A e^{-j(\omega t - kr)} \cdot \frac{-jk}{r} \sin\vartheta \, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* = E_\vartheta \cdot H_\varphi^* \cdot \underbrace{(\vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi)}_{=\vec{e}_r} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A \cdot \cancel{e^{j(\omega t - kr)}} \frac{jk}{r} \sin\vartheta \cdot A \cancel{e^{-j(\omega t - kr)}} \frac{-jk}{r} \sin\vartheta \cdot \vec{e}_r$$

$j \cdot (-j) = +1$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{A^2 k^2}{r^2} \sin^2\vartheta \, \vec{e}_r$$

ges: abgestrahlte mittlere Leistung $\vec{S}_{avg} = \frac{1}{2}\vec{S}$
integriert über Kugeloberfläche

$$P = \iint \frac{1}{2}\vec{S} d\vec{f} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{A^2 k^2}{2\cancel{r^2}} \sin^2\vartheta \, \cancel{\vec{e}_r}}_{\frac{1}{2}\vec{S}} \cdot \underbrace{\cancel{r^2} \sin\vartheta \, \cancel{\vec{e}_r} \, d\vartheta \, d\varphi}_{d\vec{f}}$$

$$= \cancel{2}\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{A^2 k^2}{\cancel{2}} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} A^2 k^2 \pi \underbrace{\left[-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi}}_{-(-1-1)+\frac{1}{3}(-1-1)}$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = 4/3$$

$$= \pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, A^2 k^2 \cdot \frac{4}{3}$$

A30

$$\boxed{\vec{E}_0 = E_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_y}$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}, \quad \text{rot}\,\vec{E}_0 = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e}_x + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e}_z}_{=0}$$

$$= -E_0(-jk_0)e^{j(\omega t - k_0 z)}\vec{e}_x$$

Ansatz: $\vec{H} = H_0 e^{j(\omega t - k_0 z)}\vec{e}_x$

$$\Rightarrow -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 (j\omega) H_0 e^{j(\omega t - k_0 z)} e_x$$

Gleichsetzen:

$$E_0 (jk) \cancel{e^{j(\omega t - k_0 z)}} \vec{e}_x = -\mu_0 (j\omega) H_0 \cancel{e^{j(\omega t - k_0 z)}} \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow H_0 = \frac{-k}{\mu_0 \omega} E_0 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_0$$

$$\vec{E}_r = E_r e^{j(\omega t + k_0 z)}\vec{e}_y$$

$$\text{rot}\,\vec{E}_r = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e}_x = -E_r(jk_0)e^{j(\omega t + k_0 z)}$$

Aus $\vec{H} = H_r e^{j(\omega t + k_0 z)}\vec{e}_x$:

$$-\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 H_r (j\omega) e^{j(\omega t - k_0 z)}\vec{e}_x$$

$$\cancel{-} E_r (jk_0) \cancel{e^{j(\dots)}} \cancel{\vec{e}_x} = \cancel{-}\mu_0 H_r (j\omega) \cancel{e^{j(\dots)}} \cancel{\vec{e}_x}$$

$$\Rightarrow H_r = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_r = + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}_{\Gamma} E_r$$

Transmittierte Welle (neu: $K \neq 0$)

$$\vec{E}_t = E_t e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_y \qquad \text{ges: } \vec{H}_t \text{ aus rot}\,\vec{E}_t = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial t}$$

Wellenwiderstand Γ_1

Ansatz: $\vec{H}_t = H_t e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_x$

$$-\vec{e}_x \frac{dE_y}{\partial z} = +\vec{e}_x \cdot (+\cancel{j}k) E_t e^{j(\omega t - kz)} = -\mu_0 H_t (\cancel{j}\omega) e^{j\cancel{(\omega t - kz)}}\vec{e}_x$$

$$E_t = \Gamma_1 \cdot H_t$$

$$E_t \cdot k = -\mu_0 H_t$$

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \left(1 - j\frac{K}{\varepsilon_0 \omega}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_t = -\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\left(1 - j\frac{K}{\varepsilon_0 \omega}\right)}}_{1/\text{Wellenwid. } 1/\Gamma_1} E_t}$$

b) Wellenwiderstand aus komplexem ε

laut Skript 9.4.2.1 folgt

$$\varepsilon_r = 1 - j\frac{K}{\varepsilon_0 \omega}$$

laut Aufgabe:

$$\Gamma_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 - j\varepsilon_0 \frac{K}{\varepsilon_0 \omega}}}$$

identisch

c) Grenzbedingungen: $E_{t1} = E_{t2}$, $H_{t1} = H_{t2}$

tangential

(1) $E_0 + E_r = E_t$ $\qquad H_0 + H_r = H_t$

transmittiert

$$(2) \quad -\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}_{1/\Gamma_0} E_0 + \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}_{1/\Gamma_0} E_r = -\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0\left(1 - j\frac{K}{\omega\varepsilon_0}\right)}{\mu_0}}}_{1/\Gamma_1} E_t$$

Wieder wie in A28: 2 Glgn (1) und (2) für 2 Unbekannte E_r, E_t

$$E_r = E_0 \left(\frac{\Gamma_1 - \Gamma_0}{\Gamma_1 + \Gamma_0}\right), \quad E_t = E_0 \frac{2\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_0}$$

$$\Rightarrow H_r = \frac{E_0}{\Gamma_0}\left(\ldots " \right), \quad H_t = E_0 \frac{2}{\Gamma_1 + \Gamma_0}$$

$$\vec{E}_t = E_t e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y, \quad \vec{H}_t = H_t e^{j(\omega t - kz)} = -\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\left(1 - j\frac{K}{\omega\varepsilon_0}\right)}}_{\text{komplexe Zahl}, = r\cdot e^{j\varphi}} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

$$= -r e^{j(\omega t + \varphi - kz)}$$

$\mathrm{Re}\{E_t\} = E_t \cos(\omega t - kz) \qquad \mathrm{Re}\{H_t\} = -r\cos(\omega t + \varphi - kz)$

$\vec{E}$ und $\vec{H}$ sind um φ phasenverschoben

$$\varphi = \angle \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}(1 - \ldots)} = \ldots = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{K}{\varepsilon_0 \omega}\right)$$

Laut Aufgabe: $K \gg \varepsilon\omega \Rightarrow \varphi \approx \frac{1}{2} \cdot \pi/2 = \pi/4 \approx 45°$