F&W Übung 1

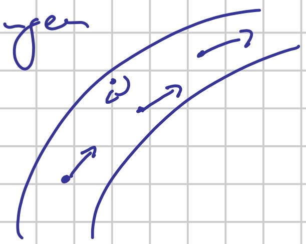
Skalarfelder: ordnen jedem Punkt im Raum einen skalaren Wert zu

Bsp: Temperatur, el. Potential

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, in F&W meist $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Vektorfelder: ordnen jedem Punkt im Raum einen Vektor zu

Bsp: Strömungen



$\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, F&W: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Partielle Ableitung: geg: Skalarfeld $\Phi(x,y,z)$

PA: $\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x,y,z)$, $\frac{\partial}{\partial y} \Phi$, $\frac{\partial}{\partial z} \Phi$

Differentialoperatoren:

Gradient: f sei ein Skalarfeld $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

dann $\operatorname{grad}(f) := \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix}$ ← Vektorfeld

L Richtung: steilster Anstieg

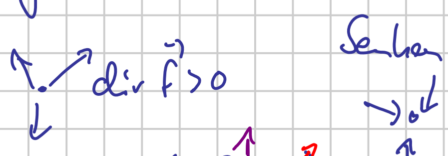
Stärke: Änderungsrate

Divergenz: $\vec{f}$ sei ein Vektorfeld, $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\left(\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}\right)$

dann $\operatorname{div} \vec{f} := \underbrace{\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}}$

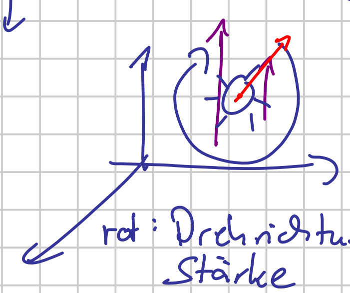
Skalarfeld: gibt an, wie viel „Strömung" im jeweiligen Punkt entsteht/endet

Quellen $\operatorname{div} \vec{f} > 0$ Senken



Rotation: $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\operatorname{rot} \vec{f} := \begin{pmatrix} \partial f_z/\partial y - \partial f_y/\partial z \\ \partial f_x/\partial z - \partial f_z/\partial x \\ \partial f_y/\partial x - \partial f_x/\partial y \end{pmatrix}$



rot: Drehrichtung und Stärke

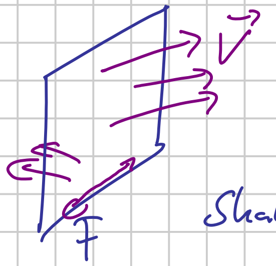
Flächenintegrale über Vektorfelder

$$\iint_F \vec V \, d\vec f$$

$\vec V$: Vektorfeld

$d\vec f$: infinitesimales Flächenelement

Richtung: Normalenvektor von F am jeweiligen



„Wie viel $\vec V$ fließt durch F (in Summe)?"

Skalar, nur Anteil $\perp F$

$\oiint_F \vec V \, d\vec f$: Integral über geschlossene Fläche, z.B. Oberfläche einer Kugel K, $F = \partial K$

Volumenintegrale über Skalarfelder

$$\iiint_V A \, dV$$

A: Skalarfeld

dV: infinitesimales Volumenelement

„Wie viel A mal Volumen ist in V?"

$\boxed{A1}$ $\vec V = \frac{k}{3}\left(x\vec e_x + y\vec e_y + z\vec e_z\right) \quad \left(= \frac{k}{3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$

