Felder und Wellen Lösung 2, 28.10.2011

Wiederholung: Satz von Gauß: $\oint\!\!\!\oint \vec V \, d\vec f = \iiint \mathrm{div}\,\vec V \, dv$

Einleitung

wichtige Größen:

$\vec E$: elektrisches Feld $\quad \vec E := \frac{\vec F}{q}$

$\vec D$: el. Verschiebungsdichte $\quad \vec D = \varepsilon_0 \vec E + \vec P$ (allg.)

in isotropen Materialien $\vec D = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec E$

Dielektrizitätszahl des Materials

$\varepsilon_r = 1$ für Vakuum
$\varepsilon_r \approx 80$ für Wasser
$\varepsilon_r > 2000$ für spezielle Materialien

Q : Ladung

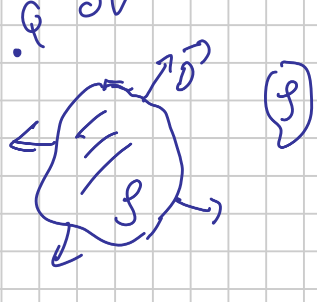
ρ : Raumladungsdichte $\quad Q = \iiint_V \rho \, dv$ („Ladung pro Volumen")

σ : Flächenladungsdichte $\quad Q = \iint_F \sigma \, df$ („Ladung pro Fläche")

Φ : elektrisches Potential : $-\int_{\vec p_1}^{\vec p_2} \vec E \, d\vec l = \Phi(\vec p_2) - \Phi(\vec p_1)$ (wegunabhängig)

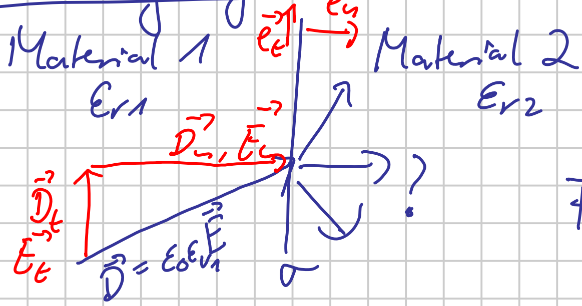
oft: $\Phi(\infty) = 0$ gesetzt, $\boxed{\text{Nur Pot.-Differenz hat Bedeutung}}$

Maxwell: $\boxed{\mathrm{div}\,\vec D = \rho}$ $\overset{\text{Satz von Gauß}}{\Longrightarrow}$ $\oint\!\!\!\oint_{\partial V} \vec D \, d\vec f = \underbrace{\iiint_V \rho \, dv}_{Q \text{ im Volumen } V}$



Fluss des Feldes durch Oberfläche ist nur abh. von ρ innerhalb!

Grenzübergänge



Vorgehen: Zerlegung in Normalanteil und Tangentialanteil

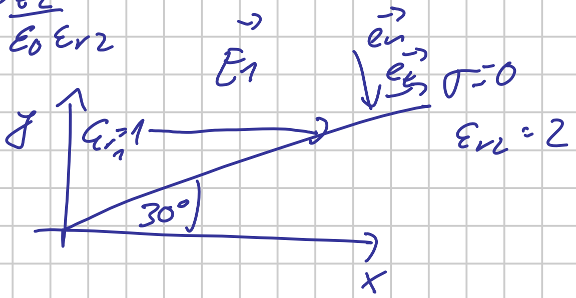
FS allg: $E_{t1} = E_{t2}$, $D_{n2} - D_{n1} = \sigma$

$E_{t1} = E_{t2}$ $\quad D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \xrightarrow{} $ (isotrop) $\quad D_{t2} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} D_{t1}$,

