F&W Übung 3S, 07.11.2011

Grundlagen

Es gilt: $\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi$

d.h. $\vec{E}$ ist Gradientenfeld $\rightarrow$ $\boxed{\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0}$ für alle geschlossenen Wege

$\Phi(\vec{p}_2) - \Phi(\vec{p}_1) = -\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \vec{E}\, d\vec{l}$ $\quad \vec{p}_2 = \vec{p}_1$

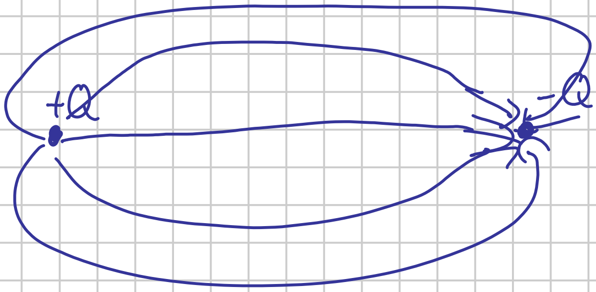
Außerdem: Wenn Φ const $\rightarrow \vec{E} = 0$

In idealen Leitern $\Rightarrow \vec{E} = 0$

Materialgleichung: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ Polarisationsvektor

Es existieren Materialien mit konst. $\vec{P}$

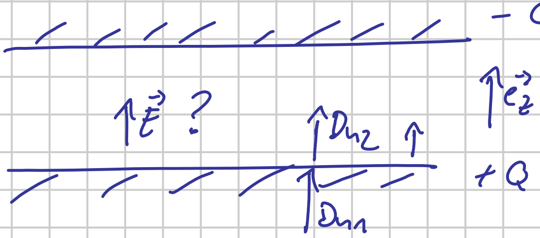
Richtung der elektrischen Feldlinien



Feldlinien
- beginnen bei pos. Ladungen
- enden bei neg. Ladungen
- schneiden sich nie

Aufg. A1

a)



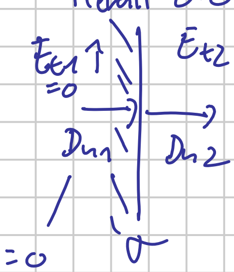
$-Q \rightarrow \sigma = -\frac{Q}{A}$

$+Q \rightarrow \sigma = \frac{Q}{A}$

ges: $\vec{E}$ in Abh. von Q

Berechnungsmöglichkeiten:
- Satz vom Hüllenfluss $\rightarrow$ bei kugel/zylindersymmetrischen Anordnungen
- Coulomb-Integral $\rightarrow$ kann aufwändig sein
- Grenzflächenbedingungen!

Metall $\vec{E} = 0 \rightarrow \vec{D} = 0$



$D_{n2} - \underbrace{D_{n1}}_{=0 \text{ im Metall}} = \sigma$

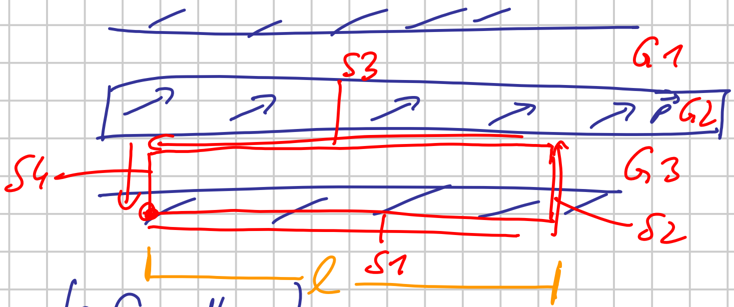
$D_{n2} = \sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow E_{n2} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = E_0$

$\underbrace{E_{t1}}_{=0} = E_{t2} \Rightarrow E_{t2} = 0 \rightarrow \vec{E} \perp$ Platte

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \overset{!}{=} \underbrace{\frac{1}{2}\rho_0/\varepsilon_0}_{\text{bekannt}} \Rightarrow Q = \frac{1}{2}\rho_0 A$$