$\vec e_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

FdW-Schreibweise (empfehlenswert bes. bei Kugel- und Zylinderkoordinaten)

a) $\operatorname{div} \vec V = ?$

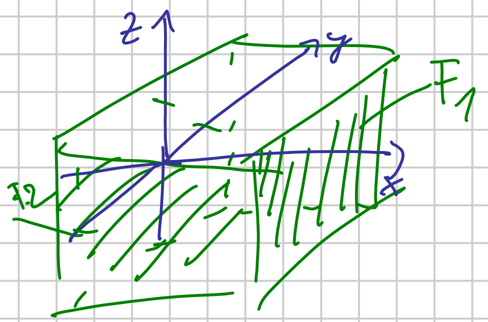
$$= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{3}x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{k}{3}y + \frac{\partial}{\partial z}\frac{k}{3}z$$

$$= \frac{k}{3} + \frac{k}{3} + \frac{k}{3} = \underline{k} \quad \text{(const.)}$$

b) $\oiint_{\partial W} \vec V \, d\vec f = ? \quad \iint_{F_1} \vec V \, d\vec f + \iint_{F_2} \vec V \, d\vec f + \iint_{F_3} \dots + \iint_{F_6}$

F_1: $x = a$; F_2: $y = -a$

∂W: Rand des Würfels W



F1: $x=a$: $\displaystyle\int_{z=-a}^{a}\int_{y=-a}^{a}\frac{k}{3}\left(a\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z\right)\vec{e}_x\,dy\,dz=\int_{z=-a}^{a}\int_{y=-a}^{a}\frac{k}{3}a\,dy\,dz$

$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x=1$ $\quad$ $\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x=0$ $\quad$ $=0$

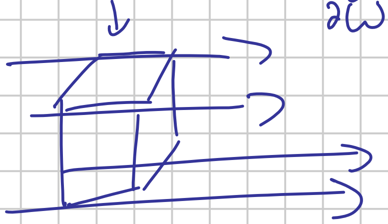
allg: $\displaystyle\int_a^b \underbrace{[\quad]}_{\text{nicht abh. von } x}\,dx=[\quad]\cdot(b-a)$

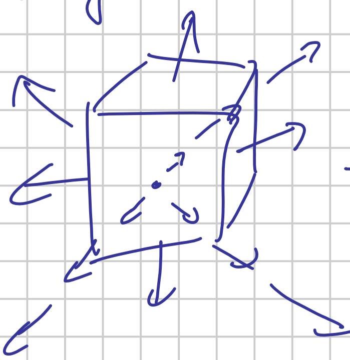
$$=\int_{z=-a}^{a}\frac{k}{3}a\cdot\underbrace{(a-(-a))}_{=2a}\,dz$$

$$=\frac{k}{3}a\cdot 2a\cdot 2a=4\frac{k}{3}a^3$$

F2: $y=-a$, $d\vec{f}=-\vec{e}_y\,dx\,dz$, $x=-a\,..\,a$, $z=-a\,..\,a$

Bei konstantem Feld wäre $\oint_{\partial W}\vec{V}\,d\vec{f}=0$: Es liegt aber ein Feld dieser Art vor:





- entweder jede Fläche einzeln berechnen
- oder wegen Symmetrie des Feldes: $\oint_{\partial W}\vec{V}\,d\vec{f}=6\cdot\frac{4}{3}ka^3$

$$\iint_{F2}\vec{V}\,d\vec{f}=\int_{z=-a}^{a}\int_{x=-a}^{a}\underbrace{\frac{k}{3}\left(x\vec{e}_x+\overset{y=-a}{y}\vec{e}_y+z\vec{e}_z\right)}_{\vec{V}}\underbrace{(-\vec{e}_y)\,dx\,dz}_{d\vec{f}}=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{k}{3}(-a)(-1)\,dx\,dz$$

$\vec{e}_y(-\vec{e}_y)=-1$

$$=\int_{-a}^{a}\frac{k}{3}a\cdot 2a\,dz=\frac{k}{3}a\cdot 2a\cdot 2a=\frac{4}{3}ka^3$$

$$\oint_{\partial W}\vec{V}\,d\vec{f}=6\cdot\frac{4}{3}ka^3=\underline{8ka^3}$$ (wegen Symmetrie des Feldes) oder nach Rechnen für $F_1\,..\,F_6$

c) $\displaystyle\iiint_W \underbrace{\operatorname{div}\vec{V}}_{=k}\,dv=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}k\,\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dv,\text{ s. FS}}=k\cdot 2a\cdot 2a\cdot 2a=\underline{8ka^3}$