$\frac{D_{t1}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}$

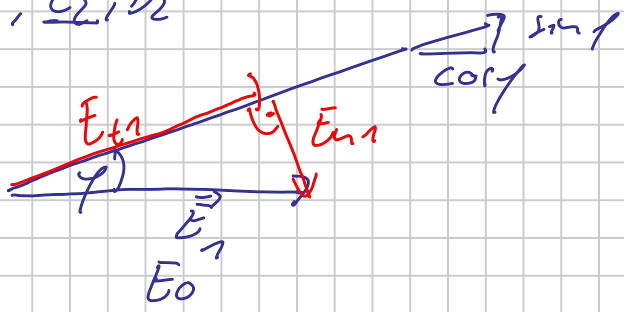
mit $\sigma = 0 \Rightarrow E_{n2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} E_{n1}$

A4



FS allg: $E_{t1} = E_{t2}$,
$D_{n2} - D_{n1} = \sigma$

geg: $\vec{E}_1 = E_0 \vec{e_x}$ $\qquad$ ges: $\underline{\vec{D_1}}$, $\underline{\vec{E_2}}$, $\vec{D_2}$



$\underline{\vec{D}_1} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \vec{E}_1 = \varepsilon_0 E_0 \vec{e_x}$

$E_{t1} = \cos\varphi \cdot E_0$, $E_{n1} = \sin\varphi \cdot E_0$

$E_{t2} = E_{t1} = \cos\varphi E_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0$

$E_{n2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} E_{n1} = \frac{1}{2} E_0 \sin\varphi = \frac{1}{4} E_0$

$\vec{E_2} = E_{n2} \cdot \vec{e_n} + E_{t2} \cdot \vec{e_t}$ $\qquad$ $\vec{e_t} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

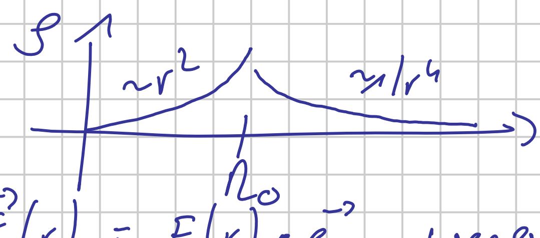
$= \dots$ (einsehen) $\dots$ $\qquad$ $\vec{e_n} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7/8 \cdot E_0 \\ \sqrt{3}/8 \cdot E_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{D_2} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \vec{E_2} = \varepsilon_0 E_0 \begin{pmatrix} 7/4 \\ \sqrt{3}/4 \\ 0 \end{pmatrix}$

A5 $\quad \varepsilon_r = 1$, Kugelkoordinaten

$$\varrho(r) = \begin{cases} \varrho_1 / R_0^2 \cdot r^2 & 0 \le r \le R_0 \\ \varrho_2 \cdot R_0^4 \cdot 1/r^4 & r > R_0 \end{cases}$$



ges: $\vec{E}(r, \vartheta, \varphi) = \vec{E}(r) = E(r) \cdot \vec{e_r}$ wegen Kugelsymmetrie

$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{D}$, $\quad \underset{\partial K(r)}{\oint\!\!\oint} \vec{D} \, d\vec{f} = \underset{K(r)}{\iiint} \varrho \, dv$ $\quad$ (*) $\quad$ (**)

Rand der Kugel mit Radius r

$$\oiint \vec{D}(r)\, d\vec{f} = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} \underbrace{D(r)\vec{e}_r}_{\vec{D}} \cdot \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{=1}\, r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= D(r)\, r^2 \int_0^{2\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta}_{[-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 2} \, d\varphi = D(r)\, r^2 \cdot 2\pi \cdot 2$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 E(r)\, r^2 \quad (*)$$