Richtung von $\vec{E}_0$: $\vec{E}_0 = 0 \cdot \vec{e}_t + E_0 \vec{e}_n = \underline{\underline{E_0 \vec{e}_z}}$

b) ges: E_x in allen 3 Feldgebieten



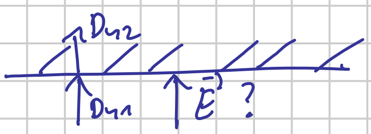
$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$ (s. Grundlagen)

$$0 = \oint \vec{E}\, d\vec{l} = \underbrace{\int_{S1} \vec{E}\, d\vec{l}}_{=0\text{, weil im Metall } \vec{E}=0} + \int_{S2} \vec{E}\, d\vec{l} + \int_{S3} \vec{E}\, d\vec{l} + \int_{S4} \vec{E}\, d\vec{l} = \int_{S3} \vec{E}\, d\vec{l} = -l \cdot E_x$$

$\Rightarrow \boxed{E_x = 0}$ in allen 3 Bereichen!

$\vec{E}$ identisch, da keine x-Abh.

$$\underbrace{\underset{(S2)}{\int_{z'=z_1}^{z_2} \vec{E}(z')\vec{e}_z\, dz'} \overset{-}{+} \underset{(S4)}{\int_{z'=z_1}^{z_2} \vec{E}(z') \cdot (-\vec{e}_z)\, dz'}}_{=0}$$

c) 

Elektrode, $\sigma = -\frac{Q}{A}$

$D_{n2} - D_{n1} = \sigma = -\frac{Q}{A}$, $D_{n2} = 0$ im Metall $\Rightarrow D_{n1} = \frac{Q}{A}$

$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \hat{=}$ Ergebnis von a) $\rightarrow$ keine Veränderung

d) Gebiete 1 & 3: wegen $\operatorname{div} \vec{D} = \rho = 0 \Rightarrow \vec{D} = \text{const.} = \frac{Q}{A} \Rightarrow \vec{E} = \text{const.} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$

Mit $Q = \frac{1}{2}\rho_0 A \rightarrow \vec{E} = E_0 \vec{e}_z = \frac{1}{2}\rho_0/\varepsilon_0\, \vec{e}_z$, $\vec{D} = \frac{1}{2}\rho_0 \vec{e}_z$

Gebiet 2: $\underline{E_x = 0}$, $E_z = ?$ Grenzbedingung: $D_{n2} - D_{n1} = \sigma = 0$

da keine freien Ladungsträger auf Dielektrikum

$$D_{n1} = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_{n2} + P_0 = D_{n2}$$

$$E_{n2} = \underline{\frac{\varepsilon_0 E_0 - P_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = E_z} \text{ in Gebiet 2}$$

$\vec D = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec E + P_0 (\vec e_x + \vec e_z)$ gemäß Aufg.

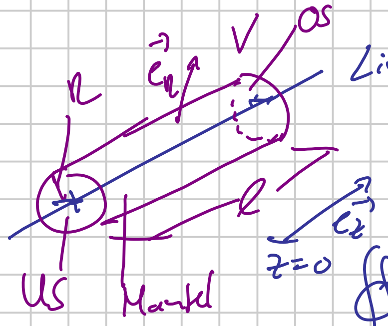
Mit $Q = \frac{1}{2} P_0 A \rightarrow E_z = \frac{-\frac{1}{2} P_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$, $\vec D = \cancel{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\left(\frac{-\frac{1}{2} P_0}{\cancel{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} \vec e_z\right) + P_0 (\vec e_x + \vec e_z)$

$$= \frac{1}{2} P_0 \vec e_z + P_0 \vec e_x$$

Aufg. B) geg: Linienladung λ

a) ges: $\vec E$ mittels Satz von Gauß

$$\operatorname{div} \vec D = \varrho \longrightarrow \oiint_{\partial V} \vec D \, d\vec f = \underbrace{\iiint_V \varrho \, dv}_{\text{im Volumen eingeschlossene Ladung}}$$