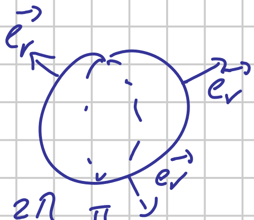
≙ Ergebnis von b)

A2 $\vec{V} = \frac{k}{3} r \vec{e_r}$ $\quad V_r = \frac{k}{3} r \quad V_\varphi = 0 \quad V_\vartheta = 0$

a) ges: $\underbrace{\operatorname{div} \vec{V}}_{FS} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \cancel{\frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(V_\vartheta \sin\vartheta\right)}_{=0} + \cancel{\frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}}_{=0}$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{k}{3} r\right) = \frac{1}{r^2}\frac{k}{3} \cdot 3r^2 = \underline{\underline{k}} \text{ const.}$$

b) ges: $\oint\!\!\oint_{\partial K} \vec{V}\, d\vec{f}$, $\underline{r = a}$, $d\vec{f} = \vec{e_r} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$, $\vartheta = 0..\pi$, $\varphi = 0..2\pi$



$$\oint\!\!\oint_{\partial K} V\, d\vec{f} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \underbrace{\frac{k}{3} a \vec{e_r}}_{\vec{V}} \cdot \underbrace{\vec{e_r}\, a^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{d\vec{f}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{k}{3} a^3 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$\vec{e_r} \cdot \vec{e_r} = 1$

$$= \frac{k}{3} a^3 \int_0^{2\pi} \underbrace{\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi}}_{-(-1)-(-1)=2} d\varphi = \frac{k}{3} a^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3} k a^3$$

c) $\iiint_K \underbrace{\operatorname{div} \vec{V}}_{=k} \underbrace{dv}_{s.\ FS} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \underbrace{\int_{r=0}^{a} k\, r^2 \sin\vartheta \, dr}_{k \sin\vartheta \int_0^a r^2 dr = k \sin\vartheta \frac{1}{3} a^3} d\vartheta \, d\varphi$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} k \cdot \frac{1}{3} a^3 \underbrace{\sin\vartheta \, d\vartheta}_{\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi} = 2} d\varphi = k \cdot \frac{1}{3} a^3 \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi}{3} k a^3$$

$\hat{=}$ Ergebnis von b)

$\boxed{A3}$ $\vec{v} = \frac{4}{3} R \vec{e}_R + 4\vec{e}_z$ in Zylinderkoord.

a) ges: $\operatorname{div}\vec{v} \underset{FS}{=} \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} \underbrace{R v_R}_{=R\frac{4}{3}} + \underbrace{\frac{1}{R}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}}_{\substack{=0 \\ \text{da } v_\varphi = 0}} + \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial z}}_{=0,\ \text{da } v_z \text{ const.}}$

$= 2 \cdot \frac{4}{3}$

b) ges: $\oint\!\!\oint_{\partial Z} \vec{v}\, d\vec{f} = \iint \vec{v}\, d\vec{f} + \iint \vec{v}\, d\vec{f} + \iint \vec{v}\, d\vec{f}$

Oberseite: $z = +l/2$, $d\vec{f} = \vec{e}_z\, R\, dR\, d\varphi$, $R = 0..a,\ \varphi = 0..2\pi$

Unterseite: $z = -l/2$, $d\vec{f} = -\vec{e}_z\, R\, dR\, d\varphi$

Mantelfläche: $R = a$, $d\vec{f} = \vec{e}_R\, R\, d\varphi\, dz$, $z = -l/2..l/2,\ \varphi = 0..2\pi$

$= \frac{4}{3} a^2 2\pi l$

c) $\iiint_Z \operatorname{div}\vec{v}\, dv = \iiint_Z \frac{2}{3} 4\, dv$

i) $dv \underset{FS}{=} R\, dR\, d\varphi\, dz,\ R = 0..a,\ \varphi = 0..2\pi,\ z = -l/2..l/2$

ii) $= \frac{2}{3} 4 \cdot \mathrm{Vol}(Z) = \frac{2}{3} 4\, \pi a^2 \cdot l \stackrel{!}{=}$ Erg. von b)