Rechte Seite:

$$\iiint_{K(r)} \rho(r)\, dv = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{r'=0}^{r} \rho(r')\, \underbrace{r'^2 \sin\vartheta \, dr' \, d\vartheta \, d\varphi}_{dv,\ \text{s. FS}}$$

unabh. von φ, ϑ

$$= 4\pi \cdot \int_{r'=0}^{r} \rho(r')\, r'^2 \, dr'$$

1. Fall: $r \leq R_0$:

$$= 4\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2 \, dr' = 4\pi \int_0^r \underbrace{\frac{\rho_1}{R_0^2} \cdot r'^2}_{\rho} \cdot r'^2 \, dr' = 4\pi \frac{\rho_1}{R_0^2} \underbrace{\int_0^r r'^4 \, dr'}_{= \left[\frac{1}{5} r'^5\right]_0^r = \frac{1}{5} r^5}$$

$$= \frac{4}{5}\pi \frac{\rho_1}{R_0^2}\, r^5 \quad (r \leq R_0) \quad (**)$$

$(*) = (**)$

$$4\pi\varepsilon_0 E(r)\, r^2 = \frac{4}{5}\pi \frac{\rho_1}{R_0^2}\, r^5 \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho_1}{5 R_0^2 \varepsilon_0}\, r^3} \text{ für } r \leq R_0$$

2. Fall $r \geq R_0$

$$= 4\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2 \, dr' = \underbrace{4\pi \int_{r'=0}^{R_0} \rho_1/R_0^2\, r'^2 \cdot r'^2 \, dr'}_{\text{s. 1 Fall}} + 4\pi \int_{R_0}^{r} \rho_2 \cdot R_0^4 \cdot \frac{1}{r'^{\cancel{4}\,2}} \cdot \cancel{r'^2}\, dr'$$

$$= \frac{4}{5}\pi \frac{\rho_1}{R_0^2} \cdot R_0^5$$

$$+ 4\pi \rho_2 R_0^4 \int_{R_0}^{r} \frac{1}{r'^2}\, dr'$$

$$= \left[-\frac{1}{r'}\right]_{r_0}^{r}$$

$$= \frac{4}{5}\pi \rho_1 r_0^3 + 4\pi \rho_2 r_0^4 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \quad (**)$$

$$(*) = (**) \quad \cancel{4\pi}\varepsilon_0 E(r) r^2 = \cancel{4\pi}\left(\frac{\rho_1}{5} r_0^3 + \rho_2 r_0^4 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\right)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2}\left(\;" \; + \; " \;\right)$$

für $r \geq r_0$

A6 Kugelkoordinaten, geg: $\vec{E} = \frac{E_0}{r_0} r e^{-r/r_0} \vec{e_r}$

a) ges: Φ, mit $\Phi(\infty) = 0$

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \Phi(r) \qquad -\int_{\vec{p_1}}^{\vec{p_2}} \vec{E}\, d\vec{l} = \Phi(\vec{p_2}) - \Phi(\vec{p_1})$$

Integration entlang $\vec{e_r}$

$$-\int_{r'=r_1}^{r_2} \underbrace{\frac{E_0}{r_0} r' e^{-r'/r_0} \vec{e_r}}_{\vec{E}} \underbrace{\vec{e_r}\, \vec{e_r}}_{=1} dr'$$

$$= -\frac{E_0}{r_0} \int_{r_1}^{r_2} r' e^{-r'/r_0} dr' = \Phi(r_2) - \Phi(r_1) \overset{r_2=\infty}{=} -\Phi(r_1)$$

$$\cancel{-}\Phi(r) = \cancel{-}\frac{E_0}{r_0}\int_r^\infty r' e^{-r'/r_0} dr' = \frac{E_0}{r_0}\left[\frac{-1/r_0 \cdot r' - 1}{1/r_0^2} e^{-r'/r_0}\right]_r^\infty$$

