

Felder und Wellen

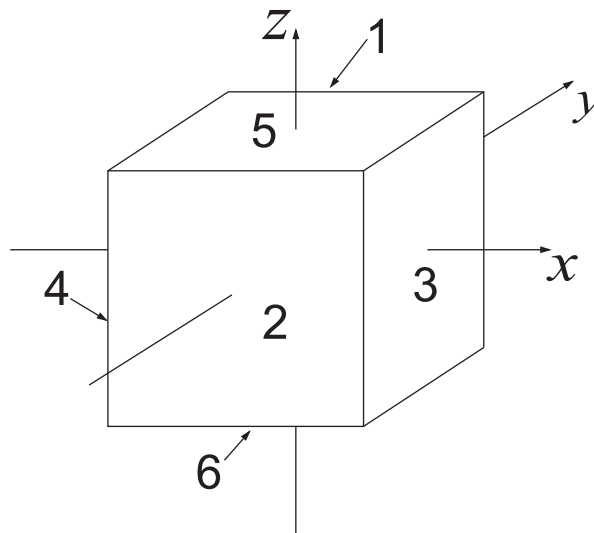
WS 2011/2012

Musterlösung zur 1. Übung

1. Aufgabe

a)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ &= \frac{k}{3} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) \\ &= \frac{k}{3} (1 + 1 + 1) \\ &= k \end{aligned}$$



b) Seite 1: $d\vec{f} = \vec{e}_y dx dz, y = a$

$$\begin{aligned}\int \vec{V} d\vec{f} &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{k}{3} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_y dx dz \\ &= \frac{k}{3} \int_{-a}^a \int_{-a}^a y \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y dx dz \\ &= \frac{k}{3} \int_{-a}^a y [z]_{-a}^a dx \\ &= \frac{k}{3} y 2a [x]_{-a}^a \\ &= \frac{k}{3} y 4a^2 \\ &= \frac{k}{3} 4a^3\end{aligned}$$

Seite 2: $d\vec{f} = -\vec{e}_y dx dz, y = -a$

$$\begin{aligned}\int \vec{V} d\vec{f} &= \frac{k}{3} \int_{-a}^a \int_{-a}^a y \vec{e}_y \cdot -\vec{e}_y dx dz \\ &= -\frac{k}{3} y 4a^2 \\ &= \frac{k}{3} 4a^3\end{aligned}$$

Die Flächenintegrale über die anderen Seiten werden analog berechnet und führen zum gleichen Ergebnis.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \oint \vec{V} d\vec{f} &= 6 \frac{k}{3} 4a^3 \\ &= 8ka^3\end{aligned}$$

c)

$$\operatorname{div} \vec{V} = k$$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a k dx dy dz &= k \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a \\ &= 8ka^3\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist gleich dem Flächenintegral von b)

2. Aufgabe

a)

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{V} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{k}{3} r \right) \quad \vec{V} \text{ hat nur eine } r\text{-Komponente} \\ &= \frac{k}{3r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \\ &= \frac{k}{3r^2} 3r^2 \\ &= k\end{aligned}$$

b) $d\vec{f} = \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi$

$$\begin{aligned} \oint \vec{V} d\vec{f} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{k}{3} r \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{4\pi k r^3}{3} \\ &= \frac{4\pi k a^3}{3} \end{aligned}$$

c) $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

$$\begin{aligned} \int \text{div } \vec{V} dv &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a k \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= k 4\pi \int_0^a r^2 dr \\ &= 4\pi k \frac{1}{3} [r^3]_0^a \\ &= \frac{4\pi k a^3}{3} \\ &= \text{Ergebnis von b)} \end{aligned}$$

3. Aufgabe

a) In Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{V} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R V_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} V_z \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{k}{3} R \right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} k}_{=0} \\ &= \frac{2}{3} k \end{aligned}$$

b) Die Integration des Feldes über die Zylinderoberfläche wird in die drei Bereiche Mantel, Vorderseite und Rückseite zerlegt. Es gilt:

$$\oint_{\text{Zylinder}} \vec{V} d\vec{F} = \int_{\text{Mantel}} \vec{V} d\vec{F} + \int_{\text{Vorderseite}} \vec{V} d\vec{F} + \int_{\text{Rückseite}} \vec{V} d\vec{F}$$

Mantel:

Der Normalenvektor der Manteloberfläche zeigt immer in $\vec{e}_R$ Richtung. Es gilt Zylinderkoordinaten:

$$d\vec{F} = R d\varphi dz \vec{e}_R$$

$$z = -l/2 \dots l/2$$

$$\varphi = 0 \dots 2\pi$$

$$R = a$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{Mantel}} \vec{V} d\vec{F} &= \int_{z=-l/2}^{l/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{V} R d\varphi dz \vec{e}_R \Big|_{R=a} \\
 &= \int_{z=-l/2}^{l/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{k}{3} R \vec{e}_R + k \vec{e}_z \right) R d\varphi dz \vec{e}_R \Big|_{R=a} \\
 &= \frac{k}{3} a^2 \int_{z=-l/2}^{l/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi dz \\
 &= \frac{k}{3} a^2 2\pi \int_{z=-l/2}^{l/2} dz \\
 &= \frac{k}{3} a^2 2\pi l = \underbrace{\frac{k}{3} a}_{\vec{e}_R \text{ Komponente des Feldes}} \underbrace{2\pi a l}_{\text{Manteloberfläche}}
 \end{aligned}$$

Da die $\vec{e}_R$ -Komponente des Feldes auf der Manteloberfläche konstant ist, kann das Integral auch direkt aus dem Produkt der $\vec{e}_R$ -Komponente des Feldes und der Manteloberfläche berechnet werden.

Vorder- und Rückseite:

Der Normalenvektor der Seiten muss immer aus dem Volumen herauszeigen. Daher zeigt er bei Vorderseite in die $-\vec{e}_z$ -Richtung und bei der Rückseite in die $+\vec{e}_z$ Richtung, wenn die z-Achse in die Zeichenebene hineingeht.

Es gilt in Zylinderkoordinaten:

$$d\vec{F} = R dR d\varphi (\pm \vec{e}_z)$$

$$z = -l/2 \text{ bzw. } l/2$$

$$\varphi = 0..2\pi$$

$$R = 0..a$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{Seiten}} \vec{V} d\vec{F} &= \int_{R=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{V} \Big|_{z=l/2} R d\varphi dR \vec{e}_z - \int_{R=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{V} \Big|_{z=-l/2} R d\varphi dR \vec{e}_z \\
 &= \int_{R=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\vec{V} \Big|_{z=l/2} - \vec{V} \Big|_{z=-l/2} \right) R d\varphi dR \vec{e}_z \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Zusammen:

$$\oint_{\text{Zylinder}} \vec{V} d\vec{F} = \frac{k}{3} a^2 2\pi l$$

c) In Zylinderkoordinaten:

$$dv = R dR d\varphi dz$$

$$R = 0..a$$

$$z = -l/2..l/2$$

$$\varphi = 0..2\pi$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{div} \vec{V} \, dv &= \int_{z=-l/2}^{l/2} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{R=0}^a \frac{2}{3} k \, R \, dR \, d\varphi \, dz \\ &= \int_{z=-l/2}^{l/2} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{2}{3} k \frac{a^2}{2} \, d\varphi \, dz \\ &= \int_{z=-l/2}^{l/2} \frac{k}{3} a^2 \, 2\pi \, dz \\ &= \frac{k}{3} a^2 \, 2\pi l\end{aligned}$$