$\vec D = D_R(R)\, \vec e_R$ wegen Zylindersymmetrie

$$\oiint_{\partial Z} \vec D \, d\vec f = l \cdot \lambda$$

$$\iint_{US} \vec D \, d\vec f + \iint_{OS} \vec D \, d\vec f + \iint_{Mantel} \vec D \, d\vec f = \int_{z=0}^{l} \int_{\varphi=0}^{2\pi} D_R \underbrace{\vec e_R \cdot \vec e_R}_{=1} R \cdot d\varphi \, dz = 2\pi \cdot l \cdot D_R \cdot R$$

$\sim \vec e_R$ $\sim -\vec e_z$ $\vec e_R$ $\sim +\vec e_z$

$\underbrace{\vec e_R \cdot \vec e_z = 0}_{=0}$ $\underbrace{\qquad}_{=0}$

$$2\pi \cancel{\ell} D_R \cdot R = \cancel{\ell} \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad D_R = \frac{\lambda}{2\pi R} \quad \Rightarrow E_R = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi R}\vec{e_R} \qquad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{e_R}$$

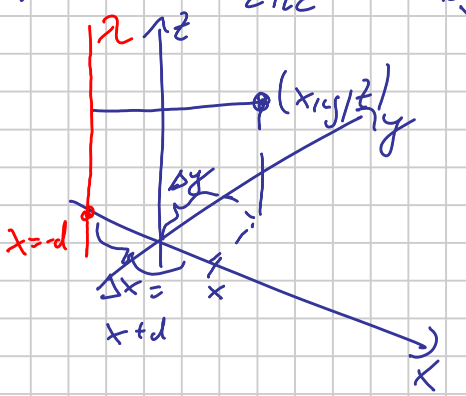
b) $\Phi_S(R) = ?$ $\quad \Phi_S(R_0) \overset{!}{=} 0$

$$\underbrace{\Phi_S(R) - \Phi_S(R_0)}_{=0} = -\int_{R_0}^{R} \vec{E}\, dR' = -\int_{R_0}^{R} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R'}\, dR' = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln R'\right]_{R_0}^{R}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln(R_0) - \ln(R)\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_0}{R}\right)$$

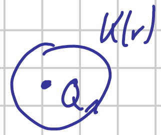
c) $\Phi_S(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{R_0}{R}\right)$

Abstand vom Ort des Potentials zur Linienladung



$$\Phi_C(x,y,z) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{R_0}{\sqrt{y^2+(x+d)^2}}\right)$$

d) Satz vom Hüllenfluss : $\underbrace{\iint \vec{D}\, d\vec{f}}_{4\pi r^2 \cdot D_r(r)} = \underbrace{\iiint \rho\, dv}_{=Q_1}$



$$\rightarrow D_r(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\cdot Q_1, \quad E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} Q_1$$

$$\underbrace{\Phi_K(r) - \Phi_K(\infty)}_{=0} = -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} Q_1\, dr' = \frac{+Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[+\frac{1}{r'}\right]_{\infty}^{r}$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

Abstand vom Ort des Potentials zur Kugel bei $(0,0,\ell)$

In kartesischen Koordinaten: $r = \sqrt{x^2+y^2+(z-\ell)^2}$

$$\rightarrow \Phi_K(x,y,z) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z-\ell)^2}}$$

e) ges: $\Phi_{ges}(x=0, y=0, z) = \Phi_{u}(0,0,z) + \Phi_{C}(0,0,z)$ (Superposition)

$$= \underbrace{\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(z-\ell)^2}}}_{\Phi_u} + \underbrace{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{\sqrt{d^2}}}_{\Phi_C = \text{const.}}$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0|z-\ell|} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{d}\right)$$

f)