$r_1 = r$, $r_2 = \infty$

math. FS

$$= \frac{E_0}{r_0}\left[(-r_0 r' - r_0^2) e^{-r'/r_0}\right]_r^\infty = \frac{E_0}{\cancel{r_0}}\left[0 - (-\cancel{r_0} r - r_0^2) e^{-r/r_0}\right]$$

$$= E_0 (r + r_0) e^{-r/r_0}$$

b) ges: $\rho(r)$ geg $\vec{E}$

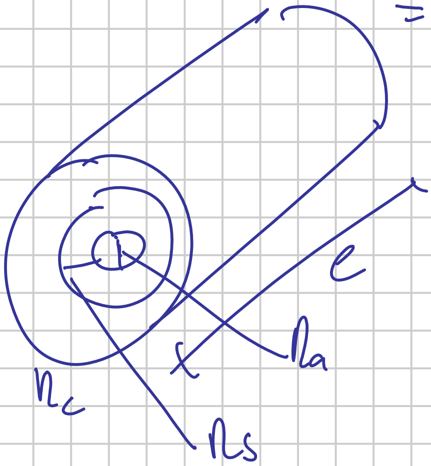
$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

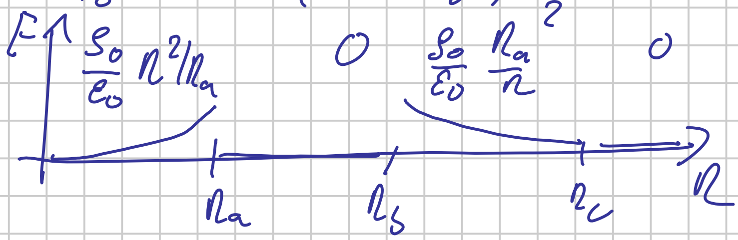
$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \rho = \operatorname{div}\left(\varepsilon_0 \frac{E_0}{r_0} r e^{-r/r_0} \vec{e}_r\right)$$

$$= \varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{E_0}{r_0} r e^{-r/r_0}\right)$$

$$= \varepsilon_0 \frac{E_0}{r_0} e^{-r/r_0} \left(3 - \frac{r}{r_0}\right)$$

$\boxed{A7}$





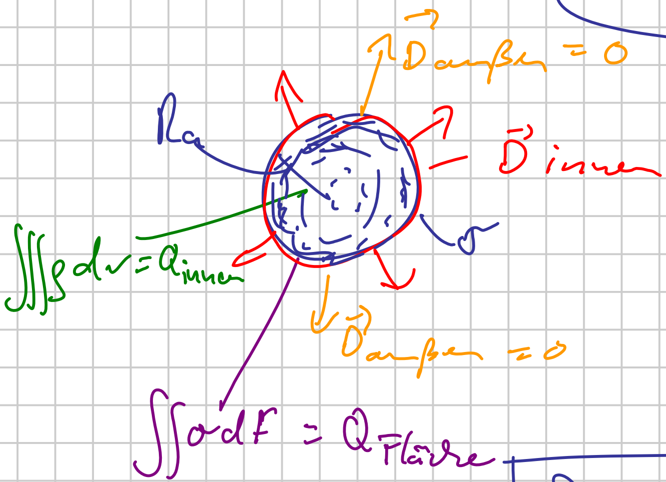
a) ges: ρ, σ $\quad \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \rho$

für $R_a < R \leq R_s$: $\vec{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0$

$R > R_c$

Für $R \leq R_a$: $\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \operatorname{div} \cancel{\varepsilon_0} \frac{\rho_0}{\cancel{\varepsilon_0}} R^2/R_a = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \rho_0 R^3/R_a$

$$= 3R\rho_0/R_a = \rho$$



$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma$$

$$\varepsilon_0 E_{n2} - \varepsilon_0 E_{n1} = \sigma = \varepsilon_0 (E_{n2} - E_{n1})$$

$$= 0$$

$$= -\cancel{\varepsilon_0} \frac{\rho_0}{\cancel{\varepsilon_0}} R_a = -\rho_0 R_a$$

$\boxed{\text{Da außen kein Feld mehr muss gelten: } Q_{innen} = -Q_{Fläche} \; (\to Q_{ges} = 0